

ГЕОФИЗИКА

УДК 517.95+517.923

**АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ
ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ**

А.Л. Карчевский

Институт математики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 4, Россия

В работе описаны свойства обратной динамической задачи сейсмики по определению параметров горизонтально-слоистой анизотропной среды. В качестве примера выбрана орторомбическая анизотропия. Исходя из анализа математических свойств обратной задачи, дан прогноз, какие параметры среды могут быть определены с приемлемой точностью. Приведены возможный алгоритм решения обратной задачи и примеры по численному восстановлению параметров анизотропной среды.

Обратная динамическая задача сейсмики, система упругости, горизонтально-слоистая анизотропная среда.

**ANALYSIS OF THE INVERSE DYNAMIC SEISMIC PROBLEM
FOR A LAYERED ANISOTROPIC MEDIUM**

A.L. Karchevsky

Mathematical properties of the inverse dynamic seismic problem for determining the elasticity parameters of a homogeneous layered anisotropic medium are investigated for the case of orthorhombic symmetry. Analysis of the mathematical properties of the inverse problem allows predicting which parameters can be estimated to a satisfactory accuracy. The suggested inversion algorithm is tested in numerical experiments for determining elastic parameters of a thinly stratified medium including several anisotropic layers.

Inverse dynamic seismic problem, elasticity system, layered anisotropic medium.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование волновых полей стало неотъемлемой частью современных обрабатывающих комплексов в сейсморазведке. Первые работы по многоволновой сейсморазведке появились в России [1—6], а затем данные идеи стали широко применяться за рубежом [7—13]. Проявляемый в последнее время интерес практической сейсморазведки к анализу нескольких компонент вектора смещений и способам обработки данных, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа *PS*, требует развития более сложного аппарата математического моделирования, отвечающего теории упругости.

Обратная динамическая задача сейсмики может быть решена при помощи метода минимизации функционала невязки. Основная трудность при решении обратной задачи таким образом — это многократное решение прямой задачи. Следовательно, чем быстрее решается прямая задача, тем быстрее будет решена обратная. Предлагается решать обратную динамическую задачу сейсмики в частотной области. При таком ходе решения возникают две проблемы. Первая — переход от сейсмограмм к их частотным характеристикам, т. е. переход от переменных (t, x, y, z) к (f, v_1, v_2, z) . Вторая — наличие быстрого алгоритма решения прямой задачи для системы дифференциальных уравнений (СДУ) теории упругости, создание алгоритма решения обратной задачи в частотной области.

Существует масса методов решения системы дифференциальных уравнений теории упругости, например, метод Томсона—Хаскела и несколько его модификаций [14, 15] (значительный вклад в развитие и применение на практике матричного метода внесен Л.А. Молотковым), конечно-разностный метод [16], метод конечных элементов и прочие. Сочетание различных подходов при решении дифференциальных уравнений теории упругости для вертикально-неоднородных анизотропных сред можно найти в работах В.Н. Мартынова и Б.Г. Михайленко [17, 18]. Тем не менее многие перечисленные методы решения прямой задачи либо имеют ряд серьезных ограничений по их применению, либо требуют для вычислений значительного времени.

Модель горизонтально-слоистой однородной среды является распространенной моделью среды для математического моделирования и интерпретации геофизических данных в сейсмо- и электроразведке. Известно, что расчет сейсмических и электромагнитных полей может быть сведен к решению дифференциальных уравнений или СДУ второго порядка. Горизонтально-слоистая однородная модель среды позволяет строить алгоритмы решения прямых задач, которые легко реализуются на компьютере и требуют сравнительно малого времени для вычислений. Это позволяет решать задачи, возникающие в геофизике, которые требуют многократного решения прямой задачи.

Большой вклад в понимание процессов распространения волн в слоистых средах, в развитие методов вычислений для таких сред был внесен такими учеными, как Л.М. Бреховских [19, 20], Л.А. Молотков [14], работы коллектива авторов под руководством Г.И. Петрашеня по решению прямых задач для СДУ теории упругости для изотропных и анизотропных сред до сих пор являются во многом ориентиром и руководством для специалистов [21—26].

Алгоритмы, позволяющие найти решение СДУ теории упругости в частотной области для горизонтально-слоистых однородных сред, известны давно [27—31]. Алгоритмы работ [27—29, 31] разработаны для изотропных однородных сред и для однородных изотропных сред с поглощением, алгоритм работы [30] — для трансверсально-изотропной однородной среды с осью симметрии бесконечного порядка, совпадающей с осью Oz .

В работах автора [32, 33] был предложен алгоритм решения нестационарной СДУ теории упругости в частотной области для горизонтально-слоистых однородных анизотропных сред. Основным достоинством данного алгоритма является его применимость для сред любого вида анизотропии, возможность нахождения решения прямой задачи в любой точке, высокая скорость счета, независимость алгоритма от толщины слоев: модель среды может содержать как очень толстые, так и очень тонкие слои. Это позволяет заниматься математическим моделированием сейсмических полей, представляющих практический интерес для сейсморазведки, исследовать и разрабатывать на его основе методы решения обратной динамической задачи сейсмологии для горизонтально-слоистых однородных анизотропных сред. В основе алгоритма решения прямой задачи [32, 33], как и в работах [27—31], лежит идея сведения СДУ второго порядка к решению дифференциального матричного уравнения Риккати, которое в каждом слое имеет решение в явном аналитическом виде.

Вернемся к первой проблеме. Основной трудностью здесь является то, что области и время наблюдения являются ограниченными. В теоретическом же рассмотрении при переходе от переменных (t, x, y, z) к (f, v_1, v_2, z) считается, что области и время наблюдений бесконечны. Таким образом, получаемые на практике спектры должны быть искажены. Проблема перехода от наблюдаемых полей смещений в частотную область является трудной, но решаемой. Например, для того чтобы спектры были вычислены более точно, можно рекомендовать процедуру уточнения из работы С.В. Гольдина и др. [34, с. 98].

Однако прежде, чем начинать решать первую проблему, необходимо решить вторую. Исследование второй проблемы покажет, какими свойствами обладает решение обратной задачи в частотной области, возможно ли существенное расширение объема восстанавливаемых характеристик среды по сравнению с другими известными методами, имеет ли смысл браться за решение первой проблемы ради данного прироста информации о среде. Таким образом, в данной статье представлены результаты, относящиеся ко второй проблеме: по численному решению обратной динамической задачи сейсмологии в частотной области для горизонтально-слоистой однородной анизотропной среды.

В разделе 1 приведена постановка прямой и обратной задач для СДУ теории упругости в их математической формулировке и функционал невязки.

В работах [35, 36] для однородной изотропной среды подробно исследовались свойства функционалов невязки подобных функционалу из раздела 1, была разработана стратегия их минимизации. Данные функционалы невязки могут иметь локальные минимумы и максимумы, их свойства зависят от следующих параметров: интервалов пространственных и временных частот; количества частот, взятых из этих интервалов; параметра затухания α (будет определен ниже). Разработанная минимизационная стратегия позволяет достичь точки глобального минимума, минуя „ловушки“ локальных минимумов.

В данной работе была проверена применимость минимизационной стратегии, предложенной в работах [35, 36] для горизонтально-слоистых однородных изотропных сред, в случае, когда среда является анизотропной. В разделе 3 проведено дополнительное исследование свойств решения прямой задачи и функционала невязки в зависимости от их параметров. Необходимость данного исследования обусловлена наличием анизотропии.

Цель обратной задачи, рассмотренной в данной работе, — определить параметры среды тонкослоистой пачки анизотропных слоев, которая находится в известной вмещающей изотропной среде. Для иллюстрации решения обратной динамической задачи был выбран один из наиболее общих видов анизотропии, имеющих отношение к практике, — орторомбическая анизотропия. В данной работе постановка обратной задачи является модельной и служит для изучения математических свойств обратной

динамической задачи сейсмологии. В работе [37] представлены исследования для среды другого вида анизотропии — для трансверсально-изотропной среды с осью симметрии, лежащей в горизонтальной плоскости.

