

ФИЗИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КУМУЛЯЦИИ

C. A. Кинеловский, Ю. А. Тришин

(Новосибирск)

Кумулятивные струи образуются либо при косом соударении пластин, ускоренных взрывом, либо при взрывном обжатии тонкой конической оболочки, которая деформируется таким образом, что из нее как бы «выжимается» тонкая высокоскоростная струя, способная внедряться в металлические преграды. Гидродинамическая теория формирования кумулятивных струй и их действия по преграде, предложенная М. А. Лаврентьевым [1] (и независимо в [2]), основана на модели идеальной несжимаемой жидкости. Принципиально важным шагом автора гидродинамической теории кумуляции явилось применение теории струй к кумулятивным зарядам.

Гидродинамическая теория впервые объяснила кумулятивный эффект зарядов ВВ с выемками, облицованными тонким слоем металла, дала расчетные соотношения между параметрами кумулятивной струи, формой и размерами облицовки заряда ВВ, объяснила явление пробивания преград кумулятивными зарядами, указала пути получения очень больших скоростей и давлений, в ее недрах таилось явление сварки взрывом.

В данной работе дается обзор и анализ некоторых результатов, связанных с явлением кумуляции, часть из которых носит оригинальный характер. Обзор не претендует на полноту изложения всех известных результатов. Круг рассмотренных вопросов в основном определяется интересами авторов.

1. Основные результаты гидродинамической теории

Следуя [1], рассмотрим картину симметричного встречного соударения двух плоских или осесимметричных струй идеальной несжимаемой жидкости, движущихся вдоль оси симметрии x (рис. 1). Пусть струя, движущаяся в сторону отрицательного направления оси x , имеет на бесконечности скорость V_1 , плотность ρ_1 , толщину $2r_1$, а встречная струя — V_2 , ρ_2 , $2r_2$. Течение имеет свободные поверхности L_1 и L_2 и поверхность раздела γ сред с различными плотностями. Для того чтобы картина течения соударяющихся струй была установившейся относительно системы координат xOy , необходимо, чтобы скорости струй на $\pm\infty$ удовлетворяли соотношению $V_2 = \lambda V_1$, где $\lambda = \sqrt{\rho_1/\rho_2}$.

Картина бронепробивания реализуется, если рассмотреть схему соударения на рис. 1 в системе координат, в которой левая (толстая) струя поконится и играет роль пробиваемой преграды. Тогда правая струя — собственно кумулятивная — имеет скорость $V_c = V_1 + V_2$, а скорость места соударения струй (скорость точки O), представляющая скорость проникания V_0 струи в преграду,

$$V_0 = V_2 = \lambda/(1 + \lambda) V_c. \quad (1)$$

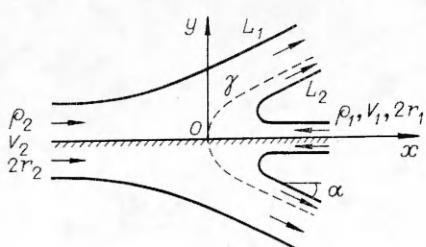


Рис. 1. Стационарная картина встречного соударения струй.

Как видно, скорость проникания всегда меньше скорости струи. Иначе говоря, в процессе пробивания кумулятивная струя расходуется. Соотношение между глубиной пробития h и длиной струи l есть

$$h = \lambda l.$$

Теория формирования струи получается из рассмотрения схемы соударения двух струй на рис. 1, если положить $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ($V_1 = V_2 = V$), поменять у всех скоростей знаки на противоположные и рассматривать процесс в системе координат, в которой вектор скорости U (называемой скоростью метания или обжатия) материала кумулятивной оболочки направлен, например, перпендикулярно ее поверхности на достаточном удалении от точки соударения. Такая система координат должна двигаться на рис. 1 справа налево вдоль оси x со скоростью $V/\cos \alpha$, где 2α — угол соударения пластин или угол раствора конической пелены. В этой лабораторной системе координат легко получаются формулы, описывающие струеобразование. Скорость кумулятивной струи

$$V_c = U/\sin \alpha + U/\tan \alpha = U \operatorname{ctg}(\alpha/2), \quad (2)$$

а скорость толстой левой струи, называемой «пестом»,

$$V_p = U/\sin \alpha - U/\tan \alpha = U \operatorname{tg}(\alpha/2). \quad (3)$$

Первое слагаемое в (2), называемое обычно скоростью v_k точки контакта, это скорость перемещения системы координат, в которой картина течения стационарна. Второе слагаемое — это скорость струй на бесконечности и на свободных поверхностях L_1 и L_2 в этой системе координат. Заметим, что выбор направления скорости метания U по нормали к поверхности кумулятивной оболочки не принципиален. Для любого другого реализуемого направления вектора скорости U соответственно изменяются величины этих двух скоростей, но скорость кумулятивной струи в лабораторной системе координат всегда будет определяться их суммой.

Как видно из (2), при малых углах α скорость кумулятивной струи может быть очень большой, даже если скорость обжатия не слишком велика. Действительно, при $\alpha \rightarrow 0$

$$V_c \rightarrow 2U/\alpha \rightarrow \infty, \quad (4)$$

но количество поступающего в струю вещества при этом также стремится к нулю.

Гидродинамическая теория, как теория первого приближения для эффекта кумуляции, получила достаточно широкое опытное подтверждение. «Накопилось, однако, и некоторое количество фактов не укладывающихся в теорию и требующих для своего объяснения существенных дополнений к теории» [3].

2. Критерий струеобразования

Гидродинамическая теория кумуляции для любой геометрии соударения всегда предсказывает наличие кумулятивной струи, в то время как эксперименты показывают, что при малых углах соударения кумулятивные струи не образуются. Факт прекращения струеобразования при углах соударения ниже некоторых удалось объяснить сжимаемостью материалов соударящихся пластин [4]. Закон сохранения импульса, согласно которому при косом соударении несжимаемых струй обязательно должна образоваться обратная струя, допускает в случае сжимаемого потока также и течение без струи. Из газодинамики известно, что для потока, ударяющего в стенку под углом α , имеется максимальный угол α_1^* , при превышении которого присоединенный к точке соударения скачок уплотнения существовать не может.

