УДК 539.3: 517.958

ДИНАМИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Е. И. Роменский*,**, Е. В. Лысь***, В. А. Чеверда***, М. И. Эпов***

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
*** Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: evrom@math.nsc.ru, LysEV@ipgg.sbras.ru, CheverdaVA@ipgg.sbras.ru, EpovMI@ipgg.sbras.ru

В форме гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка сформулированы определяющие уравнения движения упругой среды с заданными начальными напряжениями. Выведены уравнения распространения малых возмущений в предварительно напряженной изотропной среде с произвольной зависимостью энергии упругой деформации от тензора деформаций и приведены уравнения для квадратичной зависимости энергии упругой деформации от тензора деформаций.

Ключевые слова: движение упругой среды, начальные напряжения, упругие волны.

DOI: 10.15372/PMTF20170518

Исследованию проблемы распространения упругих волн в предварительно напряженных средах посвящено большое количество работ, начиная с классической монографии М. Био [1]. Влияние начальных напряжений на динамику деформирования изучалось при решении ряда конкретных задач. Например, волновые поля в предварительно напряженных средах исследовались с целью реконструкции остаточных напряжений при изготовлении конструкционных материалов (композитов, закаленных стекол и т. д.) (см., например, [2, 3]). Большое количество задач, связанных с динамикой предварительно напряженных упругих конструкций, приведено в [4]. В ряде работ, посвященных аналитическому изучению волн в напряженных средах на основе теории Био, исследовано влияние напряжений на P- и S-волны (см. [5]). Затухание термоупругих волн в анизотропной предварительно напряженной среде аналитически изучалось в работе [6]. В [6] также отмечено, что учет напряженного состояния при анализе сейсмических волн позволяет получить более полное представление о структуре Земли, например в окрестности границы земной коры и мантии. В работе [7] теоретически исследовалось влияние начальных напряжений на P-волны. В [8] выведены уравнения волновых процессов в предварительно напряженной упругой среде. Получены уравнения второго порядка для перемещений среды и приведен акустический тензор, зависящий от начальных напряжений. Среди работ, посвященных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-05-01310) и в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 (проект № 121).

исследованию задач геофизики (акустического каротажа), следует отметить работу [9], в которой изучалось влияние предварительных напряжений в окрестности скважины на распространение волн Стоунли. Также в [9] численно показано, что влияние предварительных напряжений на волны в трубе может быть существенным.

Как известно, в классическом подходе для описания волновых полей в теории упругости используются дифференциальные уравнения второго порядка для перемещений (уравнения Ламе). При численном решении уравнений теории упругости современными высокоточными методами более целесообразно использовать определяющие уравнения, записанные в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Например, в задачах сейсмики применяются уравнения, записанные через скорости и напряжения. В работе [10] для моделирования динамики деформируемых сред при конечных деформациях впервые использована гиперболическая система уравнений первого порядка. Результаты, полученные с помощью этого подхода, обобщены в монографии [11]. В настоящее время данный подход является общепризнанным и широко используется при решении различных задач (см., например, работы [12–15] и библиографию к ним).

В данной работе выводятся уравнения динамики упругой среды с начальными напряжениями, записанные через скорости и дисторсии в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в дивергентной форме. В предположении, что поле начальных напряжений удовлетворяет условиям равновесия, выводятся уравнения движения в смешанной формулировке Лагранжа — Эйлера. Уравнения движения записаны в лагранжевых координатах, а тензор напряжений для обеспечения его симметричности отнесен к эйлеровым координатам. Получены также уравнения распространения малых возмущений в предварительно напряженной среде с энергией упругой деформации изотропной среды произвольного вида и конкретизирован их вид для случая квадратичной зависимости энергии упругой деформации от тензора деформаций. Показано, что наличие начальных напряжений приводит к анизотропии распространения волн. В работах [16, 17] предложенный подход использован при исследовании распространения сейсмических волн в геологических формациях с зонами концентрации начальных напряжений.

1. Конечные деформации предварительно напряженной среды. Ниже приводятся различные формулировки уравнений динамики среды с начальными напряжениями при конечных деформациях.

1.1. *Эйлерова формулировка уравнений динамики среды с начальными напряжениями при конечных деформациях.* Рассмотрим деформируемую среду в декартовой системе координат, в которой начиная с момента наблюдения $t = 0$ имеется поле начальных напряжений Σ_{ij}. Для полного описания деформирования предварительно напряженной среды необходимо использовать три координатные системы, а именно эйлерову систему координат наблюдателя y^i, лагранжеву начальную систему координат x^i и систему координат ξ^i, связанную со средой в ненапряженном состоянии. Введение системы, связанной с ненапряженным состоянием среды, необходимо для определения упругих деформаций, обусловленных наличием поля начальных напряжений.