В разделе 4 приводятся результаты численных экспериментов по решению модельной обратной задачи на синтетических данных.

В данной работе речь пойдет только о тех особенностях обратной динамической задачи, которые следуют из ее математических свойств. Будут оговорены только общие ограничения, следующие из практики.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим среду — n -слойную структуру с границами раздела z_k , $k = \overline{0, N}$, $z_0 = 0$; m -й слой находится при $z_{m-1} < z < z_m$, последний ($N+1$) (подстилающий) слой — $z_N < z < \infty$. Физические свойства каждого слоя характеризуются плотностью ρ и величинами модулей упругости C_{mn} , которые являются элементами симметричной матрицы C порядка 6, т. е. C_{mn} и ρ — кусочно-постоянные функции переменной z , $0 < z < \infty$.

Источник вида

$$F(t)\nabla\delta(x, y, z - z_*)$$

в начальный момент времени $t = 0$ возбуждает в среде упругие колебания. Источник такого вида моделирует взрыв. Будем считать, что источник находится в первом слое, т. е. $z_* \in (z_0, z_1)$.

Применим к СДУ теории упругости, записанной в терминах смещений, преобразования Лапласа по переменной t и преобразования Фурье по переменным x и y . Получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial}{\partial z} U + i\hat{B}U \right) + i\check{B} \frac{\partial}{\partial z} U - DU = -f(p) (il_1\delta(z - z_*) + l_2\delta'(z - z_*)), \quad z \in R_+. \quad (1)$$

Отсутствие напряжений на поверхности описывается следующим краевым условием:

$$\left(A \frac{\partial}{\partial z} U + i\hat{B}U \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

Считаем, что поля напряжений и смещений непрерывны в точках разрыва среды

$$\left[A \frac{\partial}{\partial z} U + i\hat{B}U \right]_{z_k} = 0, \quad [U]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Считаем, что на бесконечности имеют место условия затухания

$$U \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A = \rho \begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad l_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

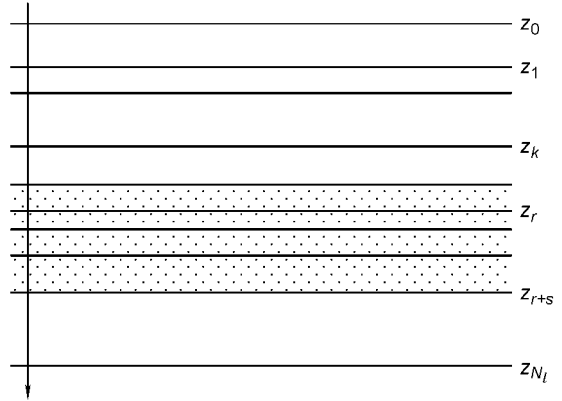
$$\hat{B} = \rho v_1 \begin{bmatrix} c_{15} & c_{56} & c_{55} \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} \end{bmatrix} + \rho v_2 \begin{bmatrix} c_{56} & c_{25} & c_{45} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} \end{bmatrix}, \quad \check{B} = \rho v_1 \begin{bmatrix} c_{15} & c_{14} & c_{13} \\ c_{56} & c_{46} & c_{36} \\ c_{55} & c_{45} & c_{35} \end{bmatrix} + \rho v_2 \begin{bmatrix} c_{56} & c_{46} & c_{36} \\ c_{25} & c_{24} & c_{23} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \end{bmatrix},$$

$$D = \rho p^2 E + \rho v_1^2 \begin{bmatrix} c_{11} & c_{16} & c_{15} \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} \end{bmatrix} + \rho v_2^2 \begin{bmatrix} c_{66} & c_{26} & c_{46} \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \end{bmatrix} + \rho v_1 v_2 \begin{bmatrix} 2c_{16} & c_{12} + c_{66} & c_{14} + c_{56} \\ c_{12} + c_{66} & 2c_{26} & c_{25} + c_{46} \\ c_{14} + c_{56} & c_{25} + c_{46} & 2c_{45} \end{bmatrix},$$

где $c_{mn} = C_{mn} / \rho$ — приведенные модули упругости, v_1 и v_2 — параметры преобразования Фурье по пространственным переменным x и y соответственно, $p = -\alpha + i\omega$ — параметр преобразования Лапласа по временной переменной t . Матрица A — симметричная и положительно определенная; матрица D — симметричная; $\hat{B}' = \check{B}$ (штрих обозначает операцию транспонирования).

Таким образом, имеем постановку прямой задачи (1)—(4).

Рис. 1. Модель среды.



Далее, пусть каждый слой будет или изотропным, или анизотропным. Считаем, что анизотропный слой обладает орторомбической анизотропией, которая означает, что через каждую точку среды проходят три ортогональные плоскости упругой симметрии. Будем считать, что оси системы координат направлены перпендикулярно этим плоскостям. В этом случае матрица модулей упругости имеет следующий вид:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Среда является горизонтально-слоистой. Будем считать, что на некоторой глубине расположена пачка анизотропных слоев. Пусть первый слой пачки имеет номер r , а последний — $r + s$ (рис. 1). Считаем, что вмещающая среда является изотропной и ее параметры известны, что известны также плотность среды ρ и точки разрыва среды z_k .

Обратная задача. Определить параметры $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ каждого слоя пачки анизотропных слоев, если о решении прямой задачи (1)—(4) известна дополнительная информация следующего вида:

$$U(0, v_1, v_2, p) = U_0(v_1, v_2, p), \quad U_0 = \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $U_0(v_1, v_2, p)$ — известная вектор-функция, $\alpha \in \Omega_\alpha$, $\omega \in \Omega_\omega$, $v_1 \in \Omega_{v_1}$, $v_2 \in \Omega_{v_2}$,

$$\Omega_\alpha = \{\alpha | \alpha^1, \dots, \alpha^{N_\alpha}\}, \quad \Omega_\omega = \{\omega | \omega^1, \dots, \omega^{N_\omega}\},$$

$$\Omega_{v_1} = \{v_1 | v_1^1, \dots, v_1^{N_{v_1}}\}, \quad \Omega_{v_2} = \{v_2 | v_2^1, \dots, v_2^{N_{v_2}}\},$$

и $N_\alpha, N_\omega, N_{v_1}, N_{v_2}$ — конечные числа.

Численно обратную задачу (1)—(5) можно решать при помощи минимизации функционала невязки

$$J = \sum_{\omega \in \Omega_\omega} \sum_{v_1 \in \Omega_{v_1}} \sum_{v_2 \in \Omega_{v_2}} h_\omega h_{v_1} h_{v_2} \sum_{j=1}^3 |u_j(0, v_1, v_2, p) - u_{j,0}(v_1, v_2, p)|^2. \quad (6)$$

Постоянные $h_{v_1}, h_{v_2}, h_\omega$ являются нормирующими

$$h_\omega^k = \begin{cases} \omega^k - \omega^{k-1}, & N_\omega > 1 \\ 1, & N_\omega = 1 \end{cases}, \quad h_{v_m}^n = \begin{cases} v_m^n - v_m^{n-1}, & N_{v_m} > 1 \\ 1, & N_{v_m} = 1 \end{cases}, \quad m = 1, 2,$$

и при записи функционала (6) индексы суммирования k и n опущены для простоты. Наличие нормирующих постоянных позволяет сравнивать поведение функционала невязки (6) при использовании для его построения различных наборов параметров.

Вид функционала (6) отвечает требованиям практики. Как отмечалось во введении, в работах [35, 36] показано, что такого вида функционалы могут иметь локальные минимумы и максимумы. Тем не менее в данных работах для горизонтально-слоистых однородных изотропных сред предложена стратегия минимизации, позволяющая достичь точки глобального минимума функционала. Стратегия минимизации

основана на изучении свойств прямой задачи и функционала невязки в зависимости от их параметров. В данной работе необходимо, во-первых, показать, что данная минимизационная стратегия „работает“ и для анизотропных сред, во-вторых, необходимо провести дополнительное исследование, обусловленное анизотропией, свойств прямой задачи и функционала невязки в зависимости от их параметров.

