УДК 539.3

ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ

Р. Г. Якупов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mail: imran@anrb.ru

Рассмотрены волновые процессы в полубесконечном стержне, находящемся в упругой среде, при ударном воздействии внешней распределенной нагрузки. С использованием преобразования Лапласа по времени решена система двух дифференциальных уравнений движения теории балок Тимошенко. Полученные интегралы определены численно. Показано изменение прогиба и изгибающего момента по продольной координате в различные моменты времени.

Ключевые слова: волны деформаций и напряжений, стержень, преобразование Лапласа.

В последнее время волновые решения задач находят новые технические приложения, поэтому определение волн деформаций и напряжений в инженерных сооружениях большой протяженности при действии динамических нагрузок является актуальным. Например, стержень является моделью подземного магистрального трубопровода. Зная промежуток времени между прибытием продольной и поперечной волн, можно определить расстояние от центра возмущения до регистрирующей станции.

Задачи, близкие к рассматриваемой ниже, решены в [1, 2], где предполагается, что силовые и кинематические факторы приложены к торцу изолированного стержня.

Начало координат поместим в начальном сечении полубесконечного стержня, направив ось x вдоль его оси. Полагается, что внешняя нагрузка описывается выражением

$$p(x,t) = \begin{cases} p_0(1 - x/a)H(t), & 0 \leqslant x \leqslant a, \quad t > 0, \\ 0, & x > a, \quad t < 0, \end{cases}$$

где t — время; H — функция Хевисайда:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Грунт, окружающий трубопровод, моделируется основанием Винклера; считается, что сопротивление грунта пропорционально прогибу:

$$p_* = \alpha W$$

(α — жесткость основания; W — прогиб). Коэффициент α для грунтов находим по формуле [3]

$$\alpha = 0{,}12 E_* (b/l_0)^{1/2}/(1 - \mu_*^2).$$

Здесь E_*, μ_* — модуль упругости и коэффициент Пуассона для грунта; b — ширина сечения стержня; l_0 — единичная длина.

Используя безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad w = \frac{W}{r}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r}, \quad m = \frac{Mr}{EJ}, \quad \beta = \frac{r}{a}, \quad r^2 = \frac{J}{F}$$

(r — радиус инерции; F, J — площадь и момент инерции поперечного сечения стержня), с учетом деформации сдвига и инерции вращения уравнения движения запишем в перемещениях в безразмерном виде [4]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \zeta w = -k(1-\beta\xi)H(\tau),\\ \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta + \gamma\Big(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}\Big) = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\gamma = c_1^2/c_2^2$; $\zeta = r^2\alpha/(\rho F c_2^2)$; $k = p_0 r/(\rho F c_2^2)$; $c_1^2 = E/\rho$; $c_2^2 = k'G/\rho$; c_1, c_2 — скорости распространения продольной и поперечной волн; θ — угол поворота сечения, обусловленного изгибающим моментом; ρ, E, G — плотность, модуль упругости и модуль сдвига материала стержня; k' — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня (для прямоугольного сечения $k' = 1{,}2$, для круглого $k' = 1{,}1$).

Применяя к системе (1) преобразование Лапласа по времени, получим

$$\begin{gathered}\frac{d^2\bar w}{d\xi^2} - \frac{d\bar\theta}{d\xi} - (\gamma s^2 + \zeta)\bar w = -(1-\beta\xi)D,\\ \frac{d\bar w}{d\xi} + \gamma\frac{d^2\bar\theta}{d\xi^2} - (\gamma s^2 + 1)\bar\theta = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $D = k/s$; s — параметр преобразования; $\bar w$, $\bar\theta$ — изображения функций w и θ. Исключив $\bar\theta$ из системы (2), находим

$$\begin{gathered}\frac{d^4\bar w}{d\xi^4} - (\gamma s^2 + s^2 + \zeta)\frac{d^2\bar w}{d\xi^2} + (\gamma s^2 + 1)\Big(s^2 + \frac{\zeta}{\gamma}\Big)\bar w = (1-\beta\xi)D\Big(s^2 + \frac{1}{\gamma}\Big),\\ \bar\theta = \frac{\gamma}{\gamma s^2 + 1}\Big[\frac{d^3\bar w}{d\xi^3} - \Big(\gamma s^2 + \zeta - \frac{1}{\gamma}\Big)\frac{d\bar w}{d\xi} - \beta D\Big].\end{gathered} \tag{3}$$

