

КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ
С НЕВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин

(Новосибирск)

Рассматривается обобщение модели идеальнопластического тела на случай сыпучей среды с неортогональными линиями скольжения. Показано, что в рамках принятых гипотез некоторые свойства модели идеальной пластичности (совпадение характеристики поля скоростей и напряжений, независимость поля скоростей от возможного различия в сдвигах на площадках скольжения) основными для модели не являются и обобщаться не должны.

Строится замкнутая система уравнений, рассматриваются свойства разрывных решений и постановка краевых задач. Показано, что в задаче об устойчивости откоса линий потери устойчивости является дуга окружности (круглоцилиндрическая поверхность).

1. Рассмотрим плоскую деформацию сыпучей среды в предельном состоянии

$$(1.1) \quad \tau = \sin \varphi \sigma + k$$

где σ , τ — инварианты тензора напряжений, φ , k — постоянные материалы. На площадке α (α — угол между площадкой и наибольшим сжимающим напряжением σ_1) касательное и нормальное напряжения τ_α , σ_α связаны равенством

$$(1.2) \quad \tau_\alpha = c_1(\alpha) \sigma_\alpha + c_2(\alpha)$$

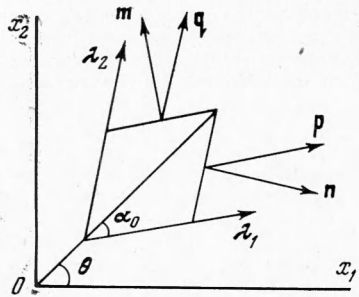
$$c_1 = \frac{\sin \varphi \sin 2\alpha}{1 - \sin \varphi \cos 2\alpha}, \quad c_2 = \frac{k \sin 2\alpha}{1 - \sin \varphi \cos 2\alpha}$$

Структура (1.2) отражает закон трения между частицами сыпучей среды: если τ_α , σ_α удовлетворяют (1.2) при некоторых критических коэффициентах $\pm c_1^\circ$, $\pm c_2^\circ$, то между частицами сыпучей среды возможно относительное скольжение, если $c_1(\alpha)$, $c_2(\alpha)$ не равно критическим, то контакты между частицами находятся в допредельном состоянии и на площадке сохраняется устойчивость деформирования. Пусть $c_1(\alpha) = c_1^\circ$, $c_2(\alpha) = c_2^\circ$ при $\alpha = \alpha_0 > 0$, где α_0 — известная постоянная величина. Величина угла α_0 может зависеть как от свойств материала, так и от условий его нагружения в допредельном состоянии [1,2].

Таким образом, в предельном состоянии (1.1) механизм деформирования среды анизотропный: на площадках, касательных к линиям $x_2'(x_1) = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$, между частицами среды возможны неограниченные относительные смещения, на всех остальных площадках смещения между частицами малы [3] (θ — угол наклона σ_1 у оси Ox_1 , Ox_1x_2 — декартова система координат). Подобный механизм деформирования можно интерпретировать следующим образом: в предельном состоянии среда разделяется линиями $x_2' = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$ на отдельные правильные элементы и ее дальнейшее деформирование происходит вследствие вращения, сжатия и скольжения элементов друг по другу. Для построения замкнутой системы уравнений, описывающей деформирование среды, необходимо сформулировать

требования, которым должна удовлетворять эта система. Согласно [4] необходимым в данном случае является только одно требование: система должна в инвариантной форме описывать процессы, которые происходят на площадках $x_2' = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$. Возможные дополнительные условия, в том числе и условие совпадения характеристик поля скоростей и напряжений, необходимыми не являются.

Кинематика деформирования среды зависит от закона трения между ее элементами. Возможны два принципиально различных режима трения: вязкий и нормальный [3], или невязкий. При вязком режиме трения скорость сдвига между элементами зависит как от нелокальных факторов — поведения окрестных элементов и граничных условий, так и от локальных факторов — напряжений, действующих на площадке скольжения. При невязком режиме трения от напряжений зависит только момент наступления скольжения. В дальнейшем скорость от напряжений не зависит и может быть ограничена только нелокальными факторами. В упрочняющихся пластических телах реализуется первый режим трения, в идеально-пластических — второй. В дальнейшем ограничимся моделью сыпучей среды с невязким трением. Распределение ω , θ будем предполагать фиксированным и известным из решения краевой задачи для напряжений [5].