Полное описание процесса деформирования среды может быть получено с помощью двух градиентов деформаций, которые будем называть также дисторсиями, характеризующими деформации элемента среды при переходе из конфигурации, соответствующей ненапряженному состоянию, в лагранжеву конфигурацию: $F^i_{0j} = \partial x^i/\partial \xi^j$, и деформации элемента при переходе из лагранжевой конфигурации в текущую конфигурацию: $F^i_j = \partial y^i/\partial x^j$. С использованием этих дисторсий деформация элемента при переходе из конфигурации, соответствующей ненапряженному состоянию, в эйлерову конфигурацию описывается тензором полной дисторсии

$$F^i_{tot\,j} = \frac{\partial y^i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^j} = F^i_\alpha F^\alpha_{0j}.$$

Далее целесообразно использовать тензоры дисторсии, обратные F^i_{0j}, F^i_j, $F^i_{tot\,j}$:

$$f^i_{0j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}, \qquad f^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}, \qquad f^i_{tot\,j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial y^j} = f^i_{0\alpha} f^\alpha_j.$$

Напряжения в гиперупругой среде, возникающие при ее деформировании, связаны с тензором деформаций посредством энергии упругой деформации, зависящей от тензора деформаций, выбранного тем или иным способом. Следуя [11], будем использовать метрический тензор деформаций (тензор деформаций Фингера), который связан с определенным выше тензором дисторсии формулой

$$G_{ij} = f^\alpha_{tot\,i} f^\alpha_{tot\,j} = f^\alpha_i f^\beta_{0\alpha} f^\beta_{0\gamma} f^\gamma_j = f^\alpha_i G_{0\alpha\gamma} f^\gamma_j, \tag{1}$$

где $G_{0\alpha\gamma} = f^\beta_{0\alpha} f^\beta_{0\gamma}$ — тензор Фингера, соответствующий деформации элемента среды при переходе из конфигурации, соответствующей ненапряженному состоянию, в лагранжеву конфигурацию с предварительно заданными напряжениями.

Далее используются матричные обозначения и операции. Введем следующие обозначения:

$$F = \{F^i_j\}, \quad F_0 = \{F^i_{0j}\}, \quad f = \{f^i_j\}, \quad f_0 = \{f^i_{0j}\}, \quad G = \{G^i{}_j\}, \quad G_0 = \{G^i_{0j}\}.$$

В принятых обозначениях определение (1) метрического тензора деформаций в матричной форме записывается следующим образом:

$$G = f^{\text{т}} G_0 f$$

(верхний индекс “т” обозначает транспонирование).

Введенные выше величины, характеризующие деформацию, описывают, в частности, изменение плотности ρ, которая с использованием различных тензоров дисторсии вычисляется по формулам [11]

$$\rho = \frac{\rho_{00}}{\det F_{tot}} = \frac{\rho_{00}}{\det F \det F_0} = \frac{\rho_0}{\det F},$$
$$\rho = \rho_{00} \det f_{tot} = \rho_{00} \det f \det f_0 = \rho_0 \det f,$$

где ρ_{00} — плотность среды в разгруженном, свободном от напряжений состоянии; ρ_0 — плотность в начальной лагранжевой конфигурации.

Уравнения движения деформируемой среды с начальными напряжениями включают уравнения сохранения импульса и кинематические уравнения эволюции меры деформаций. Обозначим поле скоростей движения среды $u^i = \partial y^i/\partial t$. В отсутствие внешних сил закон сохранения импульса в эйлеровой системе координат y^i в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial\, \rho u^i}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho u^i u^k - \sigma^{ik})}{\partial y^k} = 0, \tag{2}$$

где тензор напряжений σ^{ik} вычисляется по формуле, связывающей напряжения и деформации посредством упругой внутренней энергии $E(G_{11}, \ldots, G_{33})$ [11]:

$$\sigma^{ij} = -2\rho\, \frac{\partial E}{\partial G_{\alpha j}}\, G_{\alpha i}. \tag{3}$$

Заметим, что, поскольку рассматриваются декартовы системы координат, величины с одними и теми же верхними и нижними индексами не различаются и используется произвольное расположение индексов. Тензор (3) называется тензором напряжений Коши и является симметричным, в отличие от лагранжева тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа. Энергия упругой деформации в случае изотропной среды зависит от трех независимых инвариантов тензора G. При этом согласно теореме Кэли — Гамильтона тензор напряжений может быть выражен как квадратичный полином от тензора деформаций G:

$$\sigma = l_0 I + l_1 G + l_2 G^2. \tag{4}$$

Здесь I — единичная матрица; коэффициенты l_0, l_1, l_2 зависят от инвариантов и определяются видом энергии упругой деформации.

