

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ГНЕЗДОВОГО САМОНАГРЕВАНИЯ НАСЫПИ В СИЛОСЕ\*

В. П. Ольшанский

Академия пожарной безопасности Украины, 61023 Харьков, mech@apbu.kharkiv.com

Построено аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для случая локализованного центрально-симметричного распределения внутренних источников тепла в бесконечной среде. Расчет прироста температуры в центре очага самонагревания, где он максимален, сведен к вычислению элементарных функций. Проведен анализ полученных теоретических результатов.

Ключевые слова: температурное поле, растительное сырье, гнездовой очаг, самонагревание, нестационарная теплопроводность.

### ВВЕДЕНИЕ

Для предотвращения пожаров и взрывов на элеваторах контролируют состояние насыпи при ее хранении. Одним из основных контролируемых параметров является температура [1, 2]. Поэтому разрабатывались методы теоретического и экспериментального определения температуры сырья с внутренними источниками тепла. Так, в монографии [1] численно решена центрально-симметричная задача при постоянной плотности тепловыделения в сферическом очаге конечного радиуса. Размеры насыпи считались бесконечными. Результаты исследований представлены в виде номограмм, что упрощает их внедрение в расчетную практику. В монографии [2] рассматривалась аналогичная центрально-симметричная задача нестационарной теплопроводности для бесконечного пространства, но изменение плотности тепловыделения  $q(r)$  по радиальной координате  $r$  описывалось дробно-рациональной функцией

$$q(r) = q_0 \frac{R^4}{r^4 + R^4},$$

где  $q_0 = q(0)$ ,  $R$  — некоторый геометрический параметр, характеризующий локализацию очага самонагревания. Решение задачи, как и в работе [1], построено численными методами.

В работах [3, 4] рассматривалась насыпь сферической формы конечного радиуса. Центр очага совпадал с центром насыпи. Плотность

теплового потока от источника задавалась функцией

$$q(r) = q_0 \frac{R^2}{r^2 + R^2}.$$

Распределение температуры выражено с помощью ряда функций Бесселя полуцелого индекса.

В [5] также решена задача для сферы конечного радиуса. В отличие от работ [3, 4] граничная сферическая поверхность трактуется не как граница насыпи (таких форм насыпи нет на практике), а как некоторая условная расчетная поверхность, окаймляющая очаг. На этой условно выделенной внутри насыпи поверхности прирост температуры самонагревания принимается равным нулю. Расчетами показано, что на начальном этапе самонагревания избыточная температура в очаге и его окрестности почти не зависит от радиуса окаймляющей сферы, лишь бы он был значительно больше радиуса очага. Это служит своего рода теоретическим обоснованием модели бесконечной насыпи, принятой в работах [1, 2].

Подводя итог краткому обзору публикаций, отметим, что результаты работ [1–5] сложны для практического применения. Поэтому ниже предпринята попытка получить аналитическое решение, т. е. представить их в виде простых компактных формул.

### 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Приняв аналогично [1–5] постоянными теплофизические характеристики насыпи, прирост температуры  $T = T(r, t)$  по радиальной

\* Помимо корма, силосом называют также ямы, рвы, башни, в которых консервируется и хранится силос.

координате  $r$  и времени  $t$  будем описывать дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\rho c} q(r) \omega(t). \quad (1.1)$$

Здесь  $a = \lambda/\rho c$  — температуропроводность;  $\lambda$  — теплопроводность сырья;  $\rho$  и  $c$  — его плотность и удельная теплоемкость;  $\omega(t)$  — функция Хевисайда;  $q(r)$  — плотность источников тепла, убывающая с ростом  $r$ .

Решение уравнения (1.1) построим при начальном условии

$$T(r, 0) = 0. \quad (1.2)$$

Дополнительно к нему примем  $T(r, t) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  и  $T_r'(0, t) = 0$ .