Фиг. 1

2. Пусть $v_1(x_1x_2)$, $v_2(x_1x_2)$ поле скоростей в декартовой системе координат. Обозначим через ∂ приращения скоростей и координат при переходе от элемента к элементу, а через δ — приращения внутри одного и того же элемента. Скорости сдвигов на площадках AB , BC (фиг. 1) можно характеризовать инвариантными величинами

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{qp} &= \frac{\partial v_p}{\partial q} + \omega \sin 2\alpha_0 = \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\cos 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \\ &- \frac{\sin 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \omega \sin 2\alpha_0 \\ \delta_{pq} &= \frac{2v_q}{\partial p} - \omega \sin 2\alpha_0 = \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\cos 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \omega \sin 2\alpha_0 \end{aligned}$$

где $\omega = 1/2 (\delta v_2 / \delta x_1 - \delta v_1 / \delta x_2)$. Так как скольжение по неортогональным площадкам AB , BC не вызывает изменения объема, то, следовательно, с изменением должна быть связана сумма $\partial v_n / \partial p + \partial v_m / \partial q$. Последняя преобразуется к виду

$$(2.2) \quad \frac{\partial v_n}{\partial p} + \frac{\partial v_m}{\partial q} = \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)$$

Если предположить непрерывность компонент скорости v_n , v_m и их производных, то можно получить оценку

$$(2.3) \quad \frac{\partial v_n}{\partial p} + \frac{\partial v_m}{\partial q} = \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\delta v_1}{\delta x_1} + \frac{\delta v_2}{\delta x_2} \right) + o(l)_n$$

где l — расстояние между линиями скольжения. Для равенств (2.1) подобные оценки невозможны, так как разрывность на сторонах элементов касательных скоростей и возможная независимость скоростей сдвигов γ_{qp} , γ_{pq} связана с существом деформирования среды. Поэтому при $l \rightarrow 0$ ω необходимо оставить в качестве независимой функции. Приращения ∂ в этом случае можно рассматривать как дифференциалы, что позволяет описывать поведение несплошной среды при малых расстояниях между линиями несплошности методами механики сплошной среды.

Пусть (λ_1, λ_2) — натуральные параметры линий скольжения $x_2' = \text{tg}(\theta \pm \alpha_0)$, а w_1, w_2 — проекции скорости на орты к сторонам элемента. Так как трение среды предполагается невязким, то скорость элемента (λ_1, λ_2) может быть ограничена только скоростями элементов $(\lambda_1 \pm d\lambda_1, \lambda_2 \pm d\lambda_2)$. Из условия непрерывности v_n, v_m и условия возможного скольжения по сторонам элемента следует, что вдоль линии λ_1 может передаваться информация только о нормальной к стороне элемента скорости w_1

$$(2.4) \quad \bar{v}(\lambda_1 + d\lambda_1) \cdot \bar{n}(\lambda_1) = w_1(\lambda_1) - \omega(\lambda_1) \cos 2\alpha_0 - \varepsilon_1(\lambda_1) \\ \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - \frac{w_2 + \cos 2\alpha_0 w_1}{\sin 2\alpha_0} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} + w \cos 2\alpha_0 + \varepsilon_1 = 0$$

где ε_1 — скорость сжатия элемента вдоль линии λ_1 . Аналогично вдоль λ_2

$$(2.5) \quad \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + \frac{w_1 + \cos 2\alpha_0 w_2}{\sin 2\alpha_0} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} - \omega \cos 2\alpha_0 + \varepsilon_2 = 0$$

Из уравнений (2.4), (2.5) следует, что в общем случае поле скоростей зависит от поля ω , которое отражает возможное различие в функционировании площадок скольжения. Исключением является идеальнопластическая (идеальносвязная [5]) среда, для которой $\alpha_0 = \pi/4$ и уравнения (2.4), (2.5) замкнуты независимо от уравнения для ω . Можно показать, что условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций в идеальной пластичности эквивалентно условию симметрии сжимаемости: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Если при этом $\varepsilon \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \equiv 0$, то уравнения (2.4), (2.5) превращаются в уравнения для несжимаемой идеальнопластической среды [6].