Решение системы (3) имеет вид

$$\begin{gathered}\bar w = A_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi} + A_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi} + \frac{(1-\beta\xi)D}{\gamma s^2 + \zeta},\\ \bar\theta = (\lambda_1^2 - \gamma s^2 - \zeta)\frac{A_1}{-\lambda_1}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi} + (\lambda_2^2 - \gamma s^2 - \zeta)\frac{A_2}{-\lambda_2}\,\mathrm{e}^{-\lambda_2\xi} - \frac{\beta D}{(\gamma s^2 + \zeta)(\gamma s^2 + 1)},\end{gathered} \tag{4}$$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования первого уравнения в (3); $\lambda_{1,2}$ — два (из четырех) корня характеристического уравнения

$$\lambda^4 - [(\gamma+1)s^2 + \zeta]\lambda^2 + (\gamma s^2 + \zeta)(s^2 + 1/\gamma) = 0, \tag{5}$$

удовлетворяющих условию затухания $\bar w$ и $\bar\theta$ на бесконечности. Корни $\lambda_{1,2}$ уравнения (5) представим в виде

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{(\gamma+1)s^2 + \zeta}{2} \pm \frac{f}{a},$$

где $f = \sqrt{(s^2 - a_1^2)(s^2 - a_2^2)}$; $a_{1,2}^2 = (a/2)[a - \zeta \pm a\sqrt{1 - (\gamma-1)\zeta/\gamma}\,]$; $a = 2/(\gamma - 1)$.

Рассмотрим два вида опорного устройства в начальном сечении: шарнирное закрепление и заделку. При шарнирном закреплении граничные условия для изображений имеют вид

$$\xi = 0\colon \qquad \bar w(0,\tau) = \frac{\partial\bar\theta(0,\tau)}{\partial\xi} = 0,$$

постоянные интегрирования равны

$$A_1 = -D\,\frac{\lambda_2^2 - \gamma s^2 - \zeta}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\gamma s^2 + \zeta)}, \qquad A_2 = D\,\frac{\lambda_1^2 - \gamma s^2 - \zeta}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\gamma s^2 + \zeta)}. \tag{6}$$

В случае заделки на опоре углы поворота и сдвига равны нулю:

$$\xi = 0\colon \qquad \bar\theta(0,\tau) = 0, \quad \frac{\partial \bar w(0,\tau)}{\partial \xi} - \bar\theta(0,\tau) = 0,$$

а постоянные интегрирования равны

$$A_1 = \frac{\beta\lambda_1 D}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\gamma s^2 + 1)}\Big[1 + \frac{\lambda_2^2}{\gamma s^2 + \zeta}\Big(\frac{1}{\gamma s^2 + \zeta} - 1\Big)\Big],$$

$$A_2 = -\frac{\beta\lambda_2 D}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\gamma s^2 + 1)}\Big[1 + \frac{\lambda_1^2}{\gamma s^2 + \zeta}\Big(\frac{1}{\gamma s^2 + \zeta} - 1\Big)\Big].$$

Изгибающий момент определяется по формуле

$$m = \frac{d\theta}{d\xi}. \tag{7}$$

В случае шарнирного закрепления из (4), (6), (7) находим

$$\bar w = \frac{k}{s(\gamma s^2 + \zeta)}\Big(1 - \beta\xi - \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi} + \mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}) - \frac{2s^2 + a}{4f}\,(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi} - \mathrm{e}^{-\lambda_2\xi})\Big),$$
$$\bar m = \frac{ak}{2\gamma f s}\,(\mathrm{e}^{-\lambda_1\xi} - \mathrm{e}^{-\lambda_2\xi}). \tag{8}$$

Оригиналы функций определим с помощью формулы обращения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F(s)\,\mathrm{e}^{\tau s}\,ds = \begin{cases} f(\tau), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

где L — контур Бромвича, представляющий собой вертикальную прямую с абсциссой $c > 0$ и ординатой, уходящей в бесконечность.