2. МОДЕЛЬ СРЕДЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Иллюстрацию особенностей численного решения обратной задачи проведем на примере восстановления упругих параметров пачки тонких слоев (рис. 2, табл. 1, 2).

В качестве дополнительной информации (5) использовались синтетические данные: решалась прямая задача (1)–(4), а затем вносилась случайная ошибка

$$\tilde{u}_{k,0}(v_1, v_2, p) = u_{k,0}(v_1, v_2, p) + w_k(v_1, v_2) \frac{P_k}{100} \xi_k, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (7)$$

где $w_k(v_1, v_2)$ есть среднее значение величины $|u_{k,0}(v_1, v_2, p)|$ на интервале $[f_1, f_2]$ временных частот (напомним, $p = -\alpha + i\omega$, $\omega = 2\pi f$), ξ_k — случайные величины из единичного круга, P_k — процент вносимой ошибки.

На рис. 3 приведены примеры данных обратной задачи с 10 %-й ошибкой.

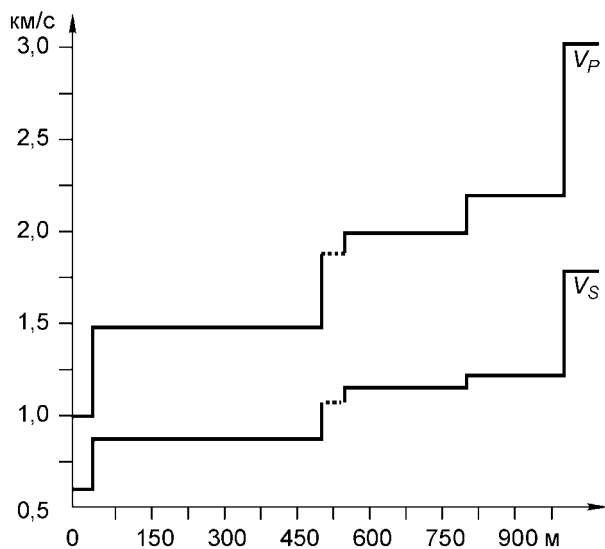


Таблица 1. Упругие постоянные, км/с

Упругий параметр	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$
$\sqrt{c_{11}}$	1,70	1,90	1,80	1,95	2,10
$\sqrt{c_{12}}$	0,95	1,00	1,02	1,10	1,20
$\sqrt{c_{13}}$	0,80	0,90	0,85	0,95	1,00
$\sqrt{c_{22}}$	1,60	1,80	1,90	2,00	2,05
$\sqrt{c_{23}}$	0,70	0,85	0,80	0,90	1,10
$\sqrt{c_{33}}$	1,30	1,70	1,60	1,75	2,10
$\sqrt{c_{44}}$	0,70	1,00	0,90	0,93	0,97
$\sqrt{c_{55}}$	0,75	1,10	1,00	1,10	0,95
$\sqrt{c_{66}}$	0,85	1,00	0,90	0,95	0,90

Таблица 2. Точки разрыва среды, м

Граница раздела	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$
z_k	500	505	511	516	524	530
$z_k - z_{k-1}$	—	5	6	5	8	6

Рис. 2. Модель вмещающей среды.

Пунктиром отмечено место расположения пачки тонких анизотропных слоев.

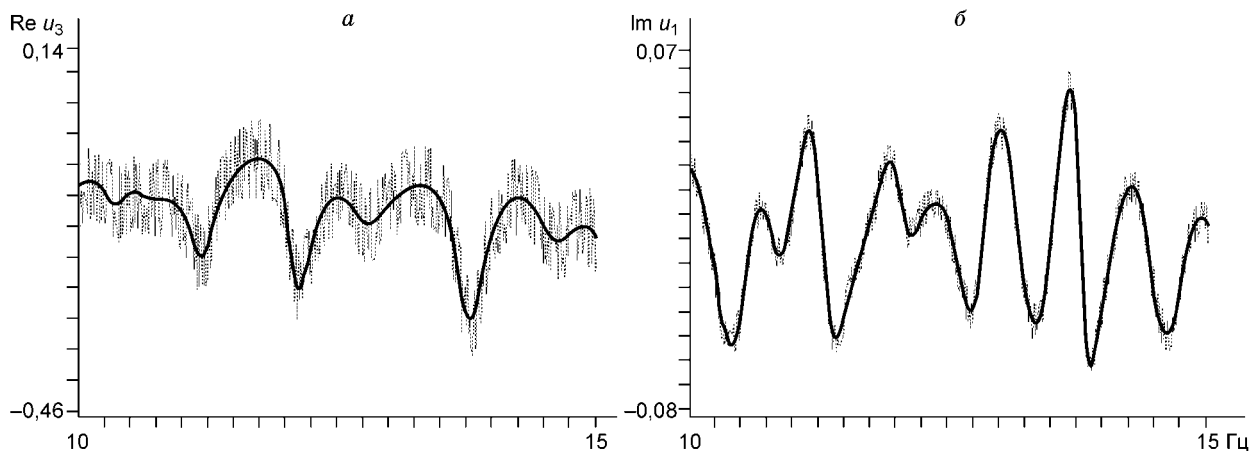


Рис. 3. Пример зашумленных данных для обратной задачи.

Ошибка 10 %.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Расщепление обратной задачи

При восстановлении параметров среды тонкослоистой пачки размерность обратной задачи — $9s$, где s — количество тонких слоев в пачке. Естественное желание — решать обратную задачу, которая имеет размерность меньше. Выбор различных значений параметров обратной задачи (1)—(5) позволяет свести численное решение обратной задачи по определению приведенных модулей упругости c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{22} , c_{23} , c_{33} , c_{44} , c_{55} и c_{66} к серии обратных задач меньшей размерности, т. е. к серии обратных задач по определению не всех, а только части приведенных модулей упругости.

Положим $v_1 = 0$ и $v_2 = 0$. Из соотношений (1)—(4) получим следующую постановку прямой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) - \rho p^2 u_3 &= -f(p) \delta'(z - z_*), \\ \left(\rho c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} &= 0, \quad u_3 \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \\ \left[\rho c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right]_{z_k} &= 0, \quad [u_3]_{z_k} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для прямой задачи (8) при постановке обратной задачи будет неизвестен только приведенный модуль упругости c_{33} .

Положим $v_1 \neq 0$ и $v_2 = 0$. Из соотношений (1)—(4) следует постановка прямой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_1 \frac{\partial}{\partial z} U_1 + i \hat{B}_1 U_1 \right) + i \check{B}_1 \frac{\partial}{\partial z} U_1 - D_1 U_1 &= -f(p) (i v_1 l_1 \delta(z - z_*) + l_2 \delta'(z - z_*)), \\ \left(A_1 \frac{\partial}{\partial z} U_1 + i \hat{B}_1 U_1 \right) \Big|_{z=0} &= 0, \quad U_1 \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \\ \left[A_1 \frac{\partial}{\partial z} U_1 + i \hat{B}_1 U_1 \right]_{z_k} &= 0, \quad [U_1]_{z_k} = 0. \\ U_1 &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \rho \begin{bmatrix} c_{55} & 0 \\ 0 & c_{33} \end{bmatrix}, \\ \hat{B}_1 &= \rho v_1 \begin{bmatrix} 0 & c_{55} \\ c_{13} & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_1 = \rho v_1 \begin{bmatrix} 0 & c_{13} \\ c_{55} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \rho p^2 E + \rho v_1 \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{55} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если считать, что c_{33} уже определен, то при постановке обратной задачи к прямой задаче (9) будут неизвестны следующие приведенные модули упругости c_{55} , c_{13} , c_{11} .

