УДК 539.375

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ТРЕЩИН В КРУГЛОМ СТЕРЖНЕ ПРИ КРУЧЕНИИ

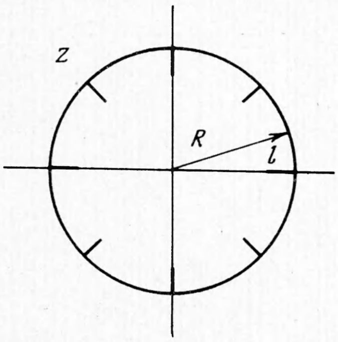
Г. Б. Кузина, Н. Б. Ромалис

(Воронеж)

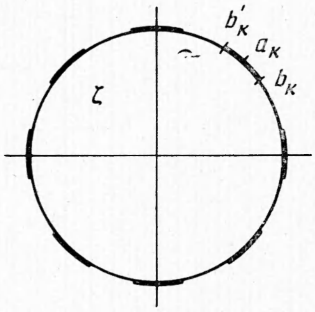
Рассматривается задача о хрупком разрушении при кручении цилиндрического стержня, поперечное сечение которого представляет собой круг радиуса R с произвольным числом равных радиальных разрядов длины l. Задача приведена к виду, удобному для счета на ЭЦВМ.

На основе критерия Гриффита определена критическая величина внешней нагрузки, соответствующая началу роста трещины, в зависимости от глубины начальных разрезов и их числа.

1. Рассмотрим задачу о кручении круглого стержня, имеющего поперечное сечение, изображенное на фиг. 1. Решение будем искать методами теории функций комплексного переменного [1] с помощью конформного отображения круга с разрезами (фиг. 1) на внутренность единичного круга (фиг. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2

Согласно [1] комплексная функция $f(\zeta)$ в преобразованной области имеет вид

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\, d\sigma \tag{1.1}$$

где γ — единичная окружность, σ — точка контура, $\omega(\zeta)$ — отображающая функция, которая в рассматриваемом случае имеет вид [2]

$$z = (4)^{-1/n} (1 + \alpha) R \left[\zeta^{n/2} + \zeta^{-n/2} - \sqrt{(\zeta^{n/2} + \zeta^{-n/2})^2 - 4 (1 + \alpha)^{-n}}\right]^{4/n} \tag{1.2}$$

$$1 + \alpha = [(1 - a)^n + 1]^{2/n} / (4)^{1/n} (1 - a), \quad a = l / R$$

При отображении вершины трещины A_k переходят в точки единичной окружности a_k

$$|a_k| = 1, \quad \arg a_k = 2 (k - 1) \pi / n$$

Точки пересечения окружности с разрезами переходят в точки

$$|b_k| = 1, \quad |b_k'| = 1, \quad \arg b_k, \quad b_k' = \pm 2n^{-1} \arccos (1 + \alpha)^{n/2} + 2 (k - 1) \pi / n$$

Точки b_k, b_k' являются точками ветвления функции $z = \omega(\zeta)$. Однозначная ветвь этой функции выбирается из условия соответствия границ. Записывая σ в ζ в виде $\sigma = e^{i\theta}$, $\zeta = re^{i\varphi}$ и учитывая, что на участках $[b_k, b_k']$

$$\omega(\sigma)\,\overline{\omega(\sigma)} = 1 \tag{1.3}$$

получим комплексную функцию кручения $f(re^{i\varphi})$ в виде

(1.4) $$f(re^{i\varphi}) \frac{(1+\alpha)^2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-A+2(k-1)\pi/n}^{A+2(k-1)\pi/n} \frac{ie^{i\theta}\{\cos\gamma - \sqrt{\cos^2\gamma - (1+\alpha)^{-n}}\}^{4/n} d\theta}{e^{i\theta} - re^{i\varphi}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \ln \left| \frac{-A + 2(k-1)\pi/n - re^{i\varphi}}{A + 2(k-1)\pi/n - re^{i\varphi}} \right|$$

$$A = 2/n^{-1} \arccos [(1+\alpha)^{-n/2}], \quad \gamma = \theta n/2 + (k-1)\pi$$

Для решения задачи кручения нужно вычислить жесткость

(1.5) $$D = \mu(J + D_0)$$

где μ — модуль сдвига, J — полярный момент инерции площади поперечного сечения относительно центра (полярный момент инерции в данном случае $J = \pi R^4/2$), а величина D_0 вычисляется по формуле [1]

(1.6) $$D_0 = -\frac{1}{4} \int_{\gamma} \{f(\sigma) + \overline{f(\sigma)}\} d\{\omega(\rho)\overline{\omega(\sigma)}\}$$

которая с учетом соотношений (1.3), (1.4) может быть записана в виде

(1.7) $$D_0 = -Q \int_{-A}^{A}\int_{-A}^{A} \left\{\cos\frac{\varphi_1 n}{2} - \sqrt{\cos^2\frac{\varphi_1 n}{2} - (1+\alpha)^{-n}}\right\}^{4/n} \times$$

$$\times \left\{\cos\frac{\theta_1 n}{2} - \sqrt{\cos^2\frac{\theta_1 n}{2} - (1+\alpha)^{-n}}\right\}^{4/n} d\theta_1 d\varphi_1 \times$$

$$\times \left[\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_1 n}{2} - (1+\alpha)^{-n}}\, \mathrm{tg}\,\frac{\theta_1 - \varphi_1}{2}\right]^{-1}$$

$$Q = n(1+\alpha^4)/4\pi$$

В (1.7) сделана замена переменных $\theta_1 = \theta + 2(k-1)\pi/n$, $\varphi_1 = \varphi + 2(k-1)\pi/n$ и положено $r = 1$ (предельный переход под знаком двойного интеграла в (1.7) допустим).