Кинематика деформаций определяется полем скоростей. Уравнения эволюции тензоров дисторсии могут быть получены из определения упругой дисторсии $F^i_j = \partial y^i/\partial x^i$ с учетом определения скорости $u^i = \partial y^i/\partial t$:

$$\frac{\partial F^i_j}{\partial t} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}. \tag{5}$$

Уравнение (5), записанное в лагранжевых координатах, несложно преобразовать в уравнение, записанное в эйлеровых координатах. Для этого надо заменить производную по времени $\partial/\partial t$ на материальную производную вдоль траектории

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Кроме того, следует выполнить замену пространственных переменных по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = F^\alpha_j \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial F^i_j}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial F^i_j}{\partial y^\alpha} = F^\alpha_j \frac{\partial u^i}{\partial y^\alpha}. \tag{6}$$

Обозначая тензор градиентов скорости в лагранжевых и эйлеровых координатах соответственно

$$\nabla_0 u = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\right\}, \qquad \nabla u = \left\{\frac{\partial u^i}{\partial y^\alpha}\right\},$$

запишем уравнения (5), (6) в матричной форме

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} = \nabla u F, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \nabla_0 u. \tag{7}$$

Из уравнений (7) нетрудно вывести уравнение в эйлеровых координатах для градиента деформации f, используя формулы $df = dF^{-1} = -F^{-1}\, dF\, F^{-1} = -f\, dF f$:

$$\frac{df}{dt} = -f \nabla u. \tag{8}$$

Получим уравнение для тензора деформаций Фингера. Заметим, что тензор Фингера, соответствующий деформации элемента среды при переходе из конфигурации, соответствующей ненапряженному состоянию, в лагранжеву конфигурацию, не изменяется вдоль траектории движения этого элемента:

$$\frac{dG_0}{dt} = 0.$$

Используя определение тензора деформаций Фингера $G = f^{\text{т}} G_0 f$ и тождество

$$\frac{dG}{dt} = \frac{df^{\text{т}} G_0 f}{dt} = \frac{df^{\text{т}}}{dt}\, G_0 f + f^{\text{т}}\, \frac{dG_0}{dt}\, f + \frac{df^{\text{т}} G_0}{dt}\, f,$$

получаем уравнение

$$\frac{dG}{dt} = -G\nabla u - \nabla^{\text{т}} u G. \tag{9}$$

Заметим, что тензор Фингера в недеформированном состоянии образует единичную матрицу, поэтому в ряде случаев можно использовать тензор Альманси $\varepsilon = (I - G)/2 = \{\varepsilon_{ij}\}$, который является нулевым в недеформированном состоянии. Уравнения для тензора Альманси в матричной и покомпонентной формах имеют вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2}\,(\nabla u + \nabla^{\text{т}} u) - \varepsilon\nabla u - \nabla^{\text{т}} u\varepsilon,$$

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u^i}{\partial y^j} + \frac{\partial u^j}{\partial y^i}\Big) - \varepsilon_{i\alpha}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial y^j} - \varepsilon_{j\alpha}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial y^i}.$$

Из уравнений, характеризующих кинематику деформаций, можно вывести уравнение для плотности, представляющее собой закон сохранения массы в дифференциальной форме. Для этого следует использовать уравнения эволюции какой-либо дисторсии и связь плотности с дисторсией. Уравнение для плотности имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\,\rho u^k}{\partial x^k} = 0. \tag{10}$$

Для описания тепловых эффектов, возникающих при деформировании среды с начальными напряжениями, необходимо также ввести энтропию S в качестве параметра состояния. В этом случае энергия упругой деформации зависит от тензора деформаций и энтропии: $E = E(G_{11}, \dots, G_{33}, S)$, а температура определяется формулой $T = \partial E/\partial S$. В случае упругого деформирования (диссипация отсутствует) уравнение эволюции энтропии имеет вид

$$\frac{dS}{dt} = 0. \tag{11}$$

Важным свойством рассматриваемых процессов является выполнение закона сохранения энергии, который может быть получен из (9), (11). Действительно, заметим, что

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial G_{ij}}\,\frac{dG_{ij}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial G_{ij}}\,G_{i\alpha}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial y^j} - \frac{\partial E}{\partial G_{ij}}\,G_{j\alpha}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial y^i} = -2\,\frac{\partial E}{\partial G_{ij}}\,G_{j\alpha}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial y^i}.$$

С учетом формулы для вычисления напряжений (3) уравнение изменения энергии упругой среды принимает вид

$$\rho\,\frac{dE}{dt} = \sigma_{ij}\,\frac{\partial u^i}{\partial y^j}.$$

Таким образом, сформулированы определяющие уравнения движения упругодеформируемой среды с начальными напряжениями. Приведем замкнутую систему уравнений в эйлеровых координатах. Поскольку можно использовать уравнения для F, f или G, в выборе определяющих уравнений для меры деформаций имеется произвол. Приведем одну из возможных систем, все уравнения которой можно записать в дивергентной форме. Такая система уравнений имеет преимущество при разработке эффективных численных методов и анализе разрывных решений. Так как имеет место условие совместности для дисторсии

$$\frac{\partial f^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial f^i_k}{\partial x^j} = 0,$$

уравнения для дисторсии f можно записать в дивергентном виде

$$\frac{\partial f^i_j}{\partial t} + \frac{\partial\, u^\alpha f^i_\alpha}{\partial y^j} = 0.$$

Таким образом, один из возможных вариантов замкнутой системы уравнений в дивергентной форме имеет вид

$$\frac{\partial\,\rho u^i}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho u^i u^k - \sigma^{ik})}{\partial y^k} = 0, \qquad \frac{\partial f^i_k}{\partial t} + \frac{\partial\, u^\alpha f^i_\alpha}{\partial y^k} = 0,$$

$$\frac{\partial\,\rho(E + u^i u^i/2)}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho u^k(E + u^i u^i/2) - u^\alpha \sigma_{\alpha k})}{\partial y^k} = 0.$$

Полученные уравнения движения предварительно напряженной среды аналогичны уравнениям, описывающим среду без начальных напряжений, и имеют те же преимущества: являются гиперболическими и дивергентными. Отличие заключается только в том, что при движении среды начальные напряжения оказывают влияние на параметры состояния. Сформулированные уравнения допускают непосредственное обобщение на случай неупругих деформаций. Это обобщение может быть выполнено аналогично тому, как это сделано в работе [12].