Положим $v_1 = 0$ и $v_2 \neq 0$. Из соотношений (1)—(4) получим следующую постановку прямой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(A_2 \frac{\partial}{\partial z} U_2 + i \hat{B}_2 U_2 \right) + i \check{B}_2 \frac{\partial}{\partial z} U_2 - D_2 U_2 &= -f(p) (i v_2 l_1 \delta(z - z_*) + l_2 \delta'(z - z_*)), \\ \left(A_2 \frac{\partial}{\partial z} U_2 + i \hat{B}_2 U_2 \right) \Big|_{z=0} &= 0, \quad U_2 \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \\ \left[A_2 \frac{\partial}{\partial z} U_2 + i \hat{B}_2 U_2 \right]_{z_k} &= 0, \quad [U_2]_{z_k} = 0. \\ U_2 &= \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \rho \begin{bmatrix} c_{44} & 0 \\ 0 & c_{33} \end{bmatrix}, \\ \hat{B}_2 &= \rho v_2 \begin{bmatrix} 0 & c_{44} \\ c_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{B}_2 = \rho v_2 \begin{bmatrix} 0 & c_{23} \\ c_{44} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \rho p^2 E + \rho v_2 \begin{bmatrix} c_{22} & 0 \\ 0 & c_{44} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если считать, что c_{33} уже определен, при постановке обратной задачи к прямой задаче (10) будут неизвестны следующие приведенные модули упругости c_{44} , c_{23} , c_{22} .

Наконец, полагая $v_1 \neq 0$ и $v_2 \neq 0$, имеем постановку прямой задачи (1)—(4), для которой можем рассматривать обратную задачу по определению неизвестных приведенных модулей упругости c_{66} и c_{12} .

Таким образом, обратная задача по определению девяти приведенных модулей упругости c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{22} , c_{23} , c_{33} , c_{44} , c_{55} и c_{66} может быть сведена к решению серии обратных задач:

- найдем c_{33} , решая обратную задачу для прямой задачи (8);
- найдем c_{55} , c_{13} и c_{11} , используя известный приведенный модуль упругости c_{33} и решая обратную задачу для прямой задачи (9);
- найдем c_{44} , c_{23} и c_{22} , используя известный приведенный модуль упругости c_{33} и решая обратную задачу для прямой задачи (10);
- найдем c_{66} и c_{12} , используя известные приведенные модули упругости c_{33} , c_{55} , c_{44} , c_{13} , c_{23} , c_{22} , c_{11} и решая обратную задачу для прямой задачи (1)—(4).

3.2. Ограниченность области спектральных значений

В работах [35, 36] для изотропной среды были подробно исследованы свойства функционалов невязки. Подобными свойствами обладает и функционал (6). В частности, показано, что существует так называемый „верхний треугольник“ значений решений прямой задачи, которые не могут быть использованы для построения функционала невязки, поскольку их использование приводит к тому, что функционал невязки будет иметь большое количество локальных минимумов и максимумов. Это свойство делает невозможным поиск глобального минимума.

Для функционала (6) и решения прямой задачи (1)—(4) данное свойство также имеет место. На рис. 4 приведены графики зависимости $\text{Re } u_3(0, \nu, \nu, p)$ от пространственной частоты ν и временной частоты f . Явно просматривается „верхний треугольник“ (отмечен двумя наклонными штриховыми линиями) значений решений прямой задачи, когда эти значения изменяются в очень значительных интервалах. Эти значения связаны со спектром дифференциального оператора системы (1).

Спектр дифференциального оператора

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial}{\partial z} U + \nu B U \right) - \nu B' \frac{\partial}{\partial z} U = \Lambda U \quad (11)$$

лежит на действительной оси [38]. Если $\alpha = 0$, тогда матрица D из системы (1) будет действительной и может совпасть с матрицей Λ из системы (11) для некоторых значений ν_1 , ν_2 и f . Это приводит к неограниченному росту значений $U(0, \nu_1, \nu_2, p)$. Значение параметра $\alpha \neq 0$ при изменениях ν_1 , ν_2 и f не позволяет элементам матрицы D попасть на спектр, однако они могут быть достаточно близки к ним. Поэтому при построении функционала невязки (6) должны быть исключены значения из „верхнего треугольника“.

Следующим существенным ограничением при построении функционала невязки является то, что на практике мы можем использовать решение прямой задачи из ограниченного интервала временных частот $[f, \bar{f}]$ (см. рис. 4, верхнее и нижнее значения отмечены вертикальными штриховыми линиями).

Еще одно ограничение связано с расстановкой сейсмоприемников на профиле. Хорошо известно, что если, например, расстояние между сейсмоприемниками составляет 12,5 м, то максимальное значение пространственных частот ν_j ($j = 1, 2$) не должно превышать $4 \cdot 10^{-2}$ (см. рис. 4, верхнее значение пространственных частот ограничено горизонтальной штриховой линией).

Подводя итог, можно сказать, что для решения обратной задачи (1)—(5) могут быть использованы значения $u(0, \nu_1, \nu_2, p)$ только из „нижней трапеции“ (см. рис. 4, углы трапеции выделены черными

точками). Данное замечание было необходимо сделать, поскольку для горизонтально-слоистых однородных изотропных сред не возникало проблем с выбором значения пространственной частоты: как видно, значение пространственной частоты жестко ограничено сверху, а для изо-

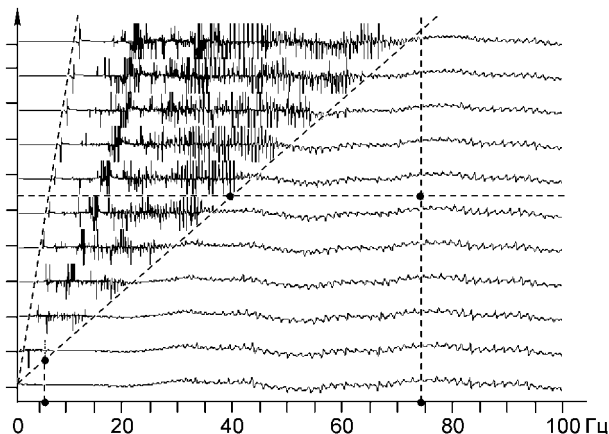


Рис. 4. Пример зависимости $U(0, \nu_1, \nu_2, p)$ от изменений временных и пространственных частот.

Приведено 11 графиков $\text{Re } u_3(0, \nu, \nu, p)$ для различных пространственных частот ν из интервала $[0, 10^{-1}]$ с шагом 10^{-2} . Графики для каждого значения пространственной частоты расположены со сдвигом: нижний соответствует $\nu = 0$, верхний — $\nu = 10^{-1}$.

тропных сред не было необходимости при минимизационном процессе использовать значения пространственной частоты, близкое к верхней границе. Ниже будет проведено исследование поведения функционала невязки при использовании различных значений пространственной частоты. Данное поведение обусловлено анизотропией среды.

Далее при построении функционала невязки будут использованы только значения из „нижней трапеции“, поэтому специально оговаривать этот факт мы не будем.

3.3. Овражность функционала

Обратим внимание на поведение функционала невязки при решении обратной задачи по определению приведенных модулей упругости c_{55} , c_{13} и c_{11} для прямой задачи (9).

На рис. 5 приведены графики, иллюстрирующие поведение функционала невязки при вариации одного из параметров слоя $(c_{55})_{[k]}$, и для различных его значений получены значения функционала невязки (индекс в квадратных скобках означает, что взято значение кусочно-постоянной функции c_{55} из слоя k). Все остальные параметры среды оставались без изменения.

Как видно из представленных рисунков, наиболее значительное влияние на вариации функционала оказывают изменения коэффициента c_{55} системы (9). Затем по значимости оказываемого влияния следует c_{13} . И, наконец, наименее заметное влияние на функционал невязки оказывают изменения c_{11} . Данный вывод справедлив для небольших ν_1 , т. е. для ν_1 , меньших $2 \cdot 10^{-2}$ — $3 \cdot 10^{-2}$. Для больших значений пространственной частоты ν_1 (стремящихся к единице) можем заключить, что по-прежнему наибольшее влияние на изменение функционала невязки оказывают вариации c_{55} , а изменения функционала невязки в зависимости от изменений c_{13} и c_{11} становятся соизмеримы друг с другом.

Аналогичное поведение функционала невязки наблюдается и для решения обратной задачи по определению приведенных модулей упругости c_{44} , c_{23} и c_{22} .