Таким образом, течение без кумулятивных струй возможно лишь в случае, когда в точке соударения находится присоединенный скачок уплотнения. В случае отошедшего скачка всегда образуется кумулятивная струя. На основании этих рассуждений формулируется критерий струеобразования при косом соударении пластин [4, 5]: если в соответ-

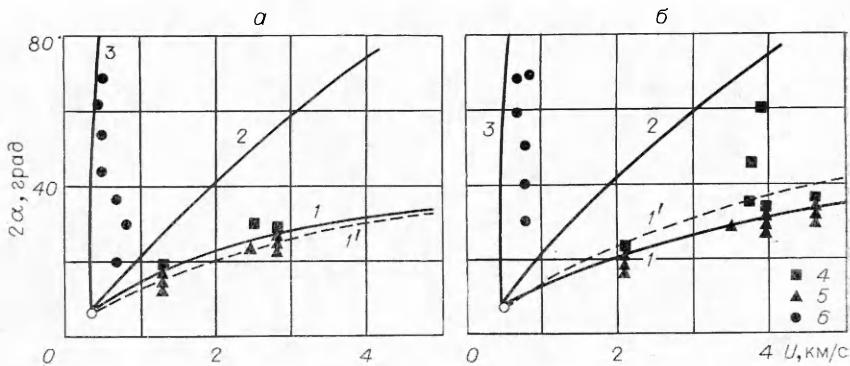


Рис. 2. Критические кривые на плоскости возможных параметров соударения пластин из мягкой стали (а) и алюминия (б).

1, 3 — границы области струеобразования; 2 — раздел области реализации сплошных и диспергированных кумулятивных струй; 4 — струя [4]; 5 — отсутствие струи [4]; 6 — струя [10].

ствующей данному соударению струйной задаче скорость V струй дозвуковая, то обратная струя всегда образуется, а если сверхзвуковая, то кумулятивная струя образуется при $\alpha > \alpha_1^*$ и отсутствует при $\alpha < \alpha_1^*$. Для реальных металлов с известными ударными адиабатами этот критический угол α_1^* струеобразования может быть найден из решения уравнений динамической совместности на фронте косого скачка. Физический смысл этого критерия состоит в том, что при отошедшем вверх по потоку скачке уплотнения со свободных поверхностей натекающих струй за скачком происходит разлет и разворот материала струй в обратную (кумулятивную) струю. При дозвуковой скорости струй образование кумулятивной струи подобно неожиданному случаю, а ее параметры описываются уравнениями, выражающими условия постоянства потоков массы и импульса.

Критическая кривая $\alpha_1^*(U)$ для каждого материала пластин делит плоскость возможных параметров соударения (U , 2α) на две области: ниже кривой находится область соударения без струеобразования, а выше — со струеобразованием. На рис. 2, а, б приведены критические кривые струеобразования (кривые 1') соответственно для железа (мягкой стали) и алюминия, которые вместе с экспериментальными результатами взяты из работы [4]. В экспериментах фиксировался факт наличия или отсутствия струи впереди точки контакта в пространстве между соударящимися пластинами. Отмечено, что для всех исследованных материалов струя появляется тогда, когда угол между пластинами с точностью до 3° достигает расчетного критического значения. Там же высказано предположение, что такое расхождение связано с использованием несовершенных эмпирических выражений для ударных адиабат материалов. Действительно, если воспользоваться современными, более точными выражениями для ударных адиабат металлов, то получаемые критические кривые 1 (см. рис. 2) в точности соответствуют экспериментальным результатам [4].

Критерий струеобразования [4, 5] можно обобщить, если перейти в лабораторную систему координат. Тогда, если фазовая скорость v_k точки соударения элементов кумулятивной оболочки на оси симметрии меньше местной скорости звука в окрестности точки соударения, то возмущения могут уходить вперед по оболочке и соударение происходит с образованием струи [6, 7]. В противном случае струеобразования не происходит. Этот критерий справедлив как для плоского, так и для осесимметричного случаев соударения. Более строгим будет утверждение, что скорость точки контакта должна быть дозвуковой в системе координат,

где «пест» покоится. Тогда условием струеобразования, с учетом соотношения (3), будет

$$v_k - V_n = U/\tan \alpha = v_k \cos \alpha \leq c,$$

что совпадает с результатами работы [5]. Впрочем для углов, не превышающих $20-25^\circ$, это уточнение не столь существенно.

Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования [8, 9] подтвердили справедливость критерия струеобразования, сформулированного в работе [4]. В [9] эти результаты связаны с качественным состоянием кумулятивной струи и сделана попытка распространения ранних результатов по струеобразованию на осесимметричный случай. Все предыдущие результаты никак не касались качества кумулятивных струй: сплошные ли это струи или облако диспергированных частиц, не являлось существенным. Выписанный выше критерий струеобразования [4] касается как тех, так и других струй, причем практически во всех экспериментах [4] струи представляли собой поток частиц материала соударяющихся пластин.

В работе [9] экспериментально и численными расчетами установлено, что а) когда скорость течения V (см. рис. 1 с обращенными скоростями) звуковая, то имеются сплошные связные струи; б) когда V приблизительно звуковая, то наблюдается небольшое радиальное рассеяние струи; в) когда V сверхзвуковая и $\alpha > \alpha_1^*$, то струя представляет собой радиально расширяющийся поток мелких частиц; г) когда V сверхзвуковая и $\alpha < \alpha_1^*$, то струи нет. Сюда следует добавить, что для случая в) плотность облака частиц тем меньше, чем ближе угол α к α_1^* . На основании выводов работы [9] можно выписать условие реализации сплошной монолитной кумулятивной струи. В плоском случае в предположении, что скорость соударяющихся пластин направлена по нормали к ним, критический угол α_2^* определяется выражением:

$$\alpha_2^* = \arctan(U/c_0), \quad (5)$$

где c_0 — начальная скорость звука в материале пластин. Таким образом, на плоскости $(U, 2\alpha)$ имеется еще одна критическая кривая 2 (см. рис. 2), которая делит уже определенную область соударений со струей на две: выше этой кривой реализуются сплошные струи, а ниже — распыленные.

3. Скорость кумулятивных струй

При определенных режимах соударения скорость кумулятивных струй оказывается меньше, чем предсказывает гидродинамическая теория. Впервые этот факт отмечен в [4]. В работе [10] при соударении пластин также зарегистрированы струи с меньшей скоростью, чем дает расчет по гидродинамической модели. Для объяснения этих различий в скоростях, а также наблюдаемого явления исчезновения струй при малых углах, в [10] рассмотрено влияние вязких свойств металла, которые могут быть причиной полного «запирания» струи, и вводится критерий струеобразования, основанный не на учете сжимаемости, как в [4, 5], а на учете вязких свойств металлов. Здесь же утверждается, что «несмотря на различные подходы к объяснению границы струеобразования, значения критических углов, при которых происходит «запирание» струй, оказались близкими».