Заметим, что определяющие уравнения в дивергентной форме могут быть сформулированы и через дисторсию F. В этом случае полная система определяющих уравнений будет аналогична системе, сформулированной в [13].

1.2. *Формулировка Лагранжа — Эйлера уравнений динамики среды с начальными напряжениями при конечных деформациях.* Сформулируем уравнения в лагранжевых координатах с симметричным тензором напряжений Коши. Симметрия тензора напряжений играет важную роль при формулировке уравнений, поскольку начальные напряжения должны удовлетворять условиям равновесия с симметричным тензором. Так как далее тепловые эффекты не рассматриваются, изменение температуры не учитывается и энтропия не включается в число параметров состояния. Таким образом, для того чтобы описать упругие волны, необходимо записать уравнения (2), (8) в лагранжевых координатах, сохранив при этом выражение для напряжений в виде (3). Для этого проведем стандартные преобразования, а именно заменим производную вдоль траектории $\partial/\partial t + u^\alpha\,\partial/\partial y^\alpha$ на частную производную по времени $\partial/\partial t$ и выполним замену пространственных координат

$$\frac{\partial}{\partial y^k} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^k}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = f^\alpha_k\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

Заметим, что уравнение для импульса с использованием уравнения для плотности (10) можно записать в эквивалентной форме

$$\rho\,\frac{\partial u^i}{\partial t} + \rho u^\alpha\,\frac{\partial u^i}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial y^k} = 0,$$

а при переходе к лагранжевым координатам — в виде

$$\rho\,\frac{\partial u^i}{\partial t} - f^j_k\,\frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^j} = 0,$$

или

$$\rho_0\,\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\rho_0}{\rho}\,f^j_k\,\frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^j} = 0. \tag{12}$$

В уравнении (12) тензор напряжений является симметричным тензором напряжений Коши, вычисляемым по формуле (3):

$$\sigma^{ik} = -2\rho\,\frac{\partial E}{\partial G_{\alpha k}}\,G_{\alpha i}.$$

Уравнения для дисторсии f в лагранжевых координатах имеют вид

$$\frac{\partial f^i_j}{\partial t} + f^i_\alpha \, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \, f^\beta_j = 0. \tag{13}$$

Далее уравнения (12), (13) используются при выводе уравнений распространения волн малых возмущений в среде с начальными напряжениями.

2. Уравнения для малых возмущений предварительно напряженного состояния. Определим характеристики малых деформаций, создаваемых относительно заданного поля начальных деформаций. Как описано выше, предварительно напряженное состояние в лагранжевых координатах задается тензором деформаций Фингера G_{0ij}. Дисторсия f, характеризующая деформацию элемента среды при переходе из начальной лагранжевой конфигурации в текущую конфигурацию, может быть выражена через вектор перемещений $v^i = y^i - x^i$:

$$f^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \frac{\partial \, (y^i - (y^i - x^i))}{\partial y^j} = \delta^i_j - \frac{\partial v^i}{\partial y^j}.$$

Вводя обозначение $V^i_j = \partial v^i / \partial y^j$ и полагая, что перемещения, а значит, и величины V^i_j малы, определим тензор малых деформаций ϵ_{ij} и тензор малых поворотов ω_{ij}:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \, (V^i_j + V^j_i) = \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial v^i}{\partial y^j} + \frac{\partial v^j}{\partial y^i} \Big), \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \, (V^i_j - V^j_i) = \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial v^i}{\partial y^j} - \frac{\partial v^j}{\partial y^i} \Big). \tag{14}$$

Выражения для тензоров деформаций Фингера и Альманси с точностью до членов первого порядка малости имеют вид

$$G_{ij} = G_{0ij} - G_{0\alpha j} V^\alpha_i - G_{0i\alpha} V^\alpha_j;$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{0ij} - \varepsilon_{0\alpha j} V^\alpha_i - \varepsilon_{0i\alpha} V^\alpha_j + (V^i_j + V^j_i)/2. \tag{15}$$

С использованием приведенных выше формул получим уравнения для малых возмущений предварительно напряженной среды. Предположим, что поле напряжений представляет собой сумму предварительных напряжений и их возмущений: $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + s_{jj}$. Заметим, что поле начальных напряжений Σ должно удовлетворять условиям равновесия в лагранжевых координатах

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x^i} = 0.$$

Поскольку в уравнении (12) плотность ρ отсчитывается от ее лагранжева значения ρ_0, при вычислении с точностью до членов первого порядка малости имеем $\rho = \rho_0 (1 - \mathrm{tr}\,(V + V^{\mathrm{т}})/2)$.