Для построения решения, удовлетворяющего указанным требованиям, воспользуемся прямым

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(r) r^2 j_0(sr) dr \quad (1.3)$$

и обратным

$$f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}(s) s^2 j_0(sr) ds \quad (1.4)$$

интегральными йот-преобразованиями. Здесь  $j_0(z) = z^{-1} \sin(z)$  — сферическая функция Бесселя первого рода нулевого индекса [6];  $s$  — параметр преобразования.

Интегрированием по частям можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) r^2 j_0(sr) dr = \\ = -s^2 \int_0^{\infty} f(r) r^2 j_0(sr) dr. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Применив прямое йот-преобразование (1.3) к уравнению (1.1), с учетом выражения (1.5) получаем

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + as^2 \bar{T}(s, t) = \frac{1}{\rho c} \bar{q}(s) \omega(t). \quad (1.6)$$

Здесь

$$\bar{T}(s, t) = \int_0^{\infty} T(r, t) r^2 j_0(sr) dr,$$

$$\bar{q}(s) = \int_0^{\infty} q(r) r^2 j_0(sr) dr.$$

Решением дифференциального уравнения (1.6) при начальном условии (1.2) является выражение

$$\bar{T}(s, t) = \frac{1}{\rho c} \frac{\bar{q}(s)}{qs^2} (1 - \exp(-as^2t)) \omega(t). \quad (1.7)$$

Используя обратное йот-преобразование (1.4) и выражение (1.7), приходим к интегральной форме решения поставленной задачи:

$$T(r, t) = \frac{2\omega(t)}{\pi\lambda} \int_0^{\infty} \bar{q}(s) (1 - \exp(-as^2t)) j_0(sr) ds. \quad (1.8)$$

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ПО ЗАКОНУ ГАУССА

Конкретизируем решение (1.8) для случая, когда изменение плотности тепловыделения по радиальной координате подчиняется закону

$$q(r) = q_0 \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right), \quad r \geq 0. \quad (2.1)$$

При малых значениях  $R$  поле источников тепла сильно локализуется в окрестности центра очага  $r = 0$ . С увеличением  $R$  такая локализация ослабевает.

С использованием табличных интегралов [7] для распределения (2.1) находим

$$\begin{aligned} \bar{q}(s) &= \frac{q_0}{s} \int_0^{\infty} r \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \sin(sr) dr = \\ &= \frac{q_0 \sqrt{\pi} R^3}{4} \exp\left(-\frac{s^2 R^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Подставив этот результат в интеграл (1.8), с учетом того, что [7]

$$\int_0^{\infty} x^{-1} \exp(-\beta x^2) \sin(ax) dx = \frac{\pi}{2} \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{\beta}}\right),$$

приходим к компактному решению для  $t \geq 0$ :

$$T(r, t) = \frac{q_0 \sqrt{\pi} R^3}{4r\lambda} \left[ \Phi\left(\frac{r}{R}\right) - \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{R^2 + 4at}}\right) \right]. \quad (2.2)$$

Здесь  $\Phi(r)$  — интеграл вероятностей, затабулированный в [6].

Таким образом, согласно (2.2) вычисление избыточной температуры при заданных значениях  $r$  и  $t$  сводится к применению таблиц специальных функций.

При отсутствии таких таблиц можно приближенно свести расчет к вычислению элементарных функций. Это обеспечивает аппроксимация [6]

$$1 - \Phi(x) \approx y(0,3480242 - 0,0958798 y + 0,7478556 y^2) \exp(-x^2),$$

$$y = (1 + 0,47047x)^{-1}.$$

Ее погрешность на луче  $x \in [0; \infty)$  меньше  $10^{-4}$ , что вполне приемлемо для технических расчетов.

