УДК 539.214; 539.374

О ДВУОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

М. А. АРТЕМОВ

(*Воронеж*)

В работе дано приближенное решение плоской задачи о двуосном растяжении толстой пластины (плоская деформация) с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала. Используется теория пластического течения при трансляционном упрочнении, предложенная А. Ю. Ишлинским [1]. Решение проведено методом малого параметра, развитого применительно к упругопластическим задачам теории идеальной пластичности [2].

Двуосное растяжение толстой пластины с круговым отверстием из идеального упругопластического материала рассмотрено Л. А. Галиным [3]. В [2] показано, что для описания точного решения [3] достаточно двух приближений. Ниже определены два приближения для той же задачи с учетом упрочнения и даны оценки влияния упрочнения на пластическое поведение материала.

1. Согласно теории трансляционного упрочнения [1], функцию нагружения для случая плоской деформации в полярных координатах r, θ запишем в виде

$$\left[\sigma_r-\sigma_\theta-c\left(e_r^p-e_\theta^p\right)\right]^2+4\left(\tau_{r\theta}-ce_{r\theta}^p\right)^2=4k^2, \tag{1.1}$$

где σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ — компоненты напряжения; e_r^p, e_θ^p, $e_{r\theta}^p$ — компоненты пластической деформации; c — параметр упрочнения; k — предел пластичности.

Компоненты полной деформации e_r, e_θ, $e_{r\theta}$ слагаются из упругой и пластической составляющих:

$$(e_r, e_\theta, e_{r\theta})=\left(e_r^e, e_\theta^e, e_{r\theta}^e\right)+\left(e_r^p, e_\theta^p, e_{r\theta}^p\right), \tag{1.2}$$

где e_r^e, e_θ^e, $e_{r\theta}^e$ — компоненты упругой деформации.

Упругие деформации будем предполагать несжимаемыми; несжимаемость пластических деформаций — следствие используемого ниже ассоциированного закона пластического течения. В случае плоской деформации имеют место соотношения

$$e_r^e=-e_\theta^e=\frac{1}{4G}(\sigma_r-\sigma_\theta),\quad e_{r\theta}^e=\frac{1}{2G}\tau_{r\theta}, \tag{1.3}$$

где G — модуль сдвига. Из ассоциированного закона течения следует

$$de_r^p+de_\theta^p=0,\qquad \frac{de_r^p-de_\theta^p}{\sigma_r-\sigma_\theta-c\left(e_r^p-e_\theta^p\right)}=\frac{de_{r\theta}^p}{\tau_{r\theta}-ce_{r\theta}^p}. \tag{1.4}$$

Интегрируя первое соотношение (1.4), получим, что сумма $e_r^p+e_\theta^p$ не зависит от параметра нагрузки. Если в начальный момент пластические деформации отсутствуют, то

$$e_r^p+e_\theta^p=0. \tag{1.5}$$

Согласно (1.2), (1.3), (1.5), для полных деформаций имеем условие несжимаемости

$$e_r+e_\theta=0. \tag{1.6}$$

Для компонент полной деформации имеют место соотношения

$$e_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad e_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r},\quad e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right], \tag{1.7}$$

где u, v — компоненты перемещения в радиальном и окружном направлениях.

Рассмотрим вначале упругопластическое равновесие толстостенной осесимметричной трубы радиусов a, b $(a<b)$, находящейся под действием внутреннего и внешнего давлений p_0, p. Очевидно, что в этом случае $v=e_{r\theta}=\tau_{r\theta}=0$.

Отнесем все величины, имеющие размерность длины, к величине радиуса границы, разделяющей упругую и пластическую области, r_s, а все величины, имеющие размерность напряжений, к пределу пластичности k. Обозначим

$$\alpha=a/r_s,\ \beta=b/r_s,\ \rho=r/r_s,\ q_0=p_0/k,$$

$$q=p/k,\ \sigma_\rho=\sigma_r/k,\ \tau_{\rho\theta}=\tau_{r\theta}/k.$$

Для безразмерных σ_θ, c, G, u и v сохраним их прежние обозначения. В упругой зоне трубы ($1 \leqslant \rho \leqslant \beta$) будем иметь [4]

$$\left.\begin{matrix}\sigma_\rho \\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = A \mp B\frac{\beta^2}{\rho^2}, \quad e_\theta = -e_\rho = \frac{B\beta^2}{2G\rho^2}, \quad u = \frac{B\beta^2}{2G\rho} \quad (A,\ B - \text{const}). \tag{1.8}$$

Граничные условия:

$$\sigma_{\rho|\rho=\alpha} = -q_0, \quad \sigma_{\rho|\rho=\beta} = -q. \tag{1.9}$$

В пластической зоне ($\alpha \leqslant \rho \leqslant 1$), согласно (1.1), запишем

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho - c\left(e_\theta^p - e_\rho^p\right) = 2\varkappa, \tag{1.10}$$

где $\varkappa$ — знак выражения, стоящего в левой части.