Пусть величина ε известна как функция гидростатического давления, а величина $\Delta = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ либо известна из дополнительных соображений, либо равна единице. Соотношение (2.5) отражает факт возможного скольжения по линиям $x_2' = \text{tg}(\theta \pm \alpha_0)$. Однако линия $x_2' = \text{tg}(\theta + \alpha_0)$ будет характеристикой системы для $\omega_1, \omega_2, \omega$ только в том случае, если в уравнение для ω не войдут производные вдоль λ_1 . В противном случае слабые разрывы скорости будут распространяться по линии, отличной от линии скольжения. Из (2.5) следует, что «локально» линия слабого разрыва состоит из отрезков $x_2' = \text{tg}(\theta + \alpha_0)$, но за счет вращения элементов направление распространения слабых разрывов может отклониться от линии скольжения. Идеальнопластический материал в этом отношении является исключением. При $\alpha_0 = \pi/4$ $\omega \cos 2\alpha_0 \equiv 0$ и перенос линии скольжения за счет вращения происходит вдоль самой линии скольжения. Поэтому характеристики поля скоростей идеальнопластического материала совпадают с линиями скольжения (если их определить, как в п. 1) и характеристиками поля напряжений.

Рассмотрим уравнения для замыкания системы (2.4), (2.5). Если история нагружения материала в допредельном и граничные условия в предельном состояниях не выделяют ни одну из систем линий скольжения, то можно предположить что средние по некоторому промежутку времени скорости сдвигов γ_{qp}, γ_{pq} равны между собой. В этом случае $\omega =$

$= 1/2(\partial v_2 / \partial x_1 - \partial v_1 / \partial x_2)$ и характеристики поля скоростей совпадают с линиями наибольших касательных напряжений $x_2' = \operatorname{tg}(\theta \pm \pi/4)$. Если при этом $\Delta = 1$, то тензоры напряжений и скоростей деформаций будут соосными.

Рассмотрим другой крайний случай, когда скольжение происходит по одной из линий λ_1, λ_2 , например по линии λ_1 . В этом случае $\gamma_{pq} \equiv 0$ и полная система уравнений имеет вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ & + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + 2\omega \cos 2\alpha_0 + 2\varepsilon_1 = 0 \\ & - \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ & + \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - 2\omega \cos 2\alpha_0 + 2\varepsilon_2 = 0 \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \\ & + \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - 2\omega \sin 2\alpha_0 = 0 \end{aligned}$$

Система (2.6), (2.7) гиперболического типа. Если μ_1, μ_2 — натуральные параметры характеристик $x_0' = \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$, $x_2' = -\operatorname{ctg}(\theta - \alpha_0)$ системы, u_1, u_2 — проекции скорости на характеристики, а f_1, f_2 — проекции скорости на линию скольжения λ_2 и ортогональную к ней траекторию, то систему (2.6), (2.7) можно преобразовать к виду

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \mu_1} - u_2 \frac{\partial \theta}{\partial \mu_1} &= -\varepsilon_1 \sin 2\alpha_0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mu_2} + u_1 \frac{\partial \theta}{\partial \mu_2} &= -\frac{\varepsilon_1 \cos^2 2\alpha_0 + \varepsilon_2}{\sin 2\alpha_0} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \mu_1} - f_2 \frac{\partial \theta}{\partial \mu_1} &= \omega \sin 2\alpha_0 \end{aligned}$$

Постановка краевых задач определяется типом системы (2.6), (2.7). Если вдоль границы $x_2 = x_2(x_1)$, $\nu = \operatorname{arctg} x_2'$ задаются обе компоненты скорости, то задача будет корректной при условии, что граница не имеет характеристических направлений μ_1, μ_2 . Вдоль характеристик граничные условия должны удовлетворять первым двум соотношениям (2.8). Пусть на границе задана величина ω . Дополнительно к этому условию на границе можно задать только некоторую комбинацию частных производных от скорости, например P_β