С учетом сказанного выше уравнение (12) можно записать в виде

$$\rho_0 \, \frac{\partial u^i}{\partial t} - (\delta^j_k - V^j_k) \Big(1 + \frac{1}{2} \, \mathrm{tr}\,(V + V^{\mathrm{т}}) \Big) \frac{\partial \, (\Sigma^{ik} + s^{ik})}{\partial x^j} = 0.$$

Отсюда с точностью до членов первого порядка малости получаем

$$\rho_0 \frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial s^{ik}}{\partial x^k} + V^j_k \, \frac{\partial \Sigma^{ik}}{\partial x^j} = 0. \tag{16}$$

Таким образом, получено уравнение для скоростей малых возмущений, в котором производные от компонент тензора начальных напряжений создают источники. Для замыкания системы уравнений для малых возмущений предварительно напряженного состояния необходимо получить формулы, связывающие возмущения напряжений s^{ik} и градиенты перемещений V^j_k. Используем матричную формулу (4) для вычисления напряжений, в которую подставим разложения для тензора деформаций Фингера и его квадрата:

$$G = G_0 - V^{\text{т}} G_0 - G_0 V,$$
$$G^2 = {G_0}^2 - G_0(V + V^{\text{т}})G_0 - G_0^2 V - V^{\text{т}} G_0^2. \tag{17}$$

С учетом (17) разложение тензора напряжений имеет вид

$$\sigma = l_0 I + l_1 G + l_2 G^2 = \Sigma - \Sigma V - V^{\text{т}}\Sigma + l_0^0(V + V^{\text{т}}) - l_2^0 G_0 (V + V^{\text{т}})G_0 - \\ - \Big(\frac{\partial l_0}{\partial G_{ij}}\, I + \frac{\partial l_1}{\partial G_{ij}}\, G_0 + \frac{\partial l_2}{\partial G_{ij}}\, G_0^2\Big)(V^{\text{т}} G_0 + G_0 V)_{ij},$$

где l_0^0, l_2^0 — значения l_0 и l_2, вычисленные при $G = G_0$. Следовательно, возмущение начального поля напряжений равно

$$s = -\Sigma V - V^{\text{т}}\Sigma + l_0^0(V + V^{\text{т}}) - l_2^0 G_0 (V + V^{\text{т}})G_0 - \\ - \Big(\frac{\partial l_0}{\partial G_{ij}}\, I + \frac{\partial l_1}{\partial G_{ij}}\, G_0 + \frac{\partial l_2}{\partial G_{ij}}\, G_0^2\Big)(V^{\text{т}} G_0 + G_0 V)_{ij}. \tag{18}$$

Тензор Фингера G_0 предварительно напряженного состояния связан с тензором начальных напряжений Σ и должен быть вычислен по формуле

$$\Sigma = l_0^0 I + l_1^0 G_0 + l_2^0 G_0^2.$$

Наконец, уравнение для V_j^i может быть получено из (13) после отбрасывания членов второго порядка малости:

$$\frac{\partial V_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial x_j} = 0. \tag{19}$$

Таким образом, выведены уравнения (16), (19), описывающие распространение волн малых возмущений упругой среды с начальными напряжениями и образующие систему дифференциальных уравнений для переменных u^i, V_j^i с замыкающими соотношениями (18). Эти уравнения применимы для произвольной зависимости энергии упругой деформации от инвариантов тензора деформаций, при этом свойства среды определяются в замыкающих соотношениях (18) коэффициентами l_0, l_1, l_2.

3. Уравнения распространения упругих волн в предварительно напряженной среде с квадратичной зависимостью энергии упругой деформации от тензора деформаций. Сформулируем уравнения, описывающие распространение волн малой амплитуды в изотропной среде с начальными напряжениями для квадратичной зависимости энергии упругой деформации от тензора деформаций:

$$E = \frac{\lambda}{2\rho_{00}}\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \frac{\mu}{\rho_{00}}\,(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}).$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе; ρ_{00} — плотность среды в ненапряженном состоянии; тензор деформации Альманси ε_{ij} отсчитывается от ненапряженного состояния. Напряжения, вычисленные с использованием тензора Альманси ε, имеют вид

$$\sigma = (\rho/\rho_{00})(\lambda\,\mathrm{tr}\,(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon - 2\lambda\,\mathrm{tr}\,(\varepsilon)\varepsilon - 4\mu\varepsilon^2). \tag{20}$$

При выводе (20) использована формула для вычисления напряжений через тензор деформаций Альманси, полученная из (3):

$$\sigma = -2\rho G\,\frac{\partial E}{\partial G} = \rho(I - 2\varepsilon)\,\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}.$$

Далее предполагается, что начальные деформации ε_0, обусловленные наличием начального поля напряжений Σ, малы, поэтому в ходе преобразований будем сохранять члены, содержащие ε_0 только в первой степени.