Из решения (2.2) следует, что с ростом  $t$  поле температуры стремится к стационарному распределению

$$T(r, \infty) = \frac{q_0 \sqrt{\pi} R^3}{4r\lambda} \Phi\left(\frac{r}{R}\right).$$

Максимальное значение температуры достигается в центре очага, и оно ограничено сверху значением

$$T_{\max} = q_0 R^2 / 2\lambda. \quad (2.3)$$

Ограниченность роста температуры по времени в рассматриваемом случае объясняется ограниченной мощностью тепловыделения очага. При распределении (2.1) суммарная мощность очага самонагрева  $Q$  составляет

$$Q = 4\pi q_0 \int_0^\infty r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) dr = \pi\sqrt{\pi} q_0 R^3. \quad (2.4)$$

Формулы (2.3) и (2.4) позволяют выразить верхнюю границу прироста температуры через мощность термисточника:

$$T_{\max} = Q / 2\pi \sqrt{\pi} \lambda R.$$

Заметим, что при пластовом самонагревании избыточная температура в бесконечной насыпи, является неограниченной функцией времени [8].

Решение (2.2) дает неопределенность типа 0/0 для избыточной температуры в центре очага. После раскрытия этой неопределенности приходим к элементарной формуле изменения максимального прироста температуры сырья по времени  $t$ :

$$T(0, t) = \frac{q_0 R^3}{2\lambda} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4at}} \right). \quad (2.5)$$

В работе [9] эта формула уже использовалась для решения обратной задачи теплопроводности, а именно для вычисления параметров очага  $q_0$  и  $R$  по измеренным значениям температуры. Здесь рассмотрим ее иное применение.

### 3. РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ПОЖАРООПАСНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Значение пожароопасной температуры зависит от вида сырья. В [2] в качестве таковой рекомендуется брать значение  $T_{\text{п}} \approx 100^\circ \text{C}$ , когда в насыпи начинается активное выделение горючих газов.

Далее будем предполагать, что параметры  $q_0$ ,  $R$ ,  $\lambda$  таковы, что вычисленное по формуле (2.3) значение  $T_{\max}$  будет больше  $T_{\text{п}}$ . В противном случае поставленная задача не имеет смысла.

Для вычисления времени достижения пожароопасной температуры в насыпи ( $t_{\text{п}}$ ), воспользовавшись выражением (2.5), получаем уравнение

$$T_{\text{п}} = \frac{q_0 R^3}{2\lambda} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4at_{\text{п}}}} \right),$$

из которого следует, что

$$t_{\text{п}} = \frac{R^2}{4a} \left[ \left( 1 - \frac{2\lambda T_{\text{п}}}{q_0 R^2} \right)^{-2} - 1 \right]. \quad (3.1)$$

При известных теплофизических параметрах процесса формула (3.1) позволяет найти время достижения пожароопасной температуры. Рассмотрим пример ее использования. Сравним времена достижения пожароопасной температуры для насыпи травяной муки с параметрами [2]  $\lambda = 0,09 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ;  $\rho c = 8,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{К})$ , и для отрубей с параметрами

[2]  $\lambda = 0,09$  Вт/(м·К);  $\rho c = 1,6 \cdot 10^5$  Дж/(м<sup>3</sup>·К). В расчете принимаем  $T_{\text{п}} = 100$  °С;  $q_0 = 100$  Вт/м<sup>3</sup>;  $R = 0,5$  м. Вычисления по формуле (3.1) дают для насыпи травяной муки значение  $t_{\text{п}} \approx 80,3$  сут, а для отрубей —  $t_{\text{п}} \approx 14,7$  сут. Таким образом, время достижения пожароопасной температуры при одном и том же очаге существенно зависит от теплофизических характеристик сырья.

#### 4. САМОНАГРЕВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫМ ОЧАГОМ

Выше рассматривалось центрально-симметричное температурное поле, порожденное квазистационарным тепловым источником, который возникает мгновенно и затем не меняется во времени. В практике хранения сырья известно много случаев, когда возникшие очаги затухали по истечении некоторого времени вследствие угасания тепловой активности микрофлоры. В частности, такой случай наблюдался и при проведении экспериментов [2]. Поэтому представляет интерес рассмотреть самонагревание сырья очагом конечной продолжительности. В простейшем случае зависимость плотности тепловыделения в очаге от времени удобно представить прямоугольным импульсом, действующим на промежутке времени  $\tau$ , т. е. задать выражением

$$q(r, t) = q_0 \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) [\omega(t) - \omega(t - \tau)].$$