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} x_2' \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} x_2' \right) \sin \beta = \frac{1}{\cos \nu} P_\beta$$

Корректность такой задачи зависит не только от уравнений (2.6), (2.7), но и от вида граничного условия на скорость: задача будет корректной, если

$$x_2' \neq \frac{\cos(\theta + \alpha_0 - \beta)}{\cos(\theta - \alpha_0 - \beta)} \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$$

при $x_2' = \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$ граничные условия связаны соотношением

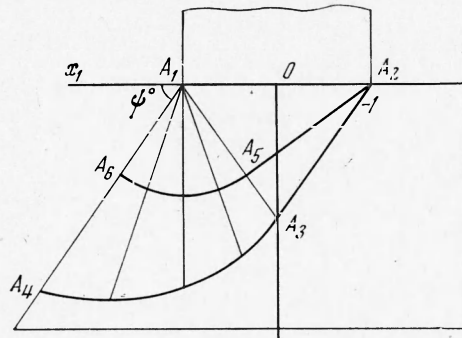
$$\omega \sin(\theta - \alpha_0 - \beta) + \varepsilon_1 \sin(\theta + \alpha_0 - \beta) = -P_\beta$$

Если $\beta = \theta - \alpha_0 + \pi / 2$, то при любом положении границы должно выполняться равенство

$$\omega \cos (\theta - \alpha_0 - \nu) \sin 2\alpha_0 + \varepsilon_1 \cos 2\alpha_0 \sin (\theta + \alpha_0 - \nu) + \varepsilon_2 \sin (\theta - \alpha_0 - \nu) = \sin 2\alpha_0 P_\beta$$

Таким образом, для системы (2.6), (2.7) корректными будут задачи Коши, Гурса, различные смешанные задачи и т. д.

Так как скорости входят в систему (2.6), (2.7) дифференциально, а ω алгебраически, то при анализе разрывных решений необходимо рассматривать совместно слабые разрывы скоростей и сильный разрыв ω . Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ непрерывны. Слабые разрывы скоростей возможны только на характеристиках $x_2' = \operatorname{tg} (\theta - \alpha_0), x_2' = -\operatorname{ctg} (\theta - \alpha_0)$. Роли характеристик при этом будут различными: на линии скольжения слабый разрыв скорости реализуется при сохранении непрерывности величины ω , на линии, ортогональной к линии скольжения, слабый разрыв скорости влечет за собой сильный разрыв ω . Аналогичные выводы справедливы и для сильных разрывов скоростей и интеграла от бесконечного разрыва ω . Если на некоторой кривой напряжения разрывны, то скорости будут также разрывными. Разрывы удовлетворяют (2.6), (2.7) в смысле обобщенных решений [7].



Фиг. 2

Случай скольжения по λ_2 сводится к предыдущему заменой α_0 на $-\alpha_0$.

3. Рассмотрим в качестве иллюстрации задачу об устойчивости откоса, нагруженного гладким штампом A_1A_2 (фиг. 2). Пусть на A_1A_2, A_1A_4 приложены нагрузки так, что $\sigma = \sigma^0 = \text{const}$ на $A_1A_2, \sigma = \sigma^0 \exp 2\operatorname{tg} \varphi \times (\psi^0 - \alpha_0 - \pi / 2)$ на A_1A_4 , где $\alpha_0 = \pi / 4 - \varphi / 2, \alpha_0 < \psi^0 < \pi / 2$. В этом случае в области $A_1A_2A_3A_4$ можно построить непрерывное поле напряжений [5]: $\sigma \equiv \sigma^0, \theta \equiv \pi / 2$ в $A_1A_2A_3, \sigma = \sigma^0 \exp 2\operatorname{tg} \varphi (\psi - \alpha_0 - \pi / 2), \theta = \psi - \alpha_0$ в области $A_1A_3A_4$, где (r, ψ) — полярная система координат. Предположим, что в результате потери устойчивости штамп опрокидывается с некоторой угловой скоростью $\Omega > 0: v_2 = \Omega (1 - x_1), x_2 = 0, |x_1| \leq 1$. Предположим также, что в области $A_1A_2A_3A_4$ к скольжению подготовлены только площадки семейства $x_2' = \operatorname{tg} (\theta + \alpha_0)$ и на границе $A_2A_3A_4$ выполняются условия прилипания. Так как линия $A_2A_3A_4$ не является характеристикой поля скоростей, то из условий на $A_2A_3A_4$ следует, что область $A_2A_3A_4A_6A_5$ будет оставаться неподвижной. На линии $A_2A_5A_6$ выполняется условие непрерывности нормальной скорости. Решение в области $A_1A_2A_5, A_1A_5A_6$ имеет вид ($\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \equiv 0$)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_1 &= \Omega \operatorname{ctg} \alpha_0 (1 - x_1 + \operatorname{ctg} \alpha_0 x_2) \\ v_2 &= \Omega (1 - x_1 + \operatorname{ctg} \alpha_0 x_2) \\ v_r &\equiv 0 \\ v_\psi &\equiv \frac{\Omega}{\sin^2 \alpha_0} r \end{aligned}$$

