11. **Harrison C. B., Sandor G. N.** High-temperature crack growth in low-cycle fatigue.— Eng. Fract. Mech., 1971, vol. 3, N 4.
12. **Landes J. D., Begbey J. A.** A fracture mechanics approach to creep crack growth.— Mechanics of crack growth. Amer. Soc. Test. Mater., Spec. Techn. Publ., 1976, vol. 590, p. 128—148.

---

УДК 539.374

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ И ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

*Е. И. Роменский*

(*Новосибирск*)

Изучаются поверхности, описывающие распространение волн малых возмущений в пластической среде, описываемой уравнениями, предложенными в [1]. Обзор работ, в которых эти процессы исследуются на основе других моделей, содержится в [2]. Частный случай рассматриваемых здесь уравнений был предложен в [3].

Поверхности распространения волн описываются с помощью акустической матрицы, которая определяет три волны: квазипродольную и две квазипоперечных. Акустическая матрица является симметричной и положительно определенной — эти свойства определяются требованием корректности (гиперболичности) рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Описанию класса гиперболических систем, подобных рассматриваемым здесь, посвящена работа [4].

Оказывается, что акустическая матрица, отвечающая системе дифференциальных уравнений рассматриваемой здесь упругопластической среды, на некоторых поверхностях может вырождаться. Такое вырождение соответствует обращению в нуль скорости одной квазипоперечной волны. Эти поверхности вырождения в плоском случае линеаризованной некоторым образом системы уравнений совпадают с поверхностями скольжения классической теории пластичности.

Динамические уравнения изотропной упругопластической среды в прямоугольной декартовой системе координат $x_i$, предложенные в [1], имеют вид

$$\rho du_i/dt - \partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0,\ dh_{ij}/dt - U_{i\alpha}q_{\alpha\beta}U_{j\beta} = 0, \tag{1}$$
$$\rho E_s dS/dt - L\sigma_{ij}\partial u_i/\partial x_j + (l_\alpha\sigma_\alpha)\partial u_\beta/\partial x_\beta = 0,$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_\alpha \partial/\partial x_\alpha$; $u_i$ — вектор скорости; $\sigma_{ij}$ — тензор напряжений; $h_{ij}$ — тензор эффективных упругих деформаций Генки; $S$ — энтропия; $\rho$ — плотность. Тензор $U_{ij}$ образует ортогональную матрицу $U$, приводящую $\sigma_{ij}$ и $h_{ij}$ к главным осям:

$$\|\sigma_{ij}\| = U\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix}U^*,\ \|h_{ij}\| = U\begin{pmatrix}h_1 & 0 & 0\\ 0 & h_2 & 0\\ 0 & 0 & h_3\end{pmatrix}U^*,\quad UU^* = I.$$

Напряжения $\sigma_{ij}$ связаны с эффективными упругими деформациями $h_{ij}$ формулами

$$\sigma_{ij} = \rho\partial E/\partial h_{ij},\ \rho = \rho_0 \exp(-h_{11}-h_{22}-h_{33}),$$

или в главных осях

$$\sigma_i = \rho\partial E/\partial h_i,\ \rho = \rho_0 \exp(-h_1-h_2-h_3),$$

$E = E(h_1, h_2, h_3, S)$ — плотность внутренней энергии, (уравнение состояния). Температура вычисляется по формуле $T = E_S$. Величины $q_{ij}$ вычисляются по формулам

$$q_{ii} = (1 - L)\omega_{ii} + l_i(\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33}),$$

$$q_{ij} = -\frac{h_i - h_j}{e^{-2h_i} - e^{-2h_j}}\left(e^{-2h_i}\omega_{ij} + e^{-2h_j}\omega_{ji}\right), \quad i \neq j,$$

где $\omega_{ij} = U_{\alpha i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}U_{\beta j}$.