Для такого теплового воздействия решение (2.2) изменит свой вид только при  $t > \tau$ . Изменение заключается в том, что при  $t > \tau$  из решения (2.2) нужно вычесть результат подстановки в него разности  $t - \tau$  вместо  $t$  [10]. Указанное преобразование приводит к следующему решению:

$$T(r, t) = \frac{q_0 \sqrt{\pi} R^3}{4\lambda r} \left[ \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{R^2 + 4at_1}}\right) - \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{R^2 + 4at}}\right) \right]. \quad (4.1)$$

Здесь  $t_1 = 0$  при  $t \leq \tau$  и  $t_1 = t - \tau$  при  $t > \tau$ .

Из выражения (4.1) следует простая формула для вычисления прироста температуры в центре очага:

$$T(0, t) = \frac{q_0 R^3}{2\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4at_1}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4at}} \right). \quad (4.2)$$

Она переходит в формулу (2.5) при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Согласно решению (4.2) максимум избыточной температуры достигается в центре очага в момент времени  $t = \tau$ . Поэтому насыпь будет в пожароопасном состоянии лишь в том случае, когда продолжительность импульса  $\tau$  превысит значение  $t_{\text{п}}$ , определяемое выражением (3.1). Если же очаг угаснет за время  $\tau < t_{\text{п}}$ , то самонагревание не будет пожароопасным.

Обозначая через  $I$  величину теплового импульса, можно убедиться, что пожароопасное состояние среды наступает при

$$I > I_{\text{п}} = \pi \sqrt{\pi} q_0 R^3 t_{\text{п}},$$

т. е. в том случае, когда количество тепла, передаваемого сырью очагом, превысит указанную критическую величину  $I_{\text{п}}$ . Если же  $I < I_{\text{п}}$ , то процесс самонагревания заканчивается самозатуханием, как это и наблюдается в большинстве случаев на практике.

#### 5. РАСЧЕТ ВРЕМЕНИ НАХОЖДЕНИЯ СЫРЬЯ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ ВЫШЕ ЗАДАННОГО УРОВНЯ

Введем величину  $T_3$  — заданное значение температуры, которое нежелательно превышать по условиям пожаро- и взрывобезопасности или по условиям качественной сохранности продукта.

Если параметры очага импульсного типа таковы, что

$$\frac{q_0 R^3}{2\lambda} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4at}} \right) > T_3, \quad (5.1)$$

то температура самонагревания в окрестности центра очага обязательно превысит заданный уровень.

Представляет практический интерес определить время  $\Delta t_{\text{п}}$ , в течение которого будет выполнено неравенство (5.1) (чем больше  $\Delta t_{\text{п}}$ , тем больше вероятность самовозгорания сырья или его порчи при хранении).

Величина  $\Delta t_{\text{п}}$  находится из соотношения

$$\Delta t_{\text{п}} = t_{\text{н}} - t_{\text{к}}, \quad (5.2)$$

где  $t_{\text{н}}$  — корень уравнения

$$\frac{q_0 R^3}{2\lambda} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4at_{\text{н}}}} \right) = T_3, \quad (5.3)$$

а  $t_{\text{к}}$  — корень уравнения

$$\frac{q_0 R^3}{2\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4a(t_k - \tau)}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4at_k}} \right) = T_3. \quad (5.4)$$

Корень уравнения (5.3) легко вычислить по формуле

$$t_n = \frac{R^2}{4a} \left[ \left( 1 - \frac{2\lambda T_3}{q_0 R^2} \right)^{-2} - 1 \right], \quad (5.5)$$

следующей из (3.1) при замене  $T_n$  на  $T_3$  и  $t_n$  на  $t_3$ .