С чем связано такое поведение функционала невязки?

Это объясняется тем, что элементы матриц \hat{B} , \check{B} и D умножены соответственно на ν_1 , ν_2 , ν_1^2 , ν_2^2 и $\nu_1\nu_2$. При малых значениях пространственных частот вариации элементов этих матриц оказывают малое влияние на поведение $U(0, \nu_1, \nu_2, p)$ и, следовательно, на поведение функционала невязки (6).

В дополнение к этому обратим внимание на источник в постановке прямой задачи (9). Видно, что $u_3 = O(1)$ и $u_1 = O(\nu_1)$. Таким образом, при малых значениях пространственной частоты приведенный модуль упругости c_{11} фактически умножается на величину $O(\nu_1^3)$.

Аналогичная ситуация наблюдается и для прямой задачи (10).

Как можно использовать данное свойство функционала невязки — его ярко выраженную овражность?

При численном решении обратной задачи для постановки прямой задачи (10), когда дополнительная информация известна с ошибкой, можно расщепить процесс восстановления неизвестных параметров среды на два этапа.

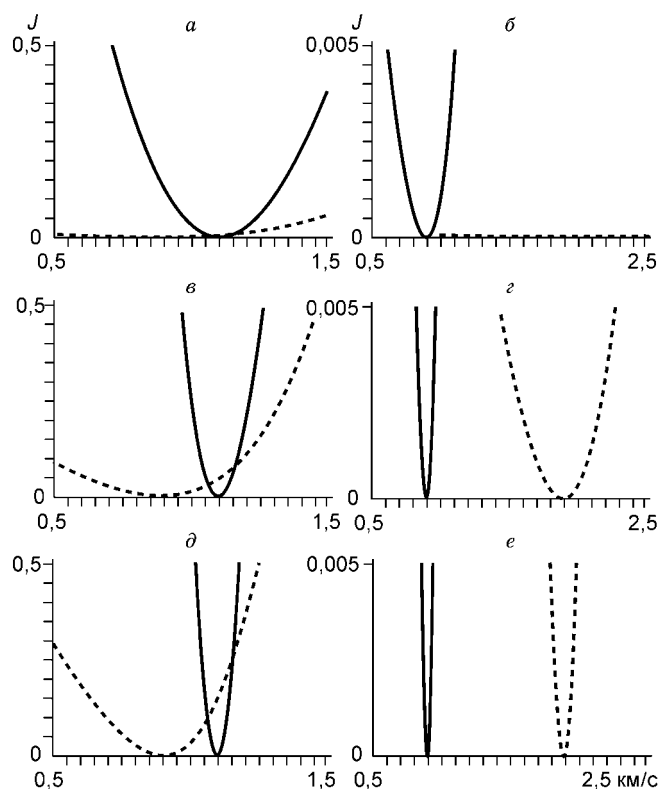


Рис. 5. Поведение функционала невязки при изменении различных параметров среды:

a, b — $\nu_1 = 10^{-2}$, $f \in [10, 70]$ Гц; c, d — $\nu_1 = 3 \cdot 10^{-2}$, $f \in [17, 70]$ Гц; e — $\nu_1 = 5 \cdot 10^{-2}$, $f \in [27, 70]$ Гц. На графиках a, c, d — кривые функционала невязки при изменении $(c_{55})_{[4]}$ (сплошная линия) и $(c_{13})_{[4]}$ (штриховая линия), b, c, e — при изменении $(c_{13})_{[4]}$ (сплошная линия) и $(c_{11})_{[4]}$ (штриховая линия).

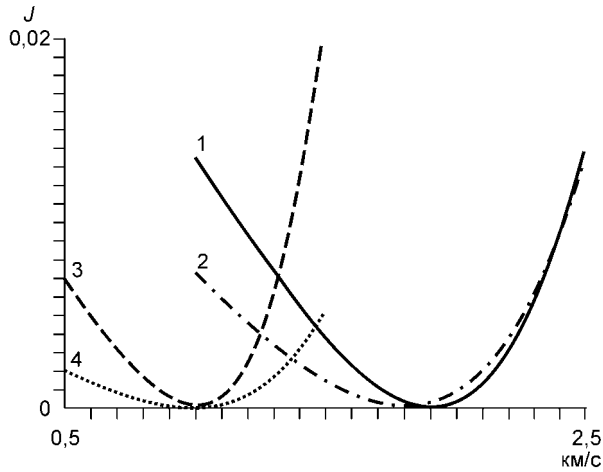


Рис. 6. Поведение функционала невязки при $v_1 = v_2 = 3 \cdot 10^{-2}$, $f \in [25, 70]$ Гц.

График 1 соответствует изменениям $(c_{11})_{[4]}$; 2 — $(c_{22})_{[4]}$; 3 — $(c_{66})_{[4]}$ и 4 — $(c_{12})_{[4]}$.

На первом этапе, выбирая небольшое v_1 , найдем c_{55} . На втором этапе, используя восстановленный c_{55} и выбирая большее v_1 , находим c_{13} и c_{11} .

На первом этапе выбор значения v_1 определяется так, чтобы изменения вектор-функции U в зависимости от c_{55} были значительными, а в зависимости от изменений c_{13} и c_{11} — незначи-

тельными на фоне ошибок измерений, присутствующих в дополнительной информации (5). На втором этапе пространственная частота v_1 не может превышать некоторого предельного значения (см. рис. 4).

На рис. 6 показана зависимость функционала невязки от изменений параметров среды c_{11} , c_{22} , c_{66} и c_{12} для для обратной задачи (1)—(5). Видно, что параметры c_{11} , c_{22} и c_{66} оказывают сравнимое влияние на функционал невязки, а влияние изменений c_{12} менее заметно. Это можно объяснить тем, что функция c_{66} входит как самостоятельный коэффициент в систему уравнений и в виде суммы $c_{12} + c_{66}$, а функция c_{12} только в виде упомянутой суммы и нигде самостоятельно.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Исследование в п. 3.1 показало, что возможно построение алгоритма поэтапного решения обратной задачи.

При восстановлении неизвестных упругих параметров среды везде был использован параметр затухания $\alpha = 10^{-2}$.

Как уже отмечалось, подробно стратегия минимизации описана в работах [35, 36], поэтому не будем останавливаться на описании того, как она была здесь применена. Приведем только наборы параметров обратных задач, использованных при восстановлении.

Для минимизации функционала невязки был использован метод сопряженных градиентов [39].

Для проведения численного эксперимента по решению обратной задачи была начислена дополнительная информация вида (5), а затем внесена 10 %-я ошибка вида (7).

Приведем описание поэтапного восстановления приведенных модулей упругости c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{22} , c_{23} , c_{33} , c_{44} , c_{55} и c_{66} .

Этап первый — восстановление c_{33} . Для функционала невязки (6) были выбраны следующие параметры:

— количество пространственных частот: $N_{v_1} = 1, N_{v_2} = 1$;

— пространственные частоты: $v_1 = 0, v_2 = 0$;

— интервал временных частот: $[10, 70]$ Гц;

— количество временных частот: $N_\omega = 1000$ с равным шагом разбиения интервала временных частот.

Таким образом, функционал невязки (6) примет вид

$$J = \sum_{\omega \in \Omega_\omega} h_\omega |u_3(0, 0, 0, p) - u_{3,0}(0, 0, p)|^2.$$

Начальное приближение для старта минимизационного процесса методом сопряженных градиентов было выбрано следующим: $\sqrt{c_{11}} = 2,3$ км/с для всех слоев тонкослоистой пачки.

Результат восстановления c_{33} показан на рис. 7, а.