Подход авторов [10] к понятию струеобразования отличается от общепринятого, так как в понятие «струи» включаются лишь сплошные, монолитные струи: «...при малых углах соударения (20° для стали, 30° для алюминия) струи не образовывались. Перед точкой контакта в этом случае фиксировалось облако дисперсных частиц» [10]. В связи с этим остается неясным, о совпадении каких критических углов струеобразова-

ния с рассчитанными в [4] идет речь в [10, 11], так как в [4] все результаты (расчетные и экспериментальные) относились именно к пылевидным, дискретным струям.

Проведенное в [10] объединение результатов, касающихся снижения скорости струй, с результатами работы [4] неизвестно, так как они имеют качественно различную природу. Действительно, на плоскости возможных параметров соударения (см. рис. 2) точки, соответствующие экспериментам [4], относятся к довольно высоким скоростям соударения и находятся в области распыляющихся струй. Причем, чем ближе находится точка к критической кривой $\alpha_1^*(U)$, тем больше отличается величина скорости струи от гидродинамической теории. Что касается экспериментов работы [10], то все они относятся к довольно низким скоростям соударения, а соответствующие им точки на плоскости $(U, 2\alpha)$ лежат в области сплошных кумулятивных струй (см. рис. 2). Из того факта, что в [4] несоответствие с теорией возникает только для пылевидных струй и только вблизи критических режимов струеобразования, а в [10] — для сплошных кумулятивных струй, следует, что природа этих несоответствий в том и другом случае принципиально различна.

Основной причиной, вызывающей снижение скорости пылевидной струи, является ее торможение в воздухе. На многочисленных фотографиях видно, что сразу после образования головная часть струи разбухает, образуется характерное облако частиц, постепенно заполняющее почти все пространство между соударяющимися пластинами. Очевидно, что торможение распыленных струй будет увеличиваться с уменьшением их плотности. Характерно, что струи с ультравысокой скоростью [12—14] получены при вакуумировании объема, в котором они двигались, а в работе [14], в частности, экспериментально показана зависимость их скорости от давления в среде. Кроме того, расчеты (см. [9]) для режимов соударений, лежащих на плоскости $(U, 2\alpha)$ в области пылевидных струй, показывают, что в струе появляется поперечная компонента скорости элементов струи, тем большая, чем ближе режим соударения к критическому, которая и вызывает радиальный распад струи на отдельные частицы. Это также должно снижать продольную скорость струи.

Уменьшение скорости сплошных кумулятивных струй, зарегистрированное в [10], связано с низкой скоростью соударения пластин, когда гидродинамическая модель кумуляции перестает быть справедливой, потому что в этом случае инерционные силы становятся сравнимы с прочностными силами материалов.

Сделаем попытку в рамках гидродинамической модели струеобразования учесть влияние реальной прочности материалов при соударении пластин.

Предположим, что существуют некоторые критические параметры соударения, при которых прочность полностью ликвидирует струеобразование. Их можно определить из условия, что при соударении инерционные силы не превосходят сил прочности, так как тогда материал не может перейти в пластическое состояние, но прежде необходимо определить сами эти силы. В работе [15] соотношение между инерционными и прочностными силами предлагается оценивать комбинацией

$$\xi = \rho v_k^2 / 2H_v, \quad (6)$$

где v_k — скорость точки контакта соударяющихся пластин, а H_v — твердость по Виккерсу, характеризующая динамическую прочность материала пластин. Считается, что начало пластического течения может быть приближенно оценено, если данную комбинацию положить равной константе (порядка единицы), которую следует определить экспериментально.

Проводимое авторами [15] рассмотрение процесса соударения пластин на плоскости (α, v_k) нельзя признать эффективным, так как v_k не

характеризует действительную скорость частиц материала, а является фазовой скоростью некоторой точки и сильно зависит от угла соударения. Например, при фиксированной скорости U соударения пластин можно сделать величину (6) сколь угодно большой при малых углах соударения и сколь угодно малой — при больших углах, а струеобразования не будет как в том, так и в другом случае, если U достаточно мала. Более физично оценивать инерционные силы через реальную скорость материала пластин.

Рассмотрим симметричное косое соударение прочных пластин, вектор скорости U которых направлен по нормали к их поверхности. Предположим, что давление, переводящее материал пластин в пластическое состояние, определяется составляющей скорости, нормальной к плоскости симметрии, а прочностные силы — некоторым параметром σ . Тогда условие струеобразования при наличии прочности опишется выражением

$$1/2 \cdot \rho U^2 \cos^2 \alpha > \sigma. \quad (7)$$

Из (7) находится критическая скорость соударения, при которой прекращается струеобразование,

$$U_* = \sqrt{2\sigma/\rho} \cdot 1/\cos \alpha. \quad (8)$$

В системе координат, связанной с точкой контакта, этой критической скорости соударения соответствует критическая скорость «втекания» материала

$$V_* = U_* \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2\sigma/\rho} \cdot 1/\sin \alpha. \quad (9)$$

Отметим, что переход к жидкостной модели справедлив только при условии, что скорость «втекания» материала больше критической скорости (9), и проведем модификацию гидродинамической модели соударения пластин, отчасти подобную применяемойся для учета прочности материала в задачах проникания (см. ниже). Предположим, что рассматриваемой задаче о соударении прочных пластин в системе координат, связанной с точкой контакта, соответствует струйная гидродинамическая задача, в которой струи уже идеальной жидкости имеют скорость.

$$V' = \sqrt{U^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - V_*^2}. \quad (10)$$

Тогда скорость кумулятивной струи в лабораторной системе координат, равная сумме скорости втекания (10) и скорости точки контакта, с учетом прочности определится из выражения

$$V_c^\pi = \frac{U}{\sin \alpha} \left(1 + \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{2\sigma}{\rho U^2}} \right). \quad (11)$$

Естественно, что данная модифицированная модель носит условный характер, так как она не описывает реальную картину течения, но тем не менее она позволяет в какой-то мере учсть диссиацию энергии, связанную с преодолением сил прочности материала пластин. В качестве некоторого обоснования этой модели заметим, что, во-первых, она описывает прекращение струеобразования при определенных значениях параметров соударения прочных пластин, во-вторых, в отсутствие прочности ($\sigma = 0$) она переходит в обычную гидродинамическую модель и, в-третьих, при значительном превышении инерционных сил над прочностными она практически совпадает с гидродинамической. При скорости метания $U = U_*$, определяемой (8), формула (11) дает фазовую скорость точки контакта, а не скорость струи, так как струя в этом случае просто отсутствует.