Получить точное решение уравнения (5.4) аналитическим методом нельзя, поскольку избавление от иррациональности приводит его к полному уравнению четвертой степени. Поэтому найдем  $t_k$  приближенно. Для этого представим выражение (5.4) в виде

$$x = 2a\tau \left( 1 + \left( \frac{2/b}{\sqrt{x + 2a\tau} + \sqrt{x - 2a\tau}} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

Здесь  $x = 4at_k + R^2 - 2a\tau$ ;  $b = 2\lambda T_3 (q_0 R^3)^{-1}$ . Уравнение (5.6) удобно решать методом итераций с делением соседних приближений пополам. Начальным приближением целесообразно брать  $x_0 = 2a\tau + R^2$ .

Определив  $x$  с заданной точностью, затем легко найти и  $t_k$ , поскольку

$$t_k = \frac{1}{4a} (x - R^2 + 2a\tau).$$

В качестве примера вычислим значение  $\Delta t_n$  для насыпей травяной муки и отрубей (с указанными выше теплофизическими свойствами) при  $q_0 = 100$  Вт/м<sup>3</sup>;  $R = 0,5$  м;  $T_3 = 80$  °С;  $\tau = 40$  сут.

Из уравнения (5.6) методом итераций с точностью до  $10^{-5}$  находим  $x \approx 1,00580$  для насыпи травяной муки и  $x \approx 4,33166$  — для отрубей. Так,  $t_k = 40,65$  сут в первом сырье и  $t_k = 41,00$  сут — во втором. По формуле (5.5) находим, что  $t_n = 31,17$  и  $5,87$  сут соответственно. Время пребывания сырья при температуре выше  $80$  °С составляет  $9,48$  сут для насыпи травяной муки и  $35,14$  сут — для отрубей. При этом достигаются следующие максимальные избыточные температуры:  $85,84$  °С для первого типа сырья и  $114,38$  °С — для второго. В первом случае пожароопасная ситуация не возникает, а во втором она имеет место. Поэтому в [2] отмечается, что «самым сложным продуктом для хранения являются отруби», и это подтверждают проведенные выше вычисления.

## 6. ЭФФЕКТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ ПРИ ОСТЫВАНИИ СЫРЬЯ

Если тепловой импульс, сообщенный очагом сырью, не в состоянии вызвать самовозгорание, то остывание насыпи сопровождается эффектом температурного последействия. Он проявляется в том, что частицы насыпи, удаленные от центра очага, некоторое время продолжают нагреваться и после исчезновения очага, служившего источником повышения температуры. Затухающая диффузионная волна по мере распространения сообщает удаленным частицам максимальную температуру, которая больше той температуры, что была в момент исчезновения термоисточника. Дополнительное нагревание некоторых частиц насыпи при температурном последействии обусловлено не притоком тепла от очага, а перераспределением тепла по объему вследствие неравномерного нагрева. Роль очага после его исчезновения выполняет более нагретая часть сырья, отдающая тепло менее нагретой части. Так что температурное последействие обусловлено неравномерным самонагревом насыпи по координате  $r$ , который происходил при  $0 < t < \tau$ .

Количественные аспекты указанного эффекта для пластового самонагревания изучены в работе [11]. Здесь остановимся на них при изучении гнездового самонагревания.

Чтобы найти связь между расстоянием  $\bar{r}$  точки до центра очага и временем  $\bar{t}$  достижения там максимальной температуры, продифференцируем выражение (4.2). Приравняв затем производную нулю, получаем уравнение

$$\begin{aligned} (R^2 + 4a(\bar{t} - \tau))^{3/2} \exp \left( -\frac{\bar{r}^2}{R^2 + 4a\bar{t}} \right) = \\ = (R^2 + 4a\bar{t})^{3/2} \exp \left( -\frac{\bar{r}^2}{R^2 + 4a(\bar{t} - \tau)} \right). \end{aligned}$$

Решать его относительно  $\bar{t}$  сложно, проще решить относительно  $\bar{r}$ . При таком подходе

$$\begin{aligned} \bar{r} = \left( \frac{3(R^2 + 4a(\bar{t} - \tau))(R^2 + 4a\bar{t})}{8a\tau} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{R^2 + 4a\bar{t}}{R^2 + 4a(\bar{t} - \tau)} \right)^{1/2}. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Задавая значение  $\bar{t} > \tau$ , по формуле (6.1) легко найти радиус  $\bar{r}$  и, таким образом, определить числа  $\bar{r}$ ,  $\bar{t}$ , которым соответствует максимум