По известному приведенному модулю упругости c_{33} строим начальное приближение для восстановления c_{55} , c_{13} и c_{11} , считая, что известно некое корреляционное соотношение, связывающее значения c_{55} , c_{13} , c_{11} с c_{33} . В численных экспериментах мы использовали самые простые корреляционные соотношения следующего вида:

$$c_{33} = \sqrt{3} c_{13}, \quad c_{33} = \sqrt{3} c_{55}, \quad c_{33} = c_{11} \quad (12)$$

(для численных экспериментов модель среды подобрана так, чтобы корреляционные соотношения (12) давали начальные приближения для восстановления c_{55} , c_{13} и c_{11} с 10—30 %-й ошибкой по сравнению с точными значениями). Как показала практика восстановления неизвестных параметров среды в работах [35, 36, 40—42], корреляционные соотношения очень полезны при выборе начального приближения для поиска параметров среды, когда один из параметров среды уже восстановлен. Далее не будем уточнять, как строятся начальные приближения для восстановления очередных функций.

Этап второй — восстановление c_{55} , c_{13} и c_{11} подразделяется на несколько шагов.

Шаг первый — восстановление c_{55} (см. рис. 7, б). Для функционала невязки (6) были выбраны следующие параметры:

- количество пространственных частот: $N_{v_1} = 1, N_{v_2} = 1$;
- пространственные частоты: $v_1 = 10^{-2}, v_2 = 0$;
- интервал временных частот: [10,70] Гц;
- количество временных частот: $N_o = 1000$ с равным шагом разбиения интервала временных частот.

Шаг второй — восстановление c_{13} и c_{11} (см. рис. 7, в, з). Для функционала невязки (6) были выбраны следующие параметры:

- количество пространственных частот: $N_{v_1} = 1, N_{v_2} = 1$;
- пространственные частоты: $v_1 = 4 \cdot 10^{-2}, v_2 = 0$;
- интервал временных частот: [20,70] Гц;
- количество временных частот: $N_o = 1000$ с равным шагом разбиения интервала временных частот.

Шаг третий — уточнение c_{55} (см. рис. 7, д). Для функционала невязки (6) были выбраны те же параметры, что и во втором шаге.

Шаг четвертый — уточнение c_{13} и c_{11} (см. рис. 7, е, ж). Для функционала невязки (6) были выбраны те же параметры, что и во втором шаге.

При использовании зашумленных данных обратной задачи дальнейшие шаги уточнения не приводят к существенному улучшению результата восстановления, поэтому можно ограничиться данными четырьмя шагами.

Этап третий — восстановление c_{44} , c_{23} и c_{22} , подобен этапу второму и также разделен на соответствующие шаги. Отличие в том, что теперь $v_2 \neq 0$, а $v_1 = 0$.

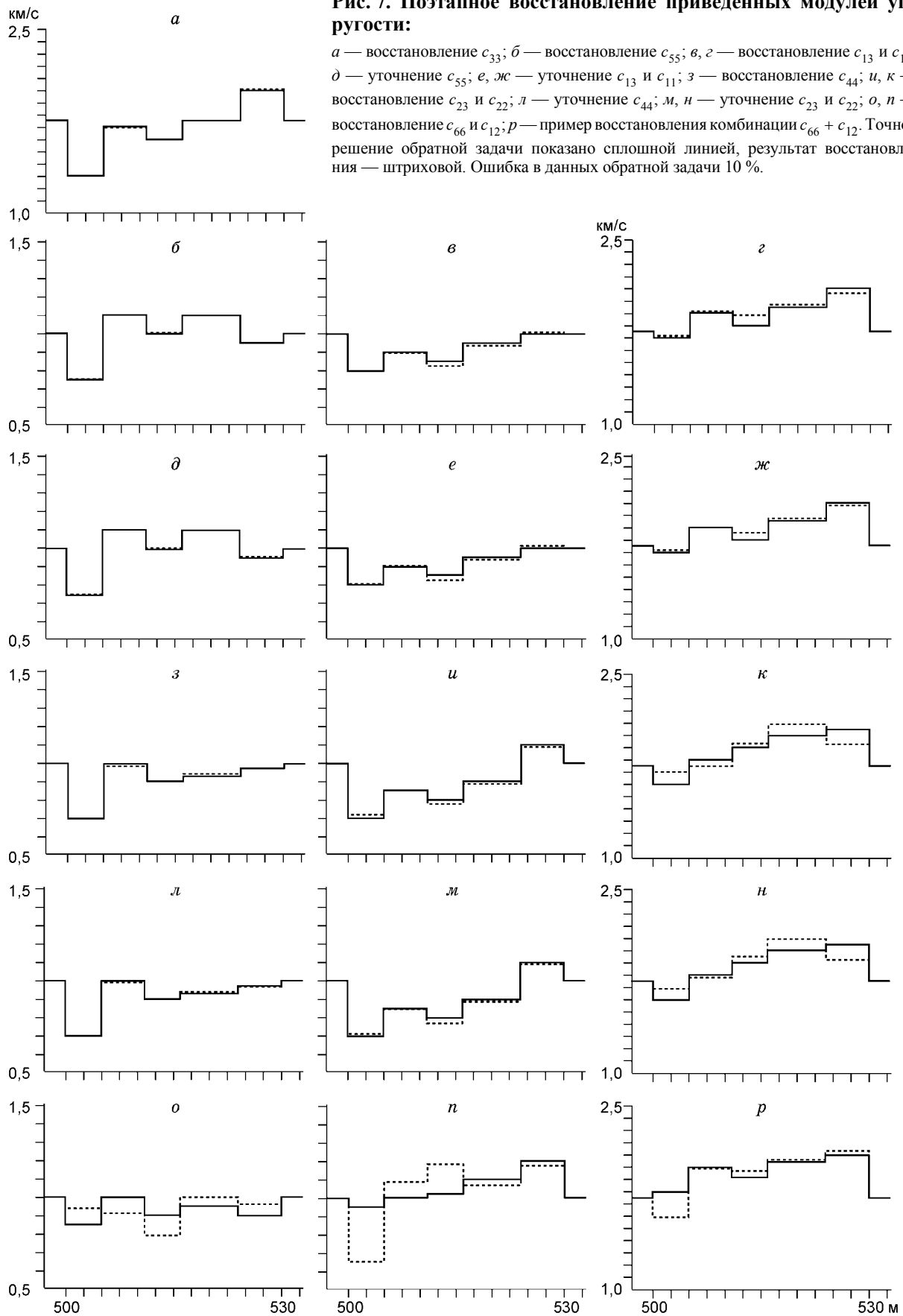
Этап четвертый — восстановление c_{66} и c_{12} (см. рис. 7, о, п). Для функционала невязки (6) были выбраны следующие параметры:

- количество пространственных частот: $N_{v_1} = 1, N_{v_2} = 2$;
- пространственные частоты: $v_1 = 4 \cdot 10^{-2}, v_2 = 4 \cdot 10^{-2}$;
- интервал временных частот: [27,70] Гц;
- количество временных частот: $N_o = 1000$ с равным шагом разбиения интервала временных частот.

Опыт восстановления параметров среды подтверждает результаты, изложенные п. 3.3: для системы (1) наиболее точно восстанавливаются элементы матрицы A (в данном случае параметры c_{33} , c_{44} и c_{55}), менее точно — элементы матриц \hat{B} и \check{B} (в данном случае — c_{13} , c_{23}), и еще менее точно восстанавливаются элементы матрицы D (в данном случае параметры c_{11} , c_{22} , c_{12} , c_{66}). Функции c_{66} и c_{12} восстанавливаются с большей ошибкой, чем функции c_{11} и c_{22} , несмотря на то что функционал невязки при вариациях c_{11} , c_{22} и c_{66} получает соизмеримые между собой приращения.

Различие в точности восстановления, например, c_{11} и c_{66} можно объяснить тем, что при восстановлении функции c_{11} на точность результата влияют ошибка в данных обратной задачи и ошибки восстановления функций c_{33} , c_{55} и c_{13} . При восстановлении функции c_{66} на точность влияют ошибка в данных обратной задачи и ошибки восстановления функций c_{33} , c_{55} , c_{44} , c_{13} и c_{23} .

Рисунок 8 иллюстрирует восстановление параметров среды при 20—30 %-й ошибке в данных обратной задачи. Для восстановления были использованы те же параметры построения функционала невязки, что и при описанном выше поэтапном восстановлении.