С учетом разложения (15), записанного в матричной форме

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - V^{\text{т}}\varepsilon_0 - \varepsilon_0 V + (V + V^{\text{т}})/2,$$

получаем

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_0(V + V^{\text{т}})/2 + (V + V^{\text{т}})\varepsilon_0/2,$$
$$\operatorname{tr}(\varepsilon) = \operatorname{tr}(\varepsilon_0) - 2\operatorname{tr}(\varepsilon_0 V) + \operatorname{tr}(V + V^{\text{т}})/2.$$

Учитывая, что с точностью до степени первого порядка относительно ε_0

$$\rho = \rho_{00}(1 - \operatorname{tr}(\varepsilon)) = \rho_{00}(1 - \operatorname{tr}(\varepsilon_0) - \operatorname{tr}(V + V^{\text{т}})/2),$$
$$\Sigma = \lambda\operatorname{tr}(\varepsilon_0)I + 2\mu\varepsilon_0,$$

выведем следующие формулы для малых возмущений тензора напряжений:

$$s = -\Sigma V - V^{\text{т}}\Sigma - \operatorname{tr}(V + V^{\text{т}})\Sigma/2 + \lambda(1 - \operatorname{tr}(\varepsilon_0))\operatorname{tr}(V + V^{\text{т}})I/2 + \mu(1 - \operatorname{tr}(\varepsilon_0))(V + V^{\text{т}}) -$$
$$- 2\lambda\operatorname{tr}(\varepsilon_0 V)I - \lambda\operatorname{tr}(V + V^{\text{т}})\varepsilon_0 - 2\mu\varepsilon_0(V + V^{\text{т}}) - 2\mu(V + V^{\text{т}})\varepsilon_0. \qquad (21)$$

Используя определения тензора малых деформаций и тензора малых поворотов (14), выражение для тензора возмущений напряжений можно записать в виде

$$s = -\Sigma(\epsilon + \omega) - (\epsilon^{\text{т}} + \omega^{\text{т}})\Sigma - \operatorname{tr}(\epsilon)\Sigma + \lambda(1 - \operatorname{tr}(\varepsilon_0))\operatorname{tr}(\epsilon)I + 2\mu(1 - \operatorname{tr}(\varepsilon_0))\epsilon -$$
$$- 2\lambda\operatorname{tr}(\varepsilon_0(\epsilon + \omega))I - 2\lambda\operatorname{tr}(\epsilon)\varepsilon_0 - \mu\varepsilon_0\epsilon - \mu\epsilon\varepsilon_0.$$

Таким образом, в среде с начальными напряжениями тензор напряжений зависит не только от тензора малых деформаций ϵ, но и от тензора малых поворотов ω.

Итак, получена замкнутая система уравнений (16), (19), описывающая распространение волн в предварительно напряженной среде:

$$\rho_0\,\frac{\partial u^i}{\partial t} - \frac{\partial s^{ik}}{\partial x^k} + V_k^j\,\frac{\partial\Sigma^{ik}}{\partial x^j} = 0, \qquad \frac{\partial V_j^i}{\partial t} - \frac{\partial u^i}{\partial x_j} = 0. \qquad (22)$$

Здесь s вычисляется по формуле (21); $\rho_0 = \rho_{00}(1 - \operatorname{tr}\varepsilon_0)$. Начальные деформации ε_0 вычисляются через начальные напряжения Σ по формуле

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2\mu}\Big(\Sigma - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\operatorname{tr}\Sigma\ I\Big).$$

4. Особенности распространения волн в среде с начальными напряжениями. Исследуем свойства волновых полей, описываемых уравнениями (22) для упругих волн малой амплитуды, распространяющихся в предварительно напряженной среде. Для этого приведем способ вычисления акустического тензора (тензора Кристофеля) для системы уравнений (22) с замыкающими соотношениями (21), который целесообразно использовать при анализе скоростей распространения волн. В классической теории упругости акустический тензор возникает при формулировке уравнений в перемещениях, образующих систему трех дифференциальных уравнений второго порядка. В данном случае также рассматриваются уравнения второго порядка, но для скоростей. Эти уравнения можно получить путем дифференцирования первого уравнения системы (22) по времени и исключения производных от V_j^i с использованием второго уравнения системы (22).

В результате получаем уравнения второго порядка для скоростей

$$\rho_0\,\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = C_{ijkl}\,\frac{\partial^2 u^l}{\partial x_j x_k} + B_{ijk}\,\frac{\partial u^j}{\partial x_k},$$

где модули C_{ijkl} зависят от λ, μ и тензора предварительных напряжений Σ_{ij}. Модули B_{ijk} зависят от пространственных производных тензора начальных напряжений $\partial\Sigma_{ij}/\partial x_k$:

$$B_{ijk} = -\frac{\partial\Sigma_{ik}}{\partial x_j}.$$

Ясно, что тензор модулей упругости C_{ijkl} соответствует анизотропному материалу. Следует отметить, что тензор напряжений s^{ik}, вычисляемый по формуле (21), линейно зависит от тензора градиента перемещений V, а значит, является функцией не только тензора деформаций ϵ, но и поворота ω. Свойства симметрии тензора C_{ijkl} в общем случае не позволяют отнести предварительно напряженную среду к какому-либо классу кристаллических сред. В уравнении для скоростей присутствуют члены с первыми производными, что может приводить к дисперсии и затуханию упругих волн.