Параметр пластичности $L$ в пластической области может зависеть от всех инвариантов тензора напряжений и от температуры. Упругая область выделяется следующим образом: $L = 0$, если

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}[(h_1 - h_2)^2 + (h_2 - h_3)^2 + (h_3 - h_1)^2]^{1/2} < h_* = \text{const},$$

или

$$(L\sigma_1 - l_\alpha\sigma_\alpha)\frac{dh_1}{dt} + (L\sigma_2 - l_\alpha\sigma_\alpha)\frac{dh_2}{dt} + (L\sigma_3 - l_\alpha\sigma_\alpha)\frac{dh_3}{dt} < 0.$$

Величины $l_i$ выражаются через $L$ и уравнение состояния. Для уравнения состояния вида

$$E(h_1, h_2, h_3, S) = E^0(\rho, S) + B(\rho)\sum_{i=1}^{3}\left(h_i - \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)^2$$

имеем

$$l_i = \frac{L}{3}\left[1 - \frac{3}{2B}\left(\frac{T_\rho}{T} - \frac{B_\rho}{B}\right)\left(\sigma_i - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)\right].$$

Распространение волн малых возмущений описывается с помощью характеристических поверхностей. Уравнение нормалей к характеристикам в системе координат, связанной с главными осями напряжений для системы (1), выписано в [1]. Если обозначить $(\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ вектор нормали к характеристической поверхности, то уравнение характеристических нормалей, отвечающее распространению акустических волн, имеет вид

$$\det(\Omega^2 I - \Lambda) = 0,$$

где $\Omega = \tau + u_\alpha\xi_\alpha$; $\Lambda$ — акустическая матрица:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_1\xi_1^2 + M_3e^{2h_2}\xi_2^2 + M_2e^{2h_3}\xi_3^2 & P_3\xi_1\xi_2 & P_2\xi_1\xi_3 \\ P_3\xi_2\xi_1 & M_3e^{2h_1}\xi_1^2 + L_2\xi_2^2 + M_1e^{2h_3}\xi_3^2 & P_1\xi_2\xi_3 \\ P_2\xi_3\xi_1 & P_1\xi_3\xi_2 & M_2e^{2h_1}\xi_1^2 + M_1e^{2h_2}\xi_2^2 + L_3\xi_3^2 \end{pmatrix}.$$

Модули $L_i$, $M_i$, $P_i$ выражаются через производные уравнения состояния и параметр пластичности $L$.

Очевидно, что если выписать акустическую матрицу в случае, когда главные оси напряжений не совпадают с осями координат, то структура ее усложнится и усложнятся формулы для вычисления модулей, в которые будут уже входить элементы матрицы поворота $U$.

Заметим, что если известен вектор нормали к характеристической поверхности $(\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, то характеристическая поверхность (поверхность распространения волн малых возмущений) $\Phi(t, x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ определяется из уравнения

$$\tau\partial\Phi/\partial t + \xi_i\partial\Phi/\partial x_i = 0.$$

Акустическая матрица $\Lambda$ для различных типов сред предполагается положительно определенной. Это имеет место, например, для всех анизотропных упругих сред и означает, что малые возмущения распространяются с ненулевыми скоростями.

Для рассматриваемых здесь уравнений, оказывается, на некоторых поверхностях $\Sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \text{const}$ матрица $\Lambda$ может вырождаться, т. е. иметь собственное значение $\Omega^2 = 0$. Это означает, что на некоторой поверхности $\Psi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ скорость одной квазипоперечной волны (волны сдвига) равна нулю.

Рассмотрим для иллюстрации этого двумерную нестационарную систему уравнений, полученную из (1) путем некоторой линеаризации. Предположим, что все искомые функции зависят от двух пространственных переменных $x = x_1$ и $y = x_2$. Будем рассматривать процессы без учета температурных эффектов, исключая уравнение для энтропии и зависимость уравнения состояния от энтропии ($E = E(h_1, h_2, h_3)$). Считаем, что главные значения $h_i$ эффективных упругих деформаций малы, и, таким образом,

$$q_{ij} = (1/2)(\omega_{ij} + \omega_{ji}),\ i \neq j.$$

Считаем также, что скорости и их градиенты малы, так что выражения вида $u_\alpha \partial u_k/\partial x_\alpha$ можно отбросить. Матрицу $U$ представим в виде