Для того чтобы перейти к вещественным интегралам, выражения (8) представим в виде

$$w(\xi,\tau) = \frac{k}{2\pi i}\,(I_0 + I_1 + I_2), \qquad m(\xi,\tau) = \frac{ak}{4\pi i\gamma}\,(I_4 - I_3). \tag{9}$$

Здесь

$$I_1 = I_1' + I_1'', \qquad I_2 = I_2' + I_2'', \qquad I_0 = \int\limits_L \frac{(1 - \beta\xi)\,\mathrm{e}^{\tau s}}{s(\gamma s^2 + \zeta)}\,ds,$$

$$I_1' = -\int\limits_L \frac{\mathrm{e}^{\tau s - \lambda_2\xi}}{2s(\gamma s^2 + \zeta)}\,ds, \quad I_1'' = \int\limits_L \frac{(2s^2 + a)\,\mathrm{e}^{\tau s - \lambda_2\xi}}{4fs(\gamma s^2 + \zeta)}\,ds, \quad I_2' = -\int\limits_L \frac{\mathrm{e}^{\tau s - \lambda_1\xi}}{2s(\gamma s^2 + \zeta)}\,ds,$$

$$I_2'' = -\int\limits_L \frac{(2s^2 + a)\,\mathrm{e}^{\tau s - \lambda_1\xi}}{4fs(\gamma s^2 + \zeta)}\,ds, \quad I_3 = -\int\limits_L \frac{\mathrm{e}^{\tau s - \lambda_2\xi}}{fs}\,ds, \quad I_4 = \int\limits_L \frac{\mathrm{e}^{\tau s - \lambda_1\xi}}{fs}\,ds.$$

При $s \to \infty$ все подынтегральные функции в (9) стремятся к нулю, λ_1 и λ_2 стремятся к постоянным величинам:

$$\lim_{s\to\infty} (\lambda_2/s) = 1, \qquad \lim_{s\to\infty} (\lambda_1/s) = \sqrt{\gamma}\,. \tag{10}$$

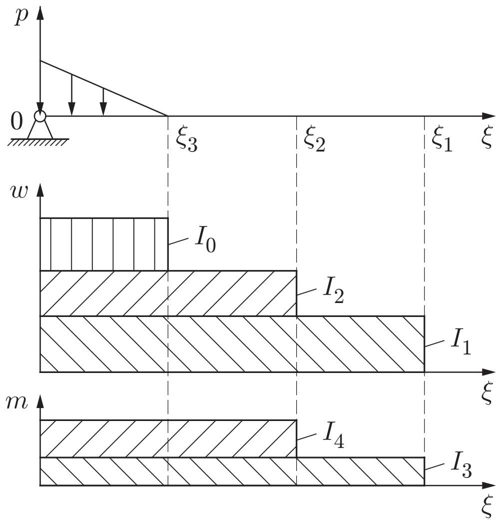

Рис. 1. Распределение возмущений вдоль стержня в фиксированный момент времени

Из формулы обращения и (10) следует, что возмущения распространяются вдоль стержня в виде двух волн со скоростями c_1 и c_2. Область распространения возмущения разбивается фронтами волн на две части. В любой момент времени τ координаты фронтов определяются величинами $\xi_1 = \tau$, $\xi_2 = \tau/\sqrt{\gamma}$. Область $0 < \xi \leqslant \xi_1$ охвачена волной изгиба, параметры волны определяются интегралами I_1 и I_3, которые не равны нулю при $\xi_1 < \tau$ и равны нулю при $\xi_1 > \tau$. В интервале $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ присутствуют волны изгиба и сдвига, параметры волны сдвига определяются интегралами I_2 и I_4, которые не равны нулю при $\xi < \tau/\sqrt{\gamma}$ и равны нулю при $\xi > \tau/\sqrt{\gamma}$. В интервале $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_3 = 1/\beta$ возникают также деформации, обусловленные действием внешней нагрузки, которые определяются интегралом I_0. Величина ξ_3 постоянна и от времени не зависит. На рис. 1 показано распределение возмущений вдоль стержня в фиксированный момент времени.

Простые полюсы и точки ветвления подынтегральных функций в (9) приведены в табл. 1. Контуры интегрирования показаны на рис. 2. Контур интегрирования I_1' показан на рис. 2,*а* штриховой линией и представляет собой разрез вдоль мнимой оси от точки $s = \pm ia_3$ до точки $s = \pm ia_4$ и далее до полукруга большого радиуса.