Из (3.1) следует, что сильный разрыв касательной скорости может реализоваться только на круглоцилиндрической поверхности A_5A_6 и плоскости A_2A_5 .

4. При замыкании уравнений (2.4), (2.6) предполагалось, что скольжение реализуется вдоль семейства линий λ_1 . Можно рассматривать случай попеременного скольжения по обоим возможным семействам λ_1, λ_2 . В этом случае скорости v_1, v_2 и ω разделяются на две компоненты, каждая из которых удовлетворяет уравнениям вида (2.6), (2.7). При этом разделение на компоненты граничных условий может быть неоднозначным. Неоднозначность устраняется из дополнительных данных при решении конкретных задач: может оказаться, что при некоторых граничных условиях решение существует только при вполне определенном их разбиении на компоненты; при отыскании граничных условий, обеспечивающих тривиальное распределение скоростей, достаточно рассмотреть всевозможные варианты реализации скольжения и т. д.

Система (2.6), (2.7) не изменится, если предположить, что среда дилатирует по некоторому заранее заданному закону. В этом случае $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ будут зависеть от соответствующих сдвигов.

5. Рассмотрим одну интерпретацию уравнений (2.6). Можно показать, что вклад, вносимый стороной AB (фиг. 1) в изменение объема элемента, характеризуется инвариантной величиной

$$(5.1) \quad \frac{\partial v_m}{\partial q} - \omega \cos 2\alpha_0 = -\frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \\ + \frac{\sin 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\cos 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \omega \cos 2\alpha_0$$

Аналогично для стороны BC

$$(5.2) \quad \frac{\partial v_n}{\partial p} + \omega \cos 2\alpha_0 = \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \\ + \frac{\sin 2\alpha_0}{2} (\partial v_1 / \partial x_1 + \partial v_2 / \partial x_2) - \cos 2\alpha_0 / 2 (\partial v_2 / \partial x_1 - \\ - \partial v_1 / \partial x_2) + \omega \cos 2\alpha_0$$

Приравнивая $-\varepsilon_2, -\varepsilon_1$ правым частям (5.1), (5.2), получим уравнения (2.6). В такой интерпретации уравнения (2.6) допускают обобщение на случай осесимметрического полного предельного состояния [8].

Подробная библиография для различных вариантов моделей, основанных на механизме скольжения по предельным линиям, содержится в обзоре [9].

Поступила 15 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Roscoe K. H. The influence of strains in soil mechanics. Geotechnique, 1970, vol. 20, No. 2. (Рус. перев.: Значение деформаций в механике грунтов. Механика, период. сб. перев. иностр. статей, 1971, № 3.)
2. Ревуженко А. Ф. Предельное равновесие сыпучей среды с нарушенной структурой. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1974, № 2.
3. Костецкий Б. И. Трение, смазка и износ в машинах. Киев, «Техніка», 1970.
4. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Об эффекте поперечных деформаций в механике сплошной среды. ПМТФ, 1974, № 1.
5. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М., Физматгиз, 1960.
6. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
8. Березанцев В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. М., Гостехиздат, 1952.
9. Николаевский В. Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности. Механика твердых деформированных тел (Итоги науки и техники), т. 6, М., ВИНТИ, 1972.