Нетрудно получить аналогичную (11) формулу для случая, когда вектор скорости пластин направлен по биссектрисе угла, образованного начальным и динамическим направлениями поверхности пластины, что

Таблица 1

Номер опыта	r^*	D , км/с	$2\alpha_0$, град	2α , град	U^* , км/с по (13)	V_c^* , км/с	V_c^{Π} , км/с по (12)	V_c^{Γ} , км/с
<i>Сталь, $\rho=7,85$ г/см³, $\sigma=40-50$ кг/мм²</i>								
1	0,39	6,3	60	69	0,495	1,1	1,25-1,4	1,5
2	0,39	6,3	56	63	0,385	1,0	1,3-1,2	1,6
3	0,39	6,3	45	54	0,495	1,4	1,7-1,5	2,0
4	0,39	6,3	35	44	0,495	1,8	2,2-2,4	2,5
5	0,41	6,4	25	37	0,670	3,2	4,2-4,0	4,4
6	0,41	6,4	15	30	0,840	4,4	5,7-5,5	5,9
<i>Алюминий, $\rho=2,7$ г/см³, $\sigma=20-30$ кг/мм²</i>								
1	0,48	7,6	56	69	0,860	2,6	2,6-2,5	2,8
2	0,53	6,0	55	68	0,680	1,6	2,2-2,0	2,4
3	0,53	6,0	56	69	0,680	1,7	2,2-2,0	2,4
4	0,53	6,0	45	59	0,730	2,1	2,6-2,4	2,9
5	0,53	6,0	35	50	0,785	2,7	3,2-3,0	3,4
6	0,53	6,0	25	40	0,785	3,4	4,0-3,8	4,3

* Отношение массы ВВ к массе пластины.

реализуется в режиме скользящей детонации [16]. Тогда выражение для скорости кумулятивной струи с учетом прочности имеет вид

$$V_c^{\Pi} = \frac{U}{\sin \alpha} \left[\cos \frac{\alpha - \alpha_0}{2} + \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha + \alpha_0}{2} - \frac{2\sigma}{\rho U^2}} \right], \quad (12)$$

где α_0 — начальный угол наклона пластины к плоскости симметрии; α — динамический угол. В этом случае скорость соударения U связана со скоростью детонации D известным выражением

$$U = 2D \sin [(\alpha - \alpha_0)/2]. \quad (13)$$

В табл. 1 приведено сравнение скоростей кумулятивных струй, определенных по (12) — V_c^{Π} и по гидродинамической теории — V_c^{Γ} , с результатами работы [10] (V_c°). Необходимо отметить, что в [10] непосредственно скорость кумулятивных струй в экспериментах не измерялась, а рассчитывалась по измерениям динамического угла соударения и отношения длины струи к длине схлопнувшегося участка пластины. Эти величины измерялись на фотографиях, полученных при однокадровой регистрации процесса на рентгенопульсовой установке. Определение скорости струи таким косвенным путем содержало в данном случае методическую ошибку, которая становилась существенной при малых начальных углах между пластины. Суть ее заключена в том, что при малых углах наклона пластины длина участка установления процесса, на котором струя вовсе не образовывалась, становилась значительной и, следовательно, неучет этого факта дает существенно заниженные расчетные величины V_c° .

Относительно расчета значений V_c^{Π} и V_c^{Γ} , приведенных в табл. 1, отметим следующее. Из данных работы [10] видно, что для одинаковых конструкций разброс в измеренных значениях углов ($\alpha - \alpha_0$) поворота пластины приводит к разбросу до 20% в значениях скорости U^* метания пластины, которая определяется по формуле (13) (см. опыты 1—4 и 5—6 для стали и 2—6 для алюминия в табл. 1). В связи с этим при расчете значений V_c^{Π} (12) и V_c^{Γ} (по (12) с $\sigma = 0$) использовались средние для каждой серии значения угла поворота и соответственно скорости метания. Расчеты показали, что в данных экспериментах следует принять $\sigma = 40-50$ кг/мм² для стали и $\sigma = 20-30$ кг/мм² для алюминия. Эти величины не сильно отличаются от условного предела текучести соответств-

ственno малоуглеродистой стали (типа Ст. 20, Ст. 30) и алюминиевых сплавов (типа АМц, АМг) и практически совпадают с их пределом прочности (см., например, [17]). Возможно, что найденные значения следует трактовать как динамические пределы текучести этих материалов при данных скоростях деформирования.

Результаты, приведенные в табл. 1, показывают, что рассмотренная модификация гидродинамической теории довольно правдоподобно описывает влияние прочности материала пластин на скорость кумулятивных струй. Положительным фактором является то, что для учета прочности она оперирует с реальными механическими характеристиками материалов.

Рассмотрим снова плоскость $(U, 2\alpha)$ возможных значений параметров соударения пластин (см. рис. 2). На ней можно теперь выделить область, в которой реальная прочность металлов должна оказывать влияние на скорость кумулятивных струй. Левая граница $\alpha_3^*(U)$ этой области (кривая β), на которой прочность ликвидирует струеобразование, определяется выражением, следующим из (8)

$$\alpha_3^* = \arccos \sqrt{2\sigma/\rho U^2}. \quad (14)$$

На рис. 2 кривые (14) построены с $\sigma = 45 \text{ кг}/\text{мм}^2$ для стали и $\sigma = 25 \text{ кг}/\text{мм}^2$ для алюминия. Интересно отметить, что для рассмотренных материалов критическая кривая $\alpha_2^*(U)$ пересекает кривую $\alpha_1^*(U)$ (см. рис. 2) практически в той самой точке, в которой в [4], в соответствии с оценками пороговых значений для устойчивого скачка, прекращался расчет кривой $\alpha_1^*(U)$.

Правую границу области влияния прочности можно определить, например, из условия, что отношение значений скорости струи, определяемых с учетом и без учета прочности, отличается от единицы на малую величину ε . Тогда, используя формулы (11) и (2) и линеаризуя по ε , получаем соотношение, из которого можно найти выражение для правой границы области влияния прочности,

$$U = \frac{\sqrt{2\sigma/\rho}}{\sqrt{2\varepsilon \cos \alpha / (1 + \cos \alpha)}}.$$

Остановимся на вопросе о максимальной скорости кумулятивных струй. Очевидно, что максимальная скорость сплошных кумулятивных струй будет достигаться на кривой $\alpha_2^*(U)$, а пылевидных струй — на кривой $\alpha_1^*(U)$. Строго говоря, на самой кривой $\alpha_1^*(U)$ струя не образуется, поэтому речь идет о некоторой, очень близкой окрестности этой кривой, и надо понимать, что плотность пылевидной струи при этом близка к нулю. Расчетные значения максимальной скорости сплошных и пылевидных струй приведены в табл. 2 в зависимости от скорости соударения пластин (вектор скорости направлен по нормали к пластинам). Для каждого материала первая строка соответствует скорости пылевидных струй, которая определяется по формуле (2) при $\alpha = \alpha_1^*$, вторая строка относится к сплошным струям, максимальная скорость которых по гидродинамической модели определяется выражением, получаемым из формул (2) и (5).

$$V_{\max} = c_0 + \sqrt{c_0^2 + U^2}. \quad (15)$$

Третья строка относится к сплошным струям, скорость которых определяется по формулам (5) и (11), т. е. с учетом влияния прочности материалов. Из табл. 2 видно, что для реально достижимых скоростей метания пластин максимальная скорость сплошных струй лишь несколько превышает величину $2c_0$. Этот результат согласуется с качественным выводом, сделанным в работе [6].