Комплексные выражения в подынтегральных функциях (9) получены в работе [5] с учетом ограничений на их аргументы в зависимости от пути интегрирования и приведены

Таблица 1

Полюсы и точки ветвления подынтегральных функций в (9)

Интеграл	Полюсы s	Точки ветвления s
I_0	$0; \pm ia_3$	—
I_1'	$0; \pm ia_3$	$\pm ia_3; \pm ia_4$
I_1''	$0; \pm ia_3$	$\pm a_1; \pm ia_2; \pm ia_3; \pm ia_4$
I_2'	$0; \pm ia_3$	—
I_2''	$0; \pm ia_3$	$\pm a_1; \pm ia_2$
I_3	0	$\pm a_1; \pm ia_2; \pm ia_3; \pm ia_4$
I_4	0	$\pm a_1; \pm ia_2$

Примечание. $a_3 = (\zeta/\gamma)^{1/2}$, $a_4 = (1/\gamma)^{1/2}$.

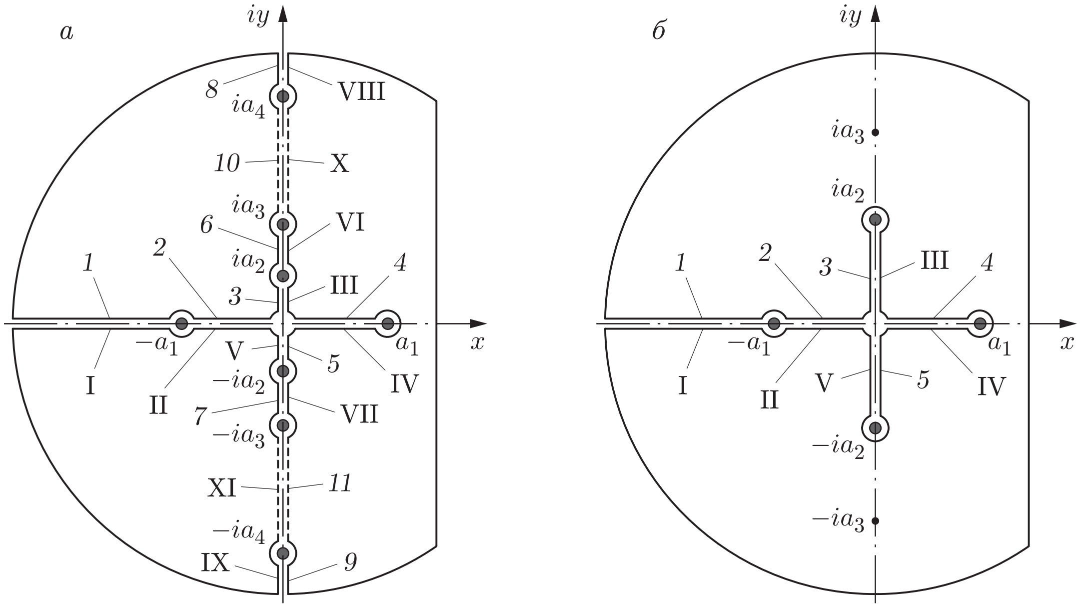

Рис. 2. Контуры интегрирования I_1, I_2 (*а*) и I_2'', I_4 (*б*):
1–11 и I–XI — противоположные берега пути интегрирования

в табл. 2 Интегралы в (9) вычислялись по формуле

$$I = \sum \operatorname{res}(s) - \sum \int\limits_{\gamma_i},$$

где γ_i — пути интегрирования в положительном направлении по берегам разреза и дугам окружностей с бесконечно малым радиусом. При стремлении радиуса малой окружности к нулю длина пути интегрирования и соответственно интеграл стремятся к нулю. Интегралы по отрезкам контура интегрирования, обозначенным на рис. 2 цифрами *1* и I, и по всем берегам разреза вдоль мнимой оси взаимно уничтожаются. После вычисления интегралов находим

$$I_0 = I_1' = 0, \qquad I_1'' = -I_2'', \qquad I_3 = I_4.$$

Выражения для прогиба и изгибающего момента имеют вид

$$\begin{aligned} w(\xi,\tau) &= \operatorname{res}(s)_1 - I_1'', \qquad m(\xi,\tau) = -\operatorname{res}(s)_3 + I_3, \qquad \xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \\ w(\xi,\tau) &= \operatorname{res}(s)_1 + \operatorname{res}(s)_2, \qquad m(\xi,\tau) = -\operatorname{res}(s)_3 + \operatorname{res}(s)_4, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\operatorname{res}(s)_1 = -k\Big[\frac{e^{-\alpha_1\xi}}{2\zeta}\Big(\cos\beta_1\xi - \frac{1}{\nu\zeta}\sin\beta_1\xi\Big) + \frac{\gamma(\zeta-1)}{2\zeta^2}\cos a_3\xi\Big],$$