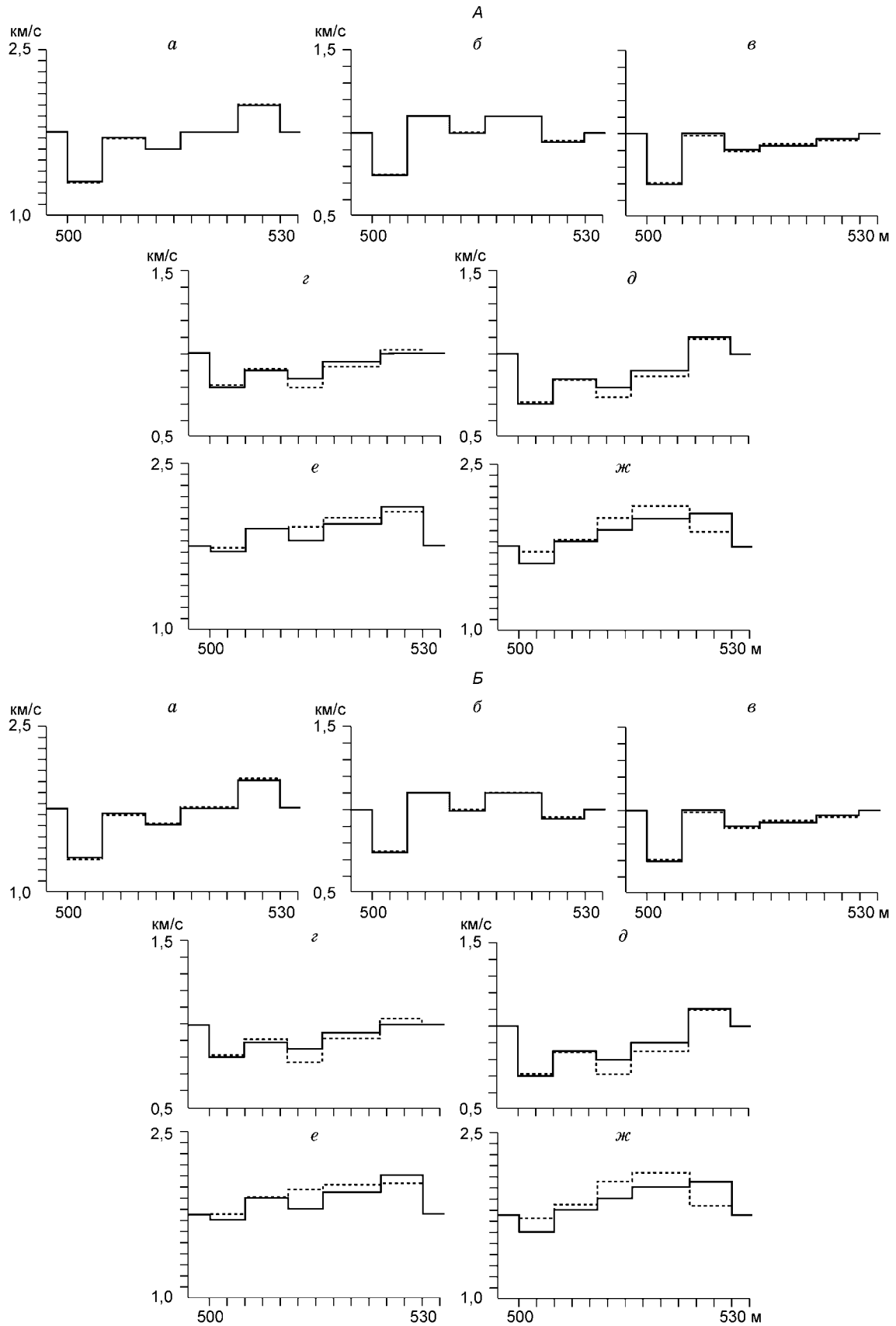


Рис. 8. Результат восстановления приведенных модулей упругости:

$a - c_{33}$, $б - c_{55}$, $в - c_{44}$, $г - c_{13}$, $д - c_{23}$, $е - c_{11}$, $ж - c_{22}$. Точное решение обратной задачи показано сплошной линией, результат восстановления — штриховой. Ошибка в данных обратной задачи 20 % (А), 30 % (Б).

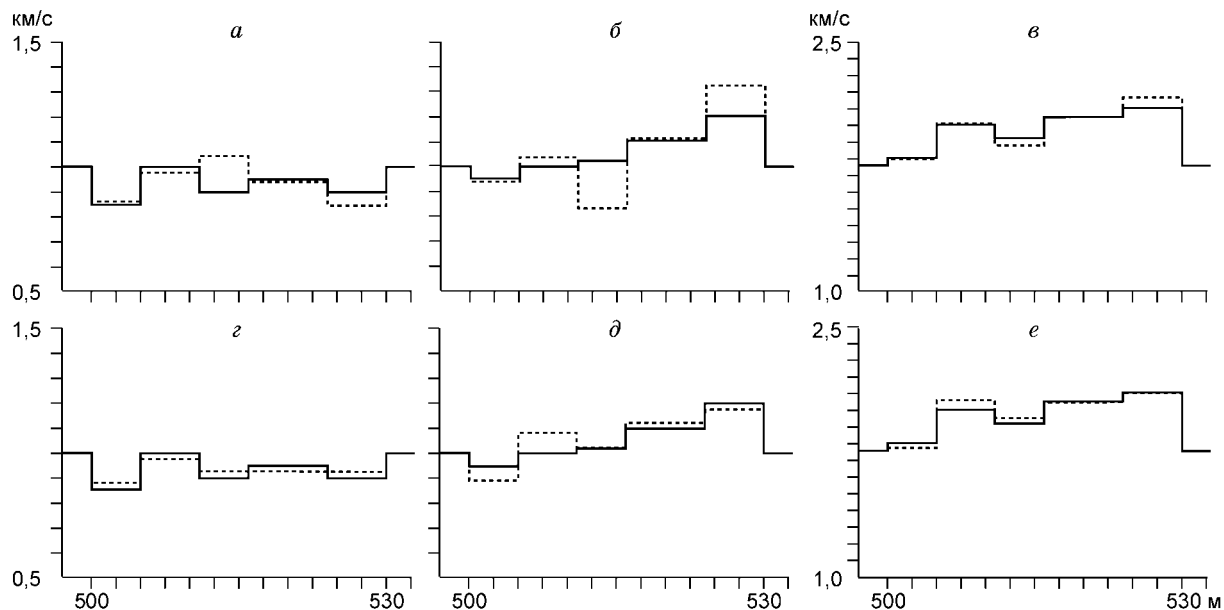


Рис. 9. Результат восстановления приведенных модулей упругости:

$a, г — c_{66}$, $б, д — c_{12}$, $в, е — c_{66} + c_{12}$. Значения пространственных частот $v_1 = v_2$: $a—в — 5,72 \cdot 10^{-2}$, $г—е — 7,2 \cdot 10^{-2}$. Точное решение обратной задачи показано сплошной линией, результат восстановления — штриховой. Ошибка в данных обратной задачи 10 %.

Приведенные модули упругости c_{12} и c_{66} восстановить с удовлетворительной точностью не удалось, так как вклад в функционал невязки от их вариаций перестал быть заметен на фоне ошибок, присутствующих в дополнительной информации.

На рис. 7, $о, п$ показано, что восстановление функций c_{66} и c_{12} нельзя считать удовлетворительным. Более точно восстанавливается комбинация $c_{66} + c_{12}$ (см. рис. 7, $р$).

Улучшить результат восстановления c_{66} и c_{12} можно, увеличивая значение пространственных частот. На рис. 9 приведены результаты восстановления данных приведенных модулей упругости, когда $v_1 = v_2 = 5,72 \cdot 10^{-2}$ (см. рис. 9, $a—в$) и $v_1 = v_2 = 7,2 \cdot 10^{-2}$ (см. рис. 9, $г—е$), что соответствует расстоянию между сейсмоприемниками 8,5 и 7 м соответственно. Однако приведенные значения пространственных частот выходят за пределы „нижней трапеции“ (см. рис. 4), что говорит о том, что на практике функции c_{66} и c_{12} не будут восстановлены.