Из условия непрерывности компонент напряжения при $\rho = 1$, второго граничного условия (1.9) и (1.10) находим

$$A = -q + B, \quad B = \varkappa/\beta^2. \tag{1.11}$$

Условие несжимаемости (1.6) имеет место всюду: в упругой и пластической зонах; отсюда следует, что выражения для компонент перемещений и деформаций (1.8) справедливы в обеих зонах. Тогда, учитывая (1.2), (1.3), (1.8)—(1.11), из уравнения равновесия [3] получим

$$\sigma_\rho = -q_0 + \frac{G\varkappa}{2G+c}\left[4\ln\frac{\rho}{\alpha} + \frac{c}{G}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)\right],$$

$$\sigma_\theta = -q_0 + \frac{G\varkappa}{2G+c}\left[4 + 4\ln\frac{\rho}{\alpha} + \frac{c}{G}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\right].$$

Условие непрерывности компонент напряжений при $\rho = 1$ дает уравнение, связывающее разность $q - q_0$ и радиус r_s:

$$\frac{\varkappa}{\beta^2} = q - q_0 + \frac{\varkappa}{2G+c}\left[2G(1 - 2\ln\alpha) + \frac{c}{\alpha^2}\right]. \tag{1.12}$$

Из (1.12) следует, что $\varkappa = \operatorname{sign}(q_0 - q)$. При $c = 0$ (1.12) совпадает с уравнением, полученным для идеального упругопластического материала [2]. В случае растяжения плоскости с круговым отверстием $\beta \to \infty$, уравнение (1.12) запишется как

$$(2G + c)\,|q_0 - q| - 2G(1 - 2\ln\alpha) - \frac{c}{\alpha^2} = 0. \tag{1.13}$$

Если $c \ll 1$, то из (1.13), представляя уравнение границы раздела упругой и пластической зон в виде $r_s = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c^i r_s^{(i)}$, получим

$$r_s^{(0)} = a\exp\left(\frac{|q_0 - q| - 1}{2}\right), \quad \rho_s^{(1)} = \frac{1}{4G}\left(1 - \frac{1}{\alpha_0^2} - 2\ln\alpha_0\right), \tag{1.14}$$

$$\rho_s^{(2)} = \frac{\rho_s^{(1)}}{2}\left(\rho_s^{(1)} - \frac{1}{\alpha_0^2 G}\right), \quad \alpha_0 = \frac{a}{r_s^{(0)}}, \quad \rho_s^{(i)} = \frac{r_s^{(i)}}{r_s^{(0)}}.$$

В дальнейшем индекс 0 у α будем опускать. Всюду ниже за характерный масштаб длины принят радиус границы раздела упругой и пластической зон для идеального упругопластического материала $r_s^{(0)}$.

2. Рассмотрим двуосное растяжение неограниченной пластины с круговым отверстием радиуса a, находящейся на бесконечности под действием взаимно перпендикулярных растягивающих усилий p_1, p_2, причем на контуре отверстия действует нормальное давление p_0. Решение будем искать методом малого параметра [2], предполагая, что пластическая зона полностью охватывает внутренний контур.

Положим

$$c = \delta c^*, \quad (p_1 - p_2)/2k = \delta p^*,$$

где $\delta \ll 1$, а c^* и p^* — постоянные, принимающие значения от 0 до 1. При $p^* = 0$, $c^* = 1$ имеет место задача, рассмотренная выше, при $c^* = 0$, $p^* = 1$ — задача, рассмотренная в [2].

Все компоненты напряжений, деформаций, перемещений будем искать в виде рядов по степеням δ:

$$(\sigma_{ij}, e_{ij}, u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \left(\sigma_{ij}^{(n)}, e_{ij}^{(n)}, u^{(n)}, v^{(n)}\right). \tag{2.1}$$

При $\delta = 0$ имеет место осесимметричное состояние пластины $v^{(0)} = e^{(0)}_{\rho\theta} = \tau^{(0)}_{\rho\theta} = 0$. Подставляя в (1.1) разложение (2.1), приравнивая члены при одинаковых степенях δ, получим

$$\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_\rho^{(0)} = 2\varkappa, \quad \sigma_\theta^{(1)} - \sigma_\rho^{(1)} - c^*\left(e_\theta^{(0)p} - e_\rho^{(0)p}\right) = 0,$$
$$\varkappa\left[\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_\rho^{(2)} - c^*\left(e_\theta^{(1)p} - e_\rho^{(1)p}\right)\right] + \left(\tau_{\rho\theta}^{(1)}\right)^2 = 0. \tag{2.2}$$