$$\operatorname{res}(s)_2 = -k\Big[\frac{e^{-\alpha_1\xi}}{2\zeta}\Big(\cos\beta_1\xi + \frac{1}{\nu\zeta}\sin\beta_1\xi\Big) - \frac{1}{\zeta} - \frac{\gamma(\zeta-1)}{2\zeta^2}\Big],$$

$$\operatorname{res}(s)_3 = \frac{k}{\gamma\zeta\nu}\sin\beta_1\xi, \qquad \operatorname{res}(s)_4 = -\operatorname{res}(s)_3,$$

$$T_0 = e^{\tau x-\eta_2\xi}\cos\eta_1\xi - e^{-\tau x-\eta_1\xi}\cos\eta_2\xi,$$

Таблица 2

Комплексные величины в подынтегральных выражениях интегралов I_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ для различных путей интегрирования

Путь интегрирования	s	s^2	f	$\lambda_{1,2}$	Интервал изменения x, y
$\frac{1}{\mathrm{I}}$	$-x$	x^2	$-f_1^*$	$\sqrt{R_1 \mp R_2}$	$-\infty \leqslant x \leqslant -a_1$
$\frac{2}{\mathrm{II}}$	$-x$	x^2	$\pm i f_2^*$	$\frac{\eta_1 \pm i\eta_2}{\eta_1 \mp i\eta_2}$	$-a_1 \leqslant x \leqslant 0$
$\frac{4}{\mathrm{IV}}$	x	x^2	$\pm i f_2^*$	$\frac{\eta_2 \pm i\eta_1}{\eta_2 \mp i\eta_1}$	$0 \leqslant x \leqslant a_1$
$\frac{3}{\mathrm{III}}$	iy	$-y^2$	$i f_3^*$	$\eta_3 \pm i\eta_4$	$0 \leqslant y \leqslant a_2$
$\frac{5}{\mathrm{V}}$	$-iy$	$-y^2$	$-i f_3^*$	$\eta_3 \mp i\eta_4$	$-a_2 \leqslant y \leqslant 0$
$\frac{6,\ \mathrm{VI}}{7,\ \mathrm{VII}}$	$\pm iy$	$-y^2$	$-f_4^*$	$\lambda_1 = i\eta_5$ $\lambda_2 = \eta_6$	$\frac{y \geqslant a_2}{y \leqslant -a_2}$

Примечания. 1. $f_1^* = \sqrt{(x^2 - a_1^2)(x^2 + a_2^2)}$; $f_2^* = \sqrt{(a_1^2 - x^2)(a_2^2 + x^2)}$; $f_3^* = \sqrt{(a_1^2 + y^2)(a_2^2 - y^2)}$; $f_4^* = \sqrt{(y^2 + a_2^2)(y^2 - a_2^2)}$.

2. Арабские и римские цифры соответствуют отрезкам контура интегрирования на рис. 2.

$$I_1'' = -\frac{k}{4\pi} \int_0^{a_1} \frac{(2x^2 + a)T_0}{x f_2^* (\gamma x^2 + \zeta)}\, dx, \qquad I_3 = -\frac{ak}{2\pi\gamma} \int_0^{a_1} \frac{T_0}{x f_2^*}\, dx,$$

$$\alpha_1 = \sqrt{(a_3 + \zeta/2)/2}, \qquad \beta_1 = \sqrt{(a_3 - \zeta/2)/2}, \qquad \nu = \sqrt{4/(\gamma\zeta) - 1},$$

$\operatorname{res}(s)_i$ — вычеты подынтегральных функций в интегралах I_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ соответственно.

Рассмотрим численный пример. Считаем, что сечение стержня прямоугольное, $b = h = 0{,}1$ м, $F = b \times h$, $p_0 = 10$ кН/м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 8$ т/м^3, $c_1 = 5 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 2{,}84 \cdot 10^3$ м/с, $\zeta = 1{,}35 \cdot 10^{-2}$, $k = 0{,}45 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 3{,}1$, $a = 0{,}95$, $a_1 = 0{,}94$, $a_2 = 0{,}051$, $a_3 = 0{,}072$, $a_4 = 0{,}225$.