Таблица 2

Материал	$U, \text{ км/с}$							
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
Железо (мягкая сталь, $\rho=7,85 \text{ г/см}^3$, $c_0=5,5 \text{ км/с}$, $\sigma=50 \text{ кг/мм}^2$)	12,5	14,9	17,2	19,5	21,8	24,2	28,8	33,4
	11,1	11,1	11,2	11,3	11,5	11,8	12,3	12,9
	9,3	10,7	11,0	11,3	11,5	11,8	12,3	12,9
Алюминий ($\rho=2,7 \text{ г/см}^3$, $c_0=5,25 \text{ км/с}$, $\sigma=20 \text{ кг/мм}^2$)	15,6	17,6	19,7	21,8	23,9	25,9	30,0	34,1
	10,5	10,6	10,7	10,9	11,1	11,3	11,9	12,5
	8,6	10,2	10,5	10,8	11,0	11,2	11,9	12,5
Медь ($\rho=8,9 \text{ г/см}^3$, $c_0=3,95 \text{ км/с}$)	12,8	14,9	17,1	19,2	21,2	23,2	27,4	31,0
	7,9	8,0	8,2	8,4	8,6	8,9	9,5	10,3
Свинец ($\rho=11,3 \text{ г/см}^3$, $c_0=2 \text{ км/с}$)	7,6	9,8	12,0	14,2	16,0	17,8	19,6	
	4,1	4,2	4,5	4,8	5,2	5,6	6,4	7,4

Рассмотрим некоторые особенности, связанные с схлопыванием осесимметричных кумулятивных оболочек. Проще всего процесс схождения оболочек к оси изучить на примере цилиндрической оболочки. Такой подход в принципе сохраняет основные физические эффекты, присущие процессу схлопывания металлических оболочек. В работах [18, 19] приведено численное решение задачи о схождении к оси симметрии под действием продуктов взрыва цилиндрического кольца идеальной несжимаемой жидкости. Сопоставление результатов численного решения с экспериментальными данными, полученными при съемке на рентгеноимпульсной установке процесса схлопывания металлических трубок, окруженных слоем ВВ, показало, что модель идеальной несжимаемой жидкости хорошо описывает начальную стадию схлопывания. Заметное расхождение с экспериментом начинается ближе к концу процесса схлопывания оболочки.

Расхождение с экспериментом преодолено при использовании в расчетах модели вязкой несжимаемой жидкости для материала оболочки [7]. Кроме того, эта модель объяснила и ряд физических эффектов, впервые полученных экспериментально: остановку ускоренной взрывом цилиндрической оболочки на некотором расстоянии от оси, «взрывное» испарение внутренних слоев оболочки в процессе схождения вследствие быстрого перехода кинетической энергии в тепло из-за действия вязких сил. Упругопластическая модель материала оболочки [20] не в состоянии объяснить эти явления. Таким образом, при рассмотрении явления кумуляции зарядов ВВ с осесимметричными оболочками на стадии схлопывания необходимо учитывать вязкость материала, из которого изготовлены оболочки.

В работах [12—14] описаны кумулятивные струи, скорость которых существенно превышает величину, допускаемую гидродинамической теорией с учетом критерия струеобразования (см. табл. 2). Указанный выше учет вязкости на стадии схлопывания оболочек позволяет дать объяснение природы этих высокоскоростных струй. В [12] получены кумулятивные струи из бериллия со скоростью до 90 км/с на устройстве, состоящем из кумулятивного заряда с металлической цилиндрической оболочкой и со вставками из инертного материала, которые формировали сходящийся к оболочке цилиндрический или близкий к нему фронт детонации.

Эксперименты проводились при откачке воздуха из объема, где двигалась струя, так как влияние остаточного воздуха существенно для получения высокой скорости головной части струи. Рекордная скорость получена лишь для давления остаточного воздуха порядка 10^{-5} мм рт. ст. В экспериментах наблюдалось образование двух струй, названных авторами высокоскоростной и основной; плотность высокоскоростной струи при этом оказывается порядка $10^{-4} - 10^{-3}$ г/см³. Проведенные исследования позволили предположить, что высокоскоростная струя имеет газообразную природу.

В [13, 14] продолжено изучение высокоскоростных струй и сделана попытка рассмотреть высокоскоростную и основную кумулятивные струи как истечение сильноожатого металла из области соударения стенок оболочки в вакуум. Такое объяснение природы высокоскоростных струй несостоит, так как оно противоречит критерию струеобразования. Действительно, при очень малых углах схлопывания, что как раз и присуще применявшимся кумулятивным устройствам с цилиндрическими оболочками и со сходящимся цилиндрическим фронтом детонации, параметры соударения всегда находятся ниже критической кривой α^* (см. рис. 2), т. е. в области соударений без струи. И тем не менее эксперименты [12—14] указывают на наличие струй. Непротиворечивое объяснение этот факт получает, если учесть наличие реальной вязкости материалов оболочек.

В работе [7] показано, что испарение вещества цилиндрической оболочки происходит в процессе ее схлопывания. Испарившийся материал внутренних слоев оболочки свободно вытекает вдоль оси симметрии еще до полного схлопывания и образует высокоскоростную струю. Основная струя, вероятно, получается из-за краевого эффекта, когда волны разрежения, идущие с торца как по продуктам взрыва, так и по оболочке, оказывают влияние на схлопывание некоторой ее части. В этой зоне элементы оболочки схлопываются под постепенно увеличивающимся углом и реализуются условия, выводящие точку соударения на плоскости ($U, 2\alpha$) (см. рис. 2) из области бесструйного соударения через область диспергированных струй в область сплошных струй. Итак, основная струя представляет собой (по крайней мере, в голове) поток частиц материала оболочки, а ее максимальная скорость должна соответствовать скоростям пылевидных струй, приведенным в табл. 2.