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

при этом

$$\omega_{11} = \cos^2\varphi\partial u/\partial x - \sin\varphi\cos\varphi\,(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y) + \sin^2\varphi\partial v/\partial y,$$
$$\omega_{22} = \sin^2\varphi\partial u/\partial x + \sin\varphi\cos\varphi(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y) + \cos^2\varphi\partial v/\partial y,$$
$$\omega_{12} = \sin\varphi\cos\varphi(\partial u/\partial x - \partial v/\partial y) + \cos^2\varphi\partial u/\partial y - \sin^2\varphi\partial v/\partial x,$$
$$\omega_{21} = \sin\varphi\cos\varphi(\partial u/\partial x - \partial v/\partial y) - \sin^2\varphi\partial u/\partial y + \cos^2\varphi\partial v/\partial x.$$

Связь между напряжениями $\sigma_{ij}$ и эффективными упругими деформациями $h_{ij}$ зададим в виде закона Гука: $\sigma_{ij} = \lambda(h_{11} + h_{22} + h_{33})\delta_{ij} + 2\mu h_{ij}$. В этом случае $l_1 = l_2 = l_3 = L/3$. После сделанных упрощений система (1) принимает вид

$$\rho_0\partial u/\partial t = \partial\sigma_{11}/\partial x + \partial\sigma_{12}/\partial y,\quad \rho_0\partial v/\partial t = \partial\sigma_{21}/\partial x + \partial\sigma_{22}/\partial y,$$

$$(2)\quad \frac{\partial h_{11}}{\partial t} = (1-L)\left[\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi \times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{3}L\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial h_{22}}{dt} = (1-L)\left[\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{3}L\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial h_{33}}{\partial t} = \frac{1}{3}L\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial t} = (1-L)\left[\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\cos^2 2\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

где $\sigma_{ij} = \lambda(h_{11} + h_{22} + h_{33})\delta_{ij} + 2\mu h_{ij}$.

Можно убедиться, что если в уравнениях для $h_{ij}$ положить $L = 0$, то получим уравнения линейной теории упругости

$$\partial h_{11}/\partial t = \partial u/\partial x,\ \partial h_{22}/\partial t = \partial v/\partial y,\ \partial h_{33}/\partial t = 0,\ \partial h_{12}/\partial t = (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)/2.$$

Области упругости выделяются неравенствами

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}[(h_{11} - h_{22})^2 + (h_{22} - h_{33})^2 + (h_{33} - h_{11})^2 + 6h_{12}h_{21}]^{1/2} < h_*$$

$$\text{или}\ \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\sigma_{ii} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right)^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{21}\right] < 0 \quad (L = 0).$$

Параметр $L(0 \leqslant L \leqslant 1)$ характеризует упрочнение среды при пластических деформациях. Рассмотрим случай $L = 1$, соответствующий идеальной пластичности. В этом случае система (2) запишется в виде

$$\rho_0\partial u/\partial t = \partial\sigma_{11}/\partial x + \partial\sigma_{12}/\partial y,\ \rho_0\partial v/\partial t = \partial\sigma_{21}/\partial x + \partial\sigma_{22}/\partial y,$$

$$(3)\quad \frac{\partial h_{11}}{\partial t} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial h_{22}}{\partial t} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial h_{33}}{\partial t} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial h_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\cos^2 2\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

где $\sigma_{ij} = \lambda(h_{11} + h_{22} + h_{33})\delta_{ij} + 2\mu h_{ij}$.

Если рассмотреть стационарную систему, возникающую из (3), т. е. вычеркнуть производные по $t$, то получим систему

$$\partial\sigma_{11}/\partial x + \partial\sigma_{12}/\partial y = 0,\ \partial\sigma_{21}/\partial x + \partial\sigma_{22}/\partial y = 0,\ \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0,$$
$$\sin 2\varphi(\partial u/\partial x - \partial v/\partial y) + \cos 2\varphi(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) = 0,$$

если ее дополнить соотношениями

$$\sigma_{11} = \sigma_1\cos^2\varphi + \sigma_2\sin^2\varphi,\ \sigma_{22} = \sigma_1\sin^2\varphi + \sigma_2\cos^2\varphi,$$
$$\sigma_{12} = (\sigma_2 - \sigma_1)\sin\varphi\cos\varphi,\ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2,$$

где $k$ — предел текучести, то получим классические уравнения теории пластичности [5]. Отметим, что частный случай системы (3) был предложен в [3].