ВЫВОДЫ

В работе исследовались математические свойства обратной динамической задачи сейсмологии для горизонтально-слоистой однородной анизотропной среды. Анизотропия предполагалась орторомбической.

Установлена степень влияния на функционал невязки вариаций упругих параметров среды: лучше всего могут быть определены элементы матрицы A , меньшее влияние на функционал невязки оказывают вариации элементов матриц \hat{B} и \check{B} , и наименьшее — вариации элементов матрицы D . Данный вывод имеет место для тех множеств пространственных и временных частот, которые имеют место на практике. Установленная иерархия позволяет сделать прогноз, какие упругие параметры среды будут восстановлены более точно, а какие менее точно в зависимости от степени зашумленности данных обратной задачи. Показано, что улучшить точность восстановления элементов матриц \hat{B} , \check{B} и D можно за счет увеличения значений пространственных частот v_1 и v_2 .

Показано, что для орторомбической среды различный выбор параметров обратной задачи позволяет расщепить ее по определению девяти приведенных модулей упругости на серию обратных задач по определению меньшего количества неизвестных функций. Свойство овражности функционала невязки позволило провести дополнительное расщепление полученных обратных задач.

Минимизационная стратегия, разработанная для функционала невязки в случае изотропной среды [35, 36], является пригодной и для анизотропной.

Численный эксперимент показал, какую часть спектра сейсмограммы нужно использовать для построения функционала невязки для численного решения обратной динамической задачи сейсмологии.

Работа поддержана грантом РФФИ (05-01-00559).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Поперечные и обменные волны** в сейсморазведке / Ред. Н.Н. Пузырев. М., Недра, 1967, 250 с.
2. **Нефедкина Т.Н.** Выделение обменных отраженных *PS*-волн по системе ОГТ с несимметричными выборками // Геология и геофизика, 1980 (3), с. 113—122.
3. **Пузырев Н.Н., Тригубов А.В., Бродов Л.Ю. и др.** Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн. М., Недра, 1985, 277 с.
4. **Многоволновые** сейсмические исследования / Ред. Н.Н. Пузырев. М., Наука, 1987, 213 с.
5. **Пузырев Н.Н.** Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Возбуждение и регистрация волн // Геология и геофизика, 2003, т. 44 (4), с. 277—285.
6. **Пузырев Н.Н.** Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Интерпретация данных и результаты // Геология и геофизика, 2003, т. 44 (5), с. 465—473.
7. **Perez M.A., Grechka V., Michelena R.J.** Fracture detection in a carbonate reservoir using a variety of seismic methods // Geophysics, 1999, v. 64, № 4, p. 1266—1276.
8. **Lynn H.B., Beckham W.E., Simon K.M. et al.** *P*-wave and *S*-wave azimuthal anisotropy at a naturally fractured gas reservoir // Geophysics, 1999, v. 64, № 4, p. 1312—1328.
9. **Urosevic M., Juhlin Ch.** Seismic anisotropy in upper 500 m of the Southern Sydney Basin // Geophysics, 1999, v. 64, № 6, p. 1901—1911.
10. **Amudsen L., Ikella L.T., Berg L.E.** Multidimensional signature deconvolution and free-surface multiple elimination of marine multicomponent ocean-bottom seismic data // Geophysics, 2001, v. 66, № 5, p. 1594—1604.
11. **Grechka V., Tsvankin I.** *PP + PS = SS* // EAGE 63th Conference and Exhibition, Amsterdam, the Netherlands, 11—15 June, 2001: Extended Abstract Book. European Association of Geoscientists and Engineers, 2001, p. 114.
12. **Li X-Y., Dai H., Yuan J.** Converted-wave imaging in inhomogeneous anisotropic media // Ibid., p. 112.
13. **Lou M, Pham D., Lee S.** Anisotropic parameters estimation from *P*- and *PS*-converted wave data // EAGE 64th Conference and Exhibition, Florence, Italy, 27—30 May, 2002: Extended Abstract Book. European Association of Geoscientists and Engineers, 2002, p. 138.
14. **Молотков Л.А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л., Наука, 1984, 201 с.
15. **Аки К., Ричардс П.** Количественная сейсмология. Теория и методы. М., Мир, 1983, т. 1, 520 с; т. 2, 360 с.
16. **Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О. и др.** Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск, Сибирское университетское издательство, 2002, 350 с.
17. **Мартынов В.Н., Михайленко Б.Г.** Расчет полных волновых полей в анизотропных средах // Математическое моделирование в геофизике, 1. Новосибирск, 1993, с. 3—26. (Тр. ВЦ СО РАН).
18. **Martynov V.N., Mikhailenko B.G.** Numerical modeling of propagation of elastic waves in anisotropic inhomogeneous media for the half-space and sphere // Geophysics J. Roy. Astron. Soc., 1984, v. 76, p. 53—63.
19. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. М., Наука, 1973, 342 с.
20. **Бреховских Л.М., Годин О.А.** Акустика слоистых сред. М., Наука, 1989, 416 с.
21. **Петрашень Г.И.** Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л., Наука, 1980, 280 с.
22. **Петрашень Г.И., Каштан Б.М., Ковтун А.А.** Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах. Л., Наука, 1984, 282 с.
23. **Петрашень Г.И.** Распространение упругих волн в слоистых изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями // Ученые записки ЛГУ, Вып. Математические науки, 1952, № 162, вып. 26.
24. **Петрашень Г.И.** О рациональном методе решения для задачи динамической теории упругости // Ученые записки ЛГУ, 1956, № 208, с. 5—57.
25. **Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.** Волны в слоистых однородных изотропных средах. Л., Наука, 1982, 288 с.
26. **Петрашень Г.И., Каштан Б.М., Ковтун А.А., Мухина И.В.** Метод контурных интегралов в случае трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, нормальной границам раздела // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Вып. 24. Л., Наука, 1984, с. 4—91.

27. Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Численные методы в геофизике. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979, с. 3—12.
28. Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, т. 24, № 2, с. 272—286.
29. Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г. Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР, 1988, т. 301, № 4, с. 834—839.
30. Фатьянов А.Г. Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии. Новосибирск, 1989, 43 с. (Препр. / ВЦ СО АН СССР, № 857).
31. Фатьянов А.Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР, 1990, т. 310, № 2, с. 323—327.
32. Карчевский А.Л. Метод численного решения системы упругости для горизонтально-слоистой анизотропной среды // Геология и геофизика, 2005, т. 46 (3), с. 339—351.
33. Карчевский А.Л. Прямая динамическая задача сейсмоки для горизонтально-слоистых сред // Сибирские электронные математические известия, 2005, т. 2, с. 23—61 (<http://semr.math.nsc.ru/V2/v2p23-61.pdf>)
34. Гольдин С.В., Киселева Л.Г., Пашков В.Г., Черняк В.С. Двумерная кинематическая интерпретация сейсмограмм в слоистых средах. Новосибирск, Наука, 1993, 208 с.
35. Karchevsky A.L. Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem // J. Inverse Ill-Posed Problems, 2002, v. 10, № 4, p. 361—384.
36. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media // Inverse Problems, 2004, v. 20, № 3, p. 953—976.
37. Karchevsky A.L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // J. Inverse Ill-Posed Problems, 2004, v. 12, № 5, p. 519—634.
38. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., Наука, 1969, 576 с.
39. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1988, 550 с.
40. Karchevsky A.L. Numerical solution of the inverse problem for the system of elasticity for vertically inhomogeneous medium // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center, series Mathematical Modeling in Geophysics, 1999, № 5, p. 63—69.
41. Карчевский А.Л. Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости // Докл. РАН, 2000, т. 375, № 2, с. 235—238.
42. Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г. Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сибирский журнал вычислительной математики, 2001, т. 4, № 3, с. 259—269.

*Рекомендована к печати 20 июля 2005 г.
С.В. Гольдиным*

*Поступила в редакцию
17 марта 2005 г.*