4. Проникание кумулятивных струй

Гидродинамическая теория бронепробивания довольно хорошо описывает процесс внедрения кумулятивных струй в преграды, но при снижении скорости струй начинается заметное расхождение с экспериментом [21]. Работа [21] — практически единственная, в которой достаточно аккуратно проведена экспериментальная проверка гидродинамической теории проникания. В ней предложена модификация гидродинамической теории, учитывающая влияния прочности материала струи и преграды. В дальнейшем эта модификация развита в [22—26] с упором в основном на проникание бойков. Суть модификации заключается во введении «сопротивления» в уравнение течения

$$\frac{1}{2} \rho_1 (V_c - V_0)^2 = \frac{1}{2} \rho_2 V_0^2 + Y, \quad (16)$$

где V_0 — скорость проникания, а ρ_1 и ρ_2 — плотности струи и преграды соответственно. Под Y обычно подразумевают разность между какими-то прочностными характеристиками материалов бойка и преграды, называемыми часто динамической твердостью (или динамическим пределом текучести). Более физично рассматривать Y как «диссилиативное» давление [22], описывающее потери энергии, связанные с упругопластическим те-

чением, сжимаемостью, нагревом преграды и т. п. Тогда $Y \neq 0$ в соотношении (16) и при равных прочностях бойка и преграды.

Сказанное в основном относится к соударению бойков. Что же касается проникания кумулятивных струй, то их прочность, по-видимому, можно не учитывать, так как струя непосредственно перед соударением сильно нагрета и находится в «квазижидком» состоянии. Из уравнения (16) получаем

$$V_0 = \frac{\lambda V_c}{\lambda^2 - 1} \left[\lambda - \sqrt{1 + (\lambda^2 - 1) \frac{2H_D}{\rho_2 V_c^2}} \right]; \quad V_0 = \frac{1}{2} V_c \left(1 - \frac{2H_D}{\rho V_c^2} \right), \quad (17)$$

где H_D — динамическая твердость материала преграды (параметр, учитывающий диссиацию энергии). Второе выражение в (17) относится к случаю равенства плотностей материалов струи и преграды.

Можно предложить несколько отличную от предыдущей модификацию гидродинамической модели. Предположим, что реальной задаче о проникании струи в прочную преграду соответствует модельная задача, в которой несжимаемая струя с уменьшенной начальной скоростью

$$V'_c = \sqrt{V_c^2 - \frac{2H_D}{\rho_1}}, \quad (18)$$

внедряется в теперь уже идеальную несжимаемую преграду. Тогда скорость проникания V_0 и скорость струи V'_c связаны формулой (2), что с учетом (18) дает

$$V_0 = \frac{\lambda}{\lambda + 1} V_c \sqrt{1 - \frac{2H_D}{\rho_1 V_c^2}}, \quad (19)$$

Сравнение формул (17) и (19) показывает, что в обеих модифицированных моделях струя перестает пробивать преграду при одной и той же критической скорости, определяемой выражением

$$V_c^* = \sqrt{2H_D/\rho_1}.$$

Рассмотренные модификации гидродинамической теории проникания носят весьма условный характер, поэтому преждевременно говорить о степени их соответствия процессу внедрения кумулятивных струй.

В табл. 3 приведены результаты расчета скорости проникания (в отношении к скорости струи) в зависимости от скорости стальной кумулятивной струи ($\rho_1 = 7,85 \text{ г}/\text{см}^3$) для нескольких материалов преград; для каждого материала первая строка значений V_0/V_c соответствует расчету по формулам (17), а вторая — по (19). Видно, что для материалов средней твердости (мягкая сталь, медь) обе модификации при $V_c = 2 \div 3 \text{ км}/\text{с}$ практически выходят на гидродинамическую теорию. Существенное различие между обеими модификациями наблюдается лишь при $V_c = 1 \text{ км}/\text{с}$ (а для прочных материалов — $1,5 \text{ км}/\text{с}$) и ниже; для более высоких скоростей обе модификации мало отличаются друг от друга.

В работе [22] на основании результатов [21] построена экспериментальная зависимость отношения V_0/V_c от V_c при внедрении стальной струи в преграду из мягкой стали (рис. 3). Экспериментальные точки относятся к кумулятивному заряду, подрываемому с различных фокусных расстояний. Точки для фокусного расстояния, равного нулю ($F = 0$), несколько выпадают из общей картины: для некоторой части струи скорость проникания превышает предсказываемую гидродинамической теорией ($V_0/v_c = 0,57$). В работе [22] эти результаты просто отброшены, а по остальным точкам проведена усредняющая кривая на основании которой и сделано заключение о влиянии прочности материала преграды на процесс проникания, которая начинает сказываться для преграды из мягкой стали при скорости стальной струи, равной $4 \text{ км}/\text{с}$.

Таблица 3

Материал преграды	V_c , км/с									
	0,8	1,0	1,5	2	3	4	5	6	7	8
Мягкая сталь ($\rho_2=7,85$ г/см ³ , $H_D=150$ кг/мм ² , $V_c^*=0,62$ км/с)	0,2 0,32	0,31 0,39	0,41 0,45	0,45 0,47	0,48 0,49	0,49 0,49	0,49 0,50	0,49 0,50	0,50 0,50	0,50 0,50
Твердая сталь ($\rho_2=7,85$ г/см ³ , $H_D=350$ кг/мм ² , $V_c^*=0,94$ км/с)	— —	0,05 0,16	0,30 0,39	0,39 0,44	0,45 0,47	0,47 0,48	0,48 0,49	0,49 0,49	0,49 0,49	0,49 0,50
Алюминий ($\rho=2,7$ г/см ³ , $H_D=40$ кг/мм ² , $V_c^*=0,32$ км/с)	0,50 0,58	0,55 0,60	0,59 0,61	0,61 0,62	0,62 0,63	0,63 0,63	0,63 0,63	0,63 0,63	— —	— —
Дюралюминий ($\rho_2=2,8$ г/см ³ , $H_D=140$ кг/мм ² , $V_c^*=0,6$ км/с)	0,24 0,42	0,36 0,50	0,50 0,57	0,55 0,60	0,59 0,61	0,61 0,62	0,61 0,62	0,62 0,63	0,63 0,63	0,63 0,63
Медь ($\rho=8,9$ г/см ³ , $H_D=100$ кг/мм ² , $V_c^*=0,51$ км/с)	0,29 0,37	0,36 0,42	0,43 0,46	0,45 0,47	0,47 0,48	0,48 0,48	0,48 0,48	0,48 0,48	0,48 0,48	— —

Рассмотрим результаты, приведенные на рис. 3, с позиций модифицированной гидродинамической теории. Оказывается, что зависимость (17) хорошо описывает экспериментальные результаты (без $F = 0$) при среднем значении $H_D = 350$ кг/мм (кривая 1). Такое значение динамической твердости существенно превышает значение динамической твердости для мягкой стали $H_D \approx 150$ кг/мм², которое получено в работе [27]. Соответствующая расчетная кривая для $H_D = 150$ кг/мм² приведена на рис. 3, 2. Но в таком случае прочность следует учитывать, начиная со скорости 2,5—3 км/с. Для $H_D = 50$ кг/мм² расчетная кривая 3 до скоростей струи, меньших 3 км/с, мало отличается от кривой 2, а учет влияния прочности в этом случае можно начинать лишь со скоростей струи 1,5—2 км/с.