Выпишем уравнение нормалей к характеристикам для системы (3). Для этого уравнения для скоростей перепишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}\frac{\partial h_{11}}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho_0}\frac{\partial h_{22}}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho_0}\frac{\partial h_{33}}{\partial x} + \frac{2\mu}{\rho_0}\frac{\partial h_{12}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{2\mu}{\rho_0}\frac{\partial h_{12}}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho_0}\frac{\partial h_{11}}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}\frac{\partial h_{22}}{\partial y} + \frac{\lambda}{\rho_0}\frac{\partial h_{33}}{\partial y},$$

а уравнения для $h_{ij}$ оставим без изменения.

Для вычисления характеристик удобен метод, примененный, например, в [1], который заключается в следующем: уравнения для $u$ и $v$ продифференцируем еще раз по $t$ и подставим в них уравнения для $h_{ij}$, продифференцированные, где это нужно, по $x$ или по $y$. Если обозначить $(\tau, \xi_1, \xi_2)$ вектор нормали к характеристической поверхности, то уравнение характеристических нормалей имеет вид

$$(4)\qquad \det(\tau^2 I - \Lambda) = 0,$$

где $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$;

$$\Lambda_{11} = \frac{1}{\rho_0}(K + \mu \sin^2 2\varphi)\,\xi_1^2 + \frac{\mu}{\rho_0}\sin 4\varphi\xi_1\xi_2 + \frac{\mu}{\rho_0}\cos^2 2\varphi\xi_2^2;$$

$$\Lambda_{22} = \frac{\mu}{\rho_0}\cos^2 2\varphi\xi_1^2 - \frac{\mu}{\rho_0}\sin 4\varphi\xi_1\xi_2 + \frac{1}{\rho_0}(K + \mu \sin^2 2\varphi)\,\xi_2^2;$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \frac{\mu}{2\rho_0}\sin 4\varphi\xi_1^2 + \frac{1}{\rho_0}(K + \mu\cos 4\varphi)\,\xi_1\xi_2 - \frac{\mu}{2\rho_0}\sin 4\varphi\xi_2^2$$

($K = \lambda + 2\mu/3$). Можно убедиться, что матрица $\Lambda$ неотрицательно определена. В самом деле при $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$

$$\Lambda_{11} = \frac{1}{\rho_0}\left[K\xi_1^2 + \mu(\sin 2\varphi\xi_1 + \cos 2\varphi\xi_2)^2\right] > 0,$$

$$\Lambda_{22} = \frac{1}{\rho_0}\left[\mu(\cos 2\varphi\xi_1 - \sin 2\varphi\xi_2)^2 + K\xi_2^2\right] > 0,$$

$$\det\Lambda = \frac{K\mu}{\rho_0^2}\left[\cos^2 2\varphi\xi_1^4 - 2\sin 4\varphi\xi_1^3\xi_2 + 2(\sin^2 2\varphi - \cos 4\varphi)\,\xi_1^2\xi_2^2 + \right.$$
$$\left. + 2\sin 4\varphi\xi_1\xi_2^3 + \cos^2 2\varphi\xi_2^4\right] = \frac{K\mu}{\rho_0^2}\left[2\sin 2\varphi\xi_1\xi_2 - \cos 2\varphi\,(\xi_1^2 - \xi_2^2)\right]^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, уравнение (4) имеет вещественные неотрицательные корни $\tau^2$.

Определитель матрицы $\Lambda$ обращается в нуль при $2\sin 2\varphi\xi_1\xi_2 - \cos 2\varphi\,(\xi_1^2 - \xi_2^2) = 0$, т. е. при $\xi_2 = (1 \pm \sin 2\varphi)\xi_1$.