После некоторых преобразований (1.7) может быть записано в виде

$$D_0 = \frac{2(1+\alpha)^2}{\pi} \int_{B}^{C} t^{4/n-1} \ln \left| \frac{\sin[A - \varphi(t)]/2}{\sin[A + \varphi(t)]/2} \right| dt +$$

$$+ \frac{8(1+\alpha)^4}{\pi n} \int_{B}^{C}\int_{B}^{C} t^{4/n-1} u^{4/n-1} \ln \left| \frac{\sin[\varphi(t) - \varphi(u)]/2}{\sin[\varphi(t) + \varphi(u)]/2} \right| dt du$$

$$B = 1 - \sqrt{1 - (1+\alpha)^{-n}}, \qquad C = (1+\alpha)^{-n/2}$$

$$\varphi(x) = 2n^{-1} \arccos (x^2 + (1+\alpha)^{-n})/2x$$

2. Рассмотрим процесс распространения трещин с точки зрения энергетических представлений, развитых Гриффитом [3].

Пусть все разрезы получают малые виртуальные приращения δl, в своих плоскостях (в [4] показано, что в условиях кручения трещина не меняет направления). Тогда уравнение энергетического баланса, имеющего место при росте трещины, запишется в виде

(2.1) $$\delta W / \delta l = G$$

Здесь W — упругая энергия, накопленная внутри стержня единичной длины, G — постоянная материала, имеющая смысл удельной поверхностной энергии.

Упругая энергия, накопленная внутри стержня единичной длины при кручении, вычисляется по формуле [1]

(2.2) $$W = M^2 / 2D$$

где M — главный момент внешних напряжений.

Подставляя (2.2) в (2.1) и учитывая (1.5), получим

(2.3) $$\delta W / \delta l = -M^2 (\partial D / \partial l) / 2D^2$$

С помощью (2.3) можно определить величину критической внешней нагрузки M^*, соответствующую началу роста трещин из разреза. Из (1.7) видно, что M^* будет функцией глубины начальных разрезов и их числа n

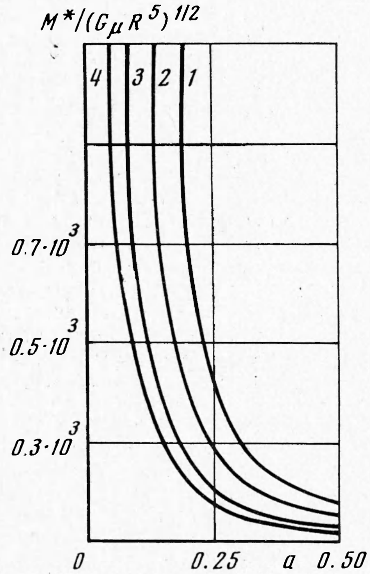
$$M^* = \sqrt{2D\,(G)}^{-1/2} \,/\, (-\partial D \,/\, \partial l)^{-1/2} \tag{2.4}$$

Подынтегральная функция и в первом и во втором интегралах имеет особенность (в первом интеграле при $t = C$, во втором при $t = u$).

Выражение (1.8) вычислялось по формуле

$$D_0 = \frac{2\,(1+\alpha)^2}{\pi} \int\limits_{B}^{C-\varepsilon} t^{4/n-1} \ln \left| \frac{\sin\,(A - \varphi\,(t))/2}{\sin\,(A + \varphi\,(t))/2} \right| dt +$$
$$+ \frac{8\,(1+\alpha)^4}{\pi n} \int\limits_{B+\varepsilon}^{C} dt \int\limits_{B}^{t-\varepsilon} t^{4/n-1}\, u^{4/n-1} \ln \left| \frac{\sin\,(\varphi\,(t) - \varphi\,(u))/2}{\sin\,(\varphi\,(t) + \varphi\,(u))/2} \right| du +$$
$$+ \frac{8\,(1+\alpha)^4}{\pi n} \int\limits_{B}^{C-\varepsilon} dt \int\limits_{t+\varepsilon}^{C} t^{4/n-1}\, u^{4/n-1} \ln \left| \frac{\sin\,(\varphi\,(t) - \varphi\,(u))/2}{\sin\,(\varphi\,(t) + \varphi\,(u))/2} \right| du$$

где $\varepsilon = 0.0001$. В этом случае погрешность не превышает 0.0012. Интегралы вычислялись по формуле Симпсона.



Фиг. 3

Интеграл (1.8) был вычислен на ЭЦВМ «Мир-1». Зависимость безразмерной критической нагрузки $M^* / (G\mu R^5)^{1/2}$ от относительной глубины первоначальных разрезов l_0 и от их числа представлена на фиг. 3. Кривые, обозначенные цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, соответствуют числу разрезов n = 2, 4, 6, 7.

Поступила 20 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Лаврентьев М. А.*, *Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
3. *Griffith A. A.* The theory of rupture. Proc. 1-st Internat., Congress Appl. Meck., Delft., 1924, Delft, J. Waltman Jr, 1925, pp. 55—63.
4. *Ромалис Н. Б.* Разрушение при кручении круглого стержня с трещиной по дуге окружности. ПМТФ, 1970, № 5, стр. 121—125.