Сопоставление результатов работ [21] и [28] позволило четко зафиксировать, что первое отклонение процесса проникания струи от гидродинамической модели в проведенной серии экспериментов как раз соответствует моменту начала разрыва струи на отдельные кусочки. Но тогда можно предположить, что отмеченное в [22] и приведенное на рис. 3 уменьшение отношения V_0/V_c при $V_c \approx 4$ км/с является не эффектом прочности, а эффектом «разорванной» струи. Этот эффект определяется двумя факторами. Во-первых, после разрыва струи отдельные ее кусочки за счет различия их скорости постепенно расходятся друг от друга. Так как электроконтактный метод в [21] обеспечивает измерение средней скорости проникания, то измеренная скорость внедрения кусочной струи будет меньше, чем скорость сплошной струи, составленной из

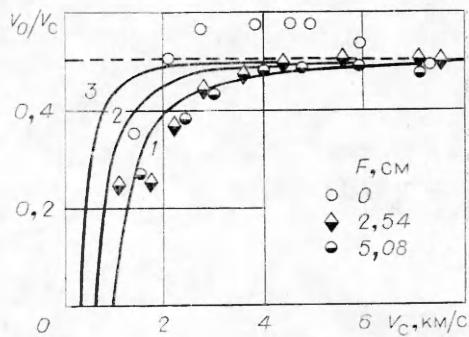


Рис. 3. Экспериментальная [21, 22] и расчетные (17) зависимости скорости проникания в преграду из мягкой стали от скорости стальной кумулятивной струи.

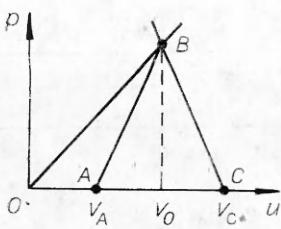


Рис. 4. p — u -диаграмма взаимодействия куска струи с неподвижной преградой.

за того, что струя не некоторой части струи давал занизенные значения скорости, чем и объясняется превышение отношения V_0/V_c величины 0,5 (см. рис. 3). В действительности же экспериментальные точки для $F = 0$ не должны лежать выше прямой $V_0/V_c = 0,5$. Тогда учет прочности преграды следует начинать со скоростей струи 2—2,5 км/с. Характерно, что такую же оценку этой скорости дает модифицированная гидродинамическая теория с $H_D \sim 50—150$ кг/мм. Тем не менее следует признать, что вопрос о влиянии прочности преграды на внедрение кумулятивных струй слишком мало изучен экспериментально, чтобы можно было делать какие-либо достоверные выводы.

Уменьшение толщины пробиваемой преграды и скорости проникания для кумулятивной струи сразу после ее распада на отдельные кусочки, по сравнению со сплошной, может объяснить следующая физическая модель явления. Пусть кусок струи, длина которого сравнима с толщиной, что дает возможность рассматривать процесс в одномерной постановке, ударяется в неподвижную преграду. Пусть следом за ним на расстоянии x_0 движется другой кусок струи с той же или меньшей скоростью. После удара от поверхности соударения в струю и преграду пойдут ударные волны. Процесс соударения куска струи с преградой, сопровождающийся распространением и взаимодействием ударных волн с поверхностями раздела удобно рассматривать на плоскости (p , u) в акустическом приближении, подобно [29]. В этом случае ударные адабаты материалов струи и преграды есть прямые линии, тангенс угла наклона которых к оси u по модулю равен акустическим сопротивлениям их материалов. Начальные состояния преграды и отрезка струи изображены соответственно точками O и C (рис. 4). Возможные состояния преграды лежат на прямой, проходящей через точки O и B , а струи — на прямой, проходящей через точки C и B . Точка B пересечения этих двух прямых определяет параметры ударных волн при соударении струи с преградой. В частности, для массовой скорости за фронтом ударной волны, являющейся в данном случае скоростью внедрения, имеем

$$V_0 = \rho_1 c_1 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \cdot V_c.$$

После того, как ударная волна достигает тыльной свободной поверхности отрезка струи, по нему в сторону контактной поверхности раздела преграда-струя пойдет волна разрежения. Состояние за фронтом волны разрежения в кусочке струи описывается на p , u -диаграмме точкой A пересечения прямой, проходящей через точку B симметрично ударной адабате CB относительно прямой $u = V_c$, с осью абсцисс, что дает массовую скорость

$$V_A = (\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2) / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \cdot V_c. \quad (20)$$

Выражение (20) определяет и скорость тыльной свободной поверхности первого куска струи. Если учесть, что последующий кусок кумуля-

тивной струи сохраняет свою первоначальную скорость, которую, например, полагаем равной V_c , то между ними появляется относительная скорость

$v = V_c - V_A = 2\rho_2 c_2 / (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) \cdot V_c$, и при достаточно малом первоначальном расстоянии между кусочками может произойти их соударение прежде, чем первый кусок сработается по препятствию.

Таким образом, очевидно, что распад струи на отдельные кусочки существенно меняет картину процесса по сравнению с прониканием сплошной струи (даже с переменной скоростью) по длине струи и, в частности, снижает среднюю скорость проникания кумулятивной струи. Сказанное выше иллюстрируется рис. 5, где качественно представлена $x-t$ -диаграмма движения кусочков струи после срабатывания ее непрерывной части. Здесь: t_a — момент удара первого куска струи о препятствие, t_b — момент выхода ударной волны ab на его тыльную поверхность, t_c — примерный момент времени, когда бы произошло срабатывание участка непрерывной струи, равного длине куска, t_d — фактический момент его полного срабатывания. На рис. 5 изображен случай, когда второй кусок струи догоняет первый до его полного срабатывания (в момент $t_e < t_d$), после чего они начнут взаимодействовать между собой, что приведет к дополнительному расходу струи и уменьшению, по сравнению со сплошной струей, глубины пробитой препятствия. Вполне возможно, что соударение между собой элементов разорванной струи при ее внедрении в препятствие является одной из причин возникновения волнистой поверхности канала, в той его части, которая соответствует внедрению разорванной струи.