$\bar{t}$ , сут	$\bar{r}$ , м	$T(\bar{r}, \bar{t})$ , °С	$T(\bar{r}, \tau)$ , °С
40	0,979	17,87	17,87
45	1,115	13,01	12,52
50	1,264	9,37	8,37
60	1,499	5,87	4,33
70	1,690	4,17	2,48
80	1,856	3,18	1,49
90	2,006	2,53	0,93
100	2,144	2,08	0,59

температуры. Для вычисления величины этого максимума значения  $\bar{t}$  и  $\bar{r}$  надо подставить в решение (4.1).

Отмеченный эффект нарастания температуры в точках, удаленных от центра импульсного очага, после исчезновения очага подтверждается результатами расчетов, представленных в таблице. Расчет проведен для насыпи травяной муки при  $q_0 = 100 \text{ Вт/м}^3$ ;  $R = 0,5 \text{ м}$ ;  $\tau = 40 \text{ сут}$ . Как видно из таблицы, значения избыточной температуры  $T(\bar{r}, \bar{t})$  больше, чем  $T(\bar{r}, \tau)$ .

Анализ показывает, что эффект температурного последствия имеет место только для точек, удаленных от центра очага на расстояние  $\bar{r}$ , большее, чем

$$\bar{r}_0 = \left( \frac{3}{8} \frac{R^2(R^2 + 4a\tau)}{a\tau} \ln \frac{R^2 + 4a\tau}{R^2} \right)^{1/2}.$$

Если  $\bar{r} < \bar{r}_0$ , то максимум избыточной температуры на этом удалении достигается в момент  $t = \tau$ .

Несмотря на слабое проявление эффекта температурного последствия, его следует учитывать при контроле самонагрева сырья, чтобы по замеренному положительному приросту температуры не делать ошибочного заключения о существовании (наличии) очагов, которые уже прекратили тепловыделение, т. е. исчезли в насыпи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сергунов В. С. Дистанционный контроль температуры зерна при хранении. М.: Агропром, 1987.
2. Вогман Л. П., Горшков В. И., Дегтярев А. Г. Пожарная безопасность элеваторов. М.: Стройиздат, 1993.
3. Кирочкин А. Ю., Абрамов Ю. А. Распределение температуры в гнездовом органическом веществе // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. ХИПБ. Вып. 7. Харьков: Фолио, 2000.
4. Абрамов Ю. А., Кирочкин А. Ю. Математические модели тепловых полей насыпи растительного сырья с учетом температуры окружающей среды // Пожаровзрывобезопасность. 2000. № 3. С. 21–27.
5. Ольшанский В. П., Тригуб В. К. К расчету температуры самонагрева сырья гнездовым сферическим очагом // Вестн. Харьковско-го государственного политехнического университета: Сб. науч. тр. Вып. 118. Харьков: ХГПУ, 2000.
6. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). М.: Наука, 1979.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
8. Ольшанский В. П. Температурное поле пластового самонагрева насыпи в силосе // Физика горения и взрыва. 2001. Т. 37, № 1. С. 61–64.
9. Ольшанский В. П. Идентификация параметров гнездового очага при самонагревании сырья // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. ХИПБ. Вып. 8. Харьков: Фолио, 2000.
10. Ольшанский В. П. Температурное поле пластового самонагрева сырья, порожденное очагом импульсного типа // Вестн. Харьковско-го государственного политехнического университета: Сб. науч. тр. Вып. 65. Харьков: ХГПУ, 1999.
11. Ольшанский В. П. Эффект температурного последствия при пластовом самонагревании сырья // Проблемы пожарной безопасности: Сб. науч. тр. ХИПБ. Вып. 7. Харьков: Фолио, 2000.

Поступила в редакцию 7/V 2001 г.