Исследовать свойства анизотропии для произвольно заданного поля начальных напряжений в общем случае затруднительно, поэтому в качестве примера рассмотрим случай одноосного сжатия (растяжения) материала с полем начальных напряжений

$$\Sigma_{11} = -P, \qquad \Sigma_{ij} = 0 \quad (ij \neq 11).$$

Если в соответствии с правилом $C_{ijpq} \to c_{mn}$ от четырехиндексного обозначения модулей перейти к двухиндексному, выполняя замену индексов $11 \to 1$, $22 \to 2$, $33 \to 3$, $23, 32 \to 4$, $13, 31 \to 5$, $12, 21 \to 6$, то компоненты тензора C_{ijpq} можно вычислить по формулам

$$c_{11} = \lambda + 2\mu + 6P + \frac{4\lambda(\lambda+\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P, \qquad c_{12} = \lambda + P + \frac{\lambda(\lambda+3\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P,$$

$$c_{21} = \lambda + \frac{\lambda(\lambda+3\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P, \qquad c_{13} = \lambda + P + \frac{\lambda(\lambda+3\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P,$$

$$c_{31} = \lambda + \frac{\lambda(\lambda+3\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P, \qquad c_{14} = c_{41} = c_{15} = c_{51} = c_{16} = c_{61} = 0,$$

$$c_{22} = \lambda + 2\mu - P - \frac{2\lambda^2}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P, \qquad c_{23} = c_{32} = \lambda - \frac{\lambda(2\lambda-\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P,$$

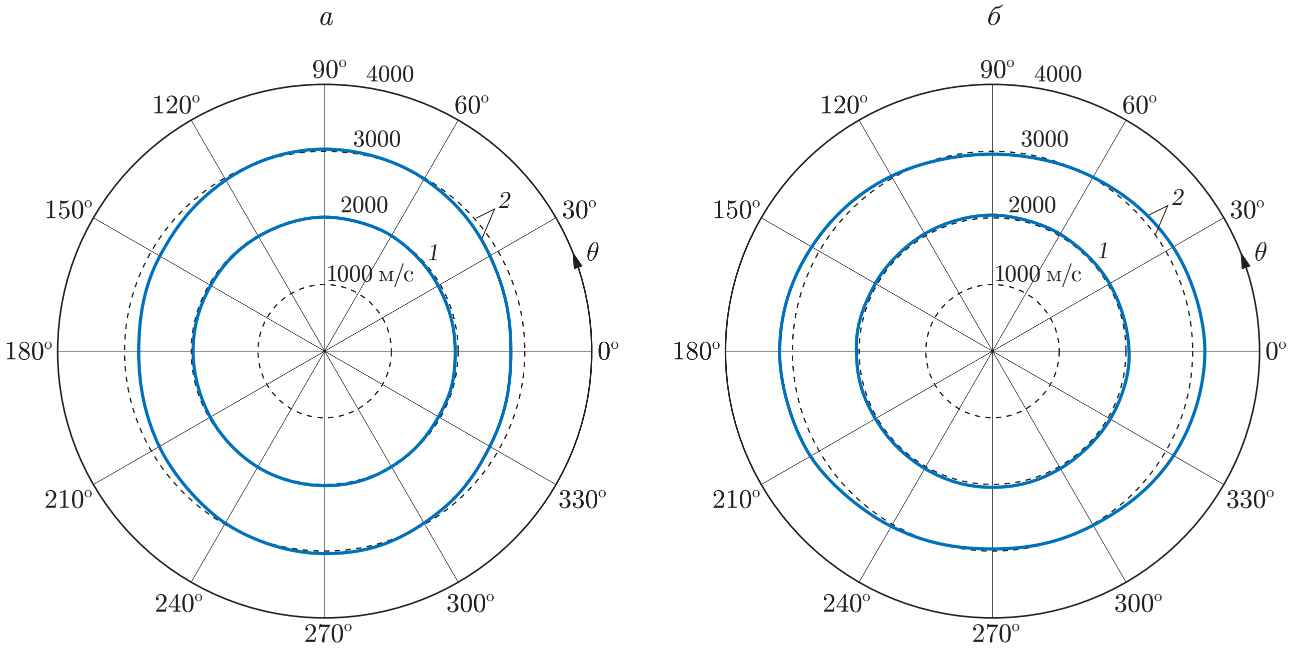
$$c_{24} = c_{42} = c_{25} = c_{52} = c_{26} = c_{62} = 0, \qquad c_{33} = \lambda + 2\mu - P - \frac{2\lambda^2}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,P,$$

$$c_{34} = c_{43} = c_{35} = c_{53} = c_{36} = c_{63} = 0, \qquad c_{44} = \mu - \frac{2\lambda}{3\lambda+2\mu}\,P,$$

$$c_{45} = c_{54} = c_{46} = c_{64} = 0, \qquad c_{55} = \mu + P - \frac{2\lambda}{3\lambda+2\mu}\,P,$$

$$c_{56} = c_{65} = 0, \qquad c_{66} = \mu + P - \frac{2\lambda}{3\lambda+2\mu}\,P.$$