Рассмотренная модель, несмотря на ее сугубо качественный характер, позволяет понять физическую природу эффекта «разорванной» струи.

В заключение данной работы еще раз отметим тот огромный вклад, который внесла гидродинамическая теория кумуляции в изучение и объяснение кумулятивного эффекта. Ее жизнеспособность подчеркивается и тем, что ряд результатов, которые в принципе не могут быть ею предсказаны (например, критерий струеобразования, эффекты прочности и т. п.), можно качественно и количественно описать соответствующим, физически оправданным видоизменением гидродинамической теории.

Поступила в редакцию
18/III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев. УМН, 1957, XII, 4.
2. G. Birghoff, D. P. MacDougal et al. J. Appl. Phys., 1948, 19, 563.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
4. J. M. Walsh, R. G. Shreffler, F. J. Willing. J. Appl. Phys., 1953, 24, 3.
5. G. R. Cowan, A. H. Holtzman. J. Appl. Phys., 1963, 34, 4, 1.
6. Р. Шаль. В кн.: Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. М.: Мир, 1971.
7. Н. И. Матюшкин, Ю. А. Тришин. ПМТФ, 1978, 3.
8. F. H. Naglow, W. E. Pracht. Phys. Fluids, 1966, 9, 1951.
9. P. C. Choi, J. Carleone, R. R. Kagrr. J. Appl. Phys., 1976, 47, 7.
10. С. К. Годунов, А. А. Дерибас, В. И. Мали. ФГВ, 1975, 11, 1.
11. С. К. Годунов, А. А. Дерибас. Докл. АН СССР, 1972, 202, 5.
12. W. Koski, F. Lucy et al. J. Appl. Phys., 1952, 23, 12.
13. Н. П. Новиков. ПМТФ, 1962, 6.
14. Н. П. Новиков. ПМТФ, 1963, 1.

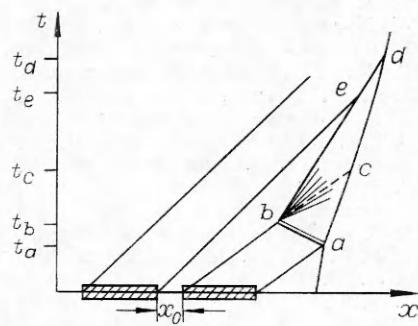


Рис. 5. $x-t$ -диаграмма движения двух кусков кумулятивной струи, подлетающих к препятствию непосредственно после срабатывания предыдущей непрерывной части струи.

15. А. А. Дерибас, И. Д. Захаренко. ФГВ, 1974, 10, 3.
 16. Теоретические и экспериментальные исследования явления кумуляции (обзор).— В сб. перев.: Механика. Вып. 4 (20). М., 1953.
 17. Справочник по авиационным материалам. М., Оборонгиз, 1958.
 18. С. А. Кинеловский, Н. И. Матюшкин, Ю. А. Тришин.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 5. Новосибирск, ИГ СО АН СССР, 1970.
 19. С. А. Кинеловский, Н. И. Матюшкин, Ю. А. Тришин.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 7. Новосибирск, ИГ СО АН СССР, 1971.
 20. А. А. Ильюшин, П. М. Огibalov. Упругопластические деформации полых цилиндров. М., Изд-во МГУ, 1960.
 21. R. J. Eichelberger. J. Appl. Phys., 1956, 27, 1.
 22. M. A. Cook. J. Appl. Phys., 1959, 30, 5.
 23. Л. В. Беляков, Ф. Ф. Витман, Н. А. Златин. ЖТФ, 1964, 34, 10.
 24. В. П. Алексеевский. ФГВ, 1966, 2, 2.
 25. А. Тейт.— В сб. перев.: Механика. Вып. 5. М., 1968.
 26. А. Я. Сагомоян. Проникание. М., изд. МГУ, 1974.
 27. Ф. Ф. Витман, Н. А. Златин, Б. С. Иоффе. ЖТФ, 1949, 19, 3.
 28. R. J. Eichelberger, E. M. Pugh. J. Appl. Phys., 1952, 23, 537.
 29. В. И. Лаптев, Ю. А. Тришин. ПМТФ, 1974, 6.
-

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОКИ И ПОТЕРИ В НЕПРОФИЛИРОВАННЫХ ПЛОСКИХ И КОАКСИАЛЬНЫХ МАГНИТНО-КУМУЛЯТИВНЫХ ГЕНЕРАТОРАХ

E. И. Биченков, В. А. Лобанов

(Новосибирск)

С электротехнической точки зрения магнитно-кумулятивный генератор (МКГ) представляет собой источник тока с отрицательным сопротивлением генерации $R_* = dL/dt$, где L — индуктивность, t — время. Баланс мощности генератора и заряда ВВ показывает, что существует максимальный ток МКГ I_{\max} . Эти выводы подтверждены экспериментально с плоскими и коаксиальными генераторами.

Измерение потерь магнитного потока в плоской щели показало, что в умеренном магнитном поле они удовлетворительно описываются диффузией поля в проводнике. Если поле достигает некоторой критической величины B_* , потери резко возрастают и при дальнейшем сжатии ток генератора достигает предельного значения I_m . В широкой щели предельный ток в конце сжатия совпадает с I_{\max} , в узкой — заметно меньше I_{\max} . Эти особенности предельного тока плоских МКГ объясняются потерями в контакте. В настоящей работе экспериментально изучена форма контактной линии и приведены оценки влияния кривизны ее на распределение поля и потери потока.

Электрическая цепь, сопротивление генерации, максимальный ток и энергетическая эффективность МКГ

Электрическая цепь МКГ состоит из уменьшающейся индуктивности $L(t)$ и сопротивления R и описывается уравнением

$$-I \cdot dL/dt = L \cdot dI/dt + RI, \quad (1)$$

т. е. представляет собой источник тока с отрицательным сопротивлением генерации

$$R_* = dL/dt < 0.$$

Нетрудно видеть, что усиление тока в такой цепи происходит, если $R < -R_*$. Уравнение энергии следует из (1) и имеет вид

$$-R_*/2 \cdot I^2 = d/dt \cdot LI^2/2 + RI^2.$$

Энергия магнитного поля возрастает, если $2R < -R_*$. Во взрывных