Расчеты проводились по формулам (11). В интеграле I_1'' подынтегральная функция в точках $x = 0$ и $x = a_1$ имеет бесконечный разрыв, функция T_0 является осциллирующей, поэтому при интегрировании по x обеспечивалось не менее 10 шагов в пределах длины полуволны. Нижний предел принимался равным δ, верхний предел — $a_1(1 - \delta)$, где $\delta = 10^{-15}$. Таким образом определено главное значение несобственного интеграла. Вычисления проводились методом трапеций.

По результатам расчетов построены графики зависимостей $w(\xi)$ и $m(\xi)$ для двух моментов времени (рис. 3).

Из приведенных данных следует, что в зоне возмущения изменение прогиба и изгибающего момента имеет колебательный характер. В выражении для w преобладающее значение имеет слагаемое, содержащее множитель $\cos a_3\xi$. Периоды функций $\cos a_3\xi$ и $\cos \beta_1\xi$ соответственно равны $2\pi/a_3 = 87$, $2\pi/\beta_1 = 35$ $(\beta = 0{,}18)$. В этом случае величины a_3

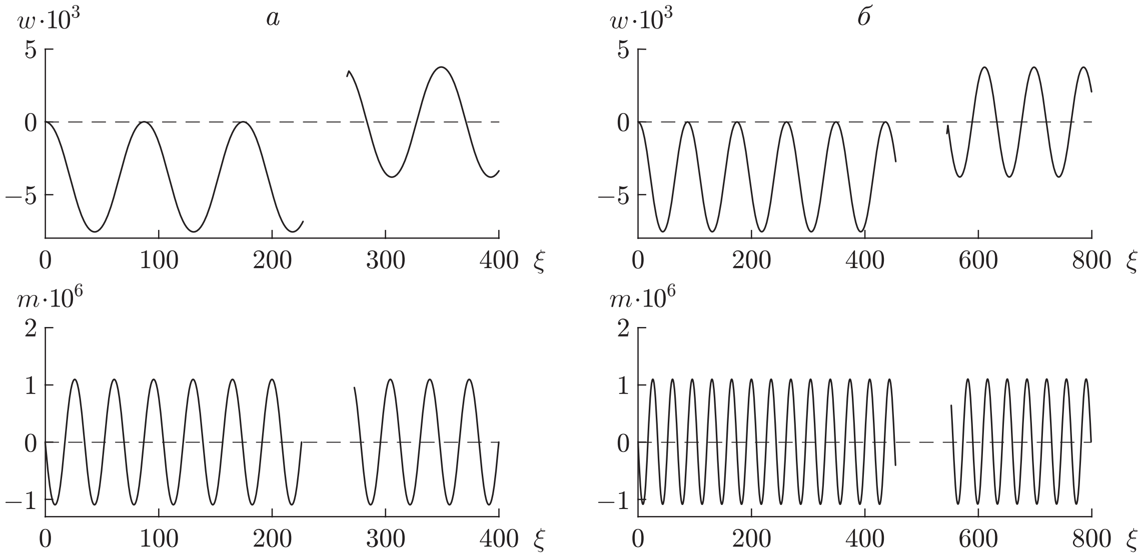

Рис. 3. Распределение прогиба и изгибающего момента вдоль стержня:
а — $\tau = 400$; *б* — $\tau = 800$

и β_1 можно считать частотами колебаний. Отношение периодичностей и частот колебаний равно $\beta_1/a_3 = 2{,}5$. Колебания прогиба в интервале $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ происходят около деформированного состояния $w = -k\gamma(\zeta-1)/(2\zeta^2)$ с частотой a_3, в интервале $\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ — около начального состояния с такой же частотой. Изгибающий момент изменяется около начального состояния с частотой β_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Boley B. A., Chao C. C.** Some solutions of the Timoshenko beam equations // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1955. V. 77. P. 579–586.
2. **Plass H. J.** Some solutions of the Timoshenko beam equations of short pulse — type loadings // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1985. V. 80. P. 379–385.
3. **Айнбиндер А. Б.** Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость / А. Б. Айнбиндер, А. Г. Камерштейн. М.: Недра, 1982.
4. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. М.: Наука, 1985.
5. **Якупов Р. Г.** Волны напряжения в стержне при действии подвижной нагрузки // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 112–122.

Поступила в редакцию 9/IV 2007 г.