На рисунке показан характер распространения волн в плоскости в предварительно растянутой и предварительно сжатой средах при следующих значениях параметров: $\Sigma_{11} = \pm\rho_{00}V_p^2/50$ (положительное значение начального напряжения Σ_{11} соответствует растяжению, отрицательное — сжатию), $V_p = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho_{00}} = 3000$ м/с, $V_s = \sqrt{\mu/\rho_{00}} = 2000$ м/с, $\rho_{00} = 2000$ кг/м^3. Из рисунка следует, что в предварительно напряженной среде имеется анизотропия в распределении скоростей продольных волн. Для волн сдвига анизотропия также имеет место, но на рисунке она практически не видна.



Распределение скоростей волн на плоскости в предварительно растянутой (*а*) и сжатой (*б*) средах:

пунктирные линии — среда при отсутствии начальных напряжений, сплошные — среда при наличии начальных напряжений; *1* — распределение скорости волны сдвига по углу θ, *2* — распределение скорости продольной волны по углу θ

Наличие младших членов с первыми производными скоростей с коэффициентами, зависящими от производных начальных напряжений, приводит к дисперсии волновых полей малой амплитуды.

Таким образом, сформулированы уравнения движения предварительно напряженной деформированной среды в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в дивергентной форме для случая конечных деформаций. На основе полученных уравнений предложен способ вывода уравнений распространения волн малых возмущений в предварительно напряженной упругой среде и получены уравнения, описывающие этот процесс, в случае квадратичной зависимости энергии упругой деформации от тензора деформаций. Показано, что при наличии начальных напряжений в распределении скоростей упругих волн имеет место анизотропия, поэтому их следует учитывать, например, при интерпретации сейсмических данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biot M. A.** Mechanics of incremental deformations. N. Y.: Wiley, 1965.
2. **Маслов Б. П.** Приведенные динамические характеристики композитных материалов с начальными напряжениями // Прикл. механика. 1982. Т. 18, № 6. С. 75–80.
3. **Hansen S., Uhlmann G.** Propagation of polarization in elastodynamics with residual stress and travel times // Math. Ann. 2003. Bd 326, N 3. S. 563–587.
4. **Гузь А. Н.** Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Киев: Наук. думка, 1986.
5. **Singh I., Madan D. K., Gupta M.** Propagation of elastic waves in prestressed media // J. Appl. Math. 2010. V. 2010. 817680.

6. **Sharma M. D.** Wave propagation in a pre-stressed anisotropic generalized thermoelastic medium // Earth Planets Space. 2010. V. 62, N 4. P. 381–390.
7. **Никитин Л. В., Чесноков Е. М.** Влияние напряженного состояния на анизотропию упругих свойств среды // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1981. № 3. С. 20–23.
8. **Shams M., Destrade M., Ogden R. W.** Initial stresses in elastic solids: Constitutive laws and acoustoelasticity // Wave Motion. 2011. V. 48, N 7. P. 552–567.
9. **Liu Q. H., Sinha B. K.** A 3D cylindrical PML/FDTD method for elastic waves in fluid-filled pressurized boreholes in triaxially stressed formations // Geophysics. 2003. V. 68, N 5. P. 1731–1743.
10. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. 1972. № 6. С. 124–144.
11. **Godunov S. K.** Elements of continuum mechanics and conservation laws / S. K. Godunov, E. I. Romenskii. N. Y.: Kluwer Acad.: Plenum, 2003.
12. **Dumbser M., Peshkov I., Romenski E., Zanotti O.** High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics: Viscous heat-conducting fluids and elastic solids // J. Comput. Phys. 2016. V. 314. P. 824–862.
13. **Barton P. T., Romenski E.** On computational modelling of strain-hardening material dynamics // Comm. Comput. Phys. 2012. V. 11, N 5. P. 1525–1546.
14. **Barton P. T., Deiterding R., Meiron D., Pullin D.** Eulerian adaptive finite-difference method for high-velocity impact and penetration problems // J. Comput. Phys. 2013. V. 240. P. 76–99.
15. **Gavrilyuk S. L., Favrie N., Saurel R.** Modelling wave dynamics of compressible elastic materials // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 2941–2969.
16. **Лысь Е. В., Роменский Е. И., Чеверда В. А., Эпов М. И.** Взаимодействие сейсмических волн с зонами концентрации начальных напряжений // Докл. АН. 2013. Т. 449, № 4. С. 463–466.
17. **Роменский Е. И., Лысь Е. В., Чеверда В. А., Эпов М. И.** Распространение упругих волн в среде с предварительными напряжениями // Технологии сейсморазведки. 2014. № 4. С. 5–12.

Поступила в редакцию 24/IV 2017 г.