Если обозначить $\varphi = -(\theta + \pi/4)$, то уравнения поверхностей, на которых $\det\Lambda = 0$, имеют вид

(5) $$\cos\theta\xi_1 + \sin\theta\xi_2 = 0,\ \sin\theta\xi_1 - \cos\theta\xi_2 = 0.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями линий скольжения теории пластичности [5]

$$dy = -\mathrm{ctg}\,\theta dx,\ dy = \mathrm{tg}\,\theta dx.$$

Таким образом, уравнение (4)

$$\tau^4 - (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})\tau^2 + \det\Lambda = 0$$

при условиях (5) имеет корни

$$\tau^2 = 0,\ \tau^2 = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} = \frac{K + \mu}{\rho_0}(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

Следовательно, на линиях скольжения скорость квазипоперечных волн обращается в нуль, а скорость квазинродольных волн равна $(K + \mu)/\rho_0$.

Отметим, что при $L < 1$ акустическая матрица, соответствующая системе (2), не имеет линий вырождения. Характеристическое уравнение для этого случая в главных осях выписано в [1].

Выпишем теперь акустическую матрицу, описывающую распространение малых возмущений в пластической среде для случая плоского напряженного состояния [5]. Уравнения для этого случая получаются из системы (3), в которой одно из уравнений для $h_{11}$, $h_{22}$, $h_{33}$ заменено на алгебраическое уравнение

$$\sigma_{33} = \lambda(h_{11} + h_{22} + h_{33}) + 2\mu h_{33} = 0.$$

Опуская выкладки, сразу напишем результат. Уравнение характеристических нормалей также имеет вид

$$\det(\tau^2 I - \Lambda) = 0,$$

где

$$\rho_0\Lambda_{11} = \mu\left(\frac{2K}{\lambda+2\mu} + \sin^2 2\varphi\right)\xi_1^2 + \mu\sin 4\varphi\xi_1\xi_2 + \mu\cos^2 2\varphi\xi_2^2 =$$

$$= \mu\frac{2K}{\lambda+2\mu}\xi_1^2 + \mu(\sin 2\varphi\xi_1 + \cos 2\varphi\xi_2)^2 > 0,$$

$$\rho_0\Lambda_{22} = \mu\cos^2 2\varphi\xi_1^2 - \mu\sin 4\varphi\xi_1\xi_2 + \mu\left(\frac{2K}{\lambda+2\mu} + \sin^2 2\varphi\right)\xi_2^2 =$$

$$= \mu(\cos 2\varphi\xi_1 + \sin 2\varphi\xi_2)^2 + \mu\frac{2K}{\lambda+2\mu}\xi_2^2 > 0,$$

$$\rho_0\Lambda_{12} = \rho_0\Lambda_{21} = \frac{\mu}{2}\sin 4\varphi\xi_1^2 + \mu\left(\frac{2K}{\lambda+2\mu} + \cos 4\varphi\right)\xi_1\xi_2 - \frac{\mu}{2}\sin 4\varphi\xi_2^2,$$

$$\det\Lambda = \frac{2\mu^2 K}{\rho_0^2(\lambda+2\mu)}\left[2\sin 2\varphi\xi_1\xi_2 - \cos 2\varphi(\xi_1^2 - \xi_2^2)\right]^2 \geqslant 0.$$

Линии вырождения матрицы $\Lambda$ оказываются теми же самыми

$$\xi_2 = (1 \pm \sin 2\varphi)\xi_1.$$

Это согласуется с тем, что линии скольжения для плоского деформируемого и плоского напряженного состояний одни и те же [5].

*Поступила 22 V 1979*

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Роменский Е. И.** Динамические трехмерные уравнения упругопластической модели Х. А. Рахматулина.— ПМТФ, 1979, № 2.
2. **Новацкий В. К.** Волновые задачи теории пластичности. М., Мир, 1978.
3. **Эстрин М. И.** Об уравнениях динамики сжимаемой пластической среды.— Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 1.
4. **John F.** Algebraic Conditions for Hyperbolicity of systems of partial differential-equations. — Comm. on. Pure and Appl. Math., 1978, vol. 31, N 1.
5. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., Наука, 1969.