Уравнения (1.4), (1.6) после линеаризации примут вид

$$e_\rho^{(n)} + e_\theta^{(n)} = 0,\ n \geqslant 0, \quad e_{\rho\theta}^{(0)} = 0, \quad \left(de_\theta^{(0)p} - de_\rho^{(0)p}\right)\tau_{\rho\theta}^{(1)} = 2\varkappa de_{\rho\theta}^{(1)p},$$
$$\left(de_\theta^{(0)p} - de_\rho^{(0)p}\right)\left(\tau_{\rho\theta}^{(2)} - c^* e_{\rho\theta}^{(1)p}\right) + \left(de_\theta^{(1)p} - de_\rho^{(1)p}\right)\tau_{\rho\theta}^{(1)} = 2\varkappa de_{\rho\theta}^{(2)p}. \tag{2.3}$$

Для бесконечной пластины в нулевом приближении имеем [2] ($\varkappa = 1$)

$$\sigma_\rho^{(0)p} = -q_0 + 2\ln\frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^{(0)p} = \sigma_\rho^{(0)p} + 2, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0,$$
$$\left.\begin{matrix}\sigma_\rho^{(0)e}\\ \sigma_\theta^{(0)e}\end{matrix}\right\} = q \mp \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad \text{где} \quad q = \frac{p_1 + p_2}{2k}. \tag{2.4}$$

Здесь и ниже компонентам напряжений и перемещений в упругой зоне приписан индекс e, в пластической — p. Всюду в пластине

$$u^{(0)} = \frac{1}{2G\rho}, \quad e_\theta^{(0)} = -e_\rho^{(0)} = \frac{1}{2G\rho^2}. \tag{2.5}$$

Граница раздела упругой и пластической зон в нулевом приближении определяется первым уравнением в (1.14).

Определим первое приближение. Согласно второму соотношению (2.2), следует найти пластические деформации. Из (1.2), (1.3), (2.5)

$$e_\rho^{(0)p} = -e_\theta^{(0)p} = \frac{1}{2G}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right). \tag{2.6}$$

Уравнения равновесия в силу линейности сохраняют свой вид для любого приближения:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^{(n)}}{\partial\rho} + \frac{\sigma_\rho^{(n)} - \sigma_\theta^{(n)}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(n)}}{\partial\theta} = 0,$$
$$\frac{\partial\tau_{\rho\theta}^{(n)}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^{(n)}}{\partial\theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(n)}}{\rho} = 0. \tag{2.7}$$

Уравнениям (2.7) можно удовлетворить, полагая

$$\sigma_\rho^{(n)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(n)}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi^{(n)}}{\partial\theta^2},$$
$$\sigma_\theta^{(n)} = \frac{\partial^2\Phi^{(n)}}{\partial\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(n)} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(n)}}{\partial\theta}\right). \tag{2.8}$$

Из (2.2), (2.6), (2.8) получим

$$\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\theta^2} = \frac{c^*}{G}\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right). \tag{2.9}$$

Граничные условия на внутреннем контуре пластической зоны имеют вид ($\rho = \alpha$)

$$\sigma_\rho^{(n)p} = \tau_{\rho\theta}^{(n)p} = 0, \quad n \geqslant 1. \tag{2.10}$$

Согласно (2.9), (2.8), (2.10), находим

$$\sigma_\rho^{(1)p} = \frac{c^*}{G}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\rho^2} - 2\ln\frac{\rho}{\alpha}\right),$$
$$\sigma_\theta^{(1)p} = \sigma_\rho^{(1)p} + \frac{c^*}{G}\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right), \quad \tau_{\rho\theta}^{1(p)} = 0. \tag{2.11}$$

Граничные условия на бесконечности имеют вид [2]

$$\sigma_\rho^{(1)\infty e} = -p^*\cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)\infty e} = p^*\sin 2\theta; \tag{2.12}$$

$$\sigma_\rho^{(n)\infty e} = \tau_{\rho\theta}^{(n)\infty e} = 0, \quad n \geqslant 2. \tag{2.13}$$

Условие сопряжения компонент напряжений в первом приближении дает [2]

$$\sigma_\rho^{(1)e} = \sigma_\rho^{(1)p}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = \tau_{\rho\theta}^{(1)p} \text{ при } \rho = 1. \tag{2.14}$$

Используя граничные условия (2.12), (2.14), выпишем выражения для компонент напряжений и перемещений в упругой зоне:

$$\sigma_\rho^{(1)e} = \frac{a_0}{\rho^2} - p^*\left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right)\cos 2\theta, \tag{2.15}$$

$$\sigma_\theta^{(1)e} = -\frac{a_0}{\rho^2} + p^*\left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right)\cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = p^*\left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right)\sin 2\theta,$$

$$u^{(1)e} = -\frac{a_0}{2G\rho} - \frac{p^*}{2G}\left(\rho + \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\rho^3}\right)\cos 2\theta,$$

$$v^{(1)e} = \frac{p^*}{2G}\left(\rho + \frac{1}{\rho^3}\right)\sin 2\theta, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{c^*}{2G}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 + 2\ln\alpha\right).$$

Используя условие сопряжения $\left[\sigma_\theta^{(1)} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)}}{d\rho}\rho_s^{(1)}\right] = 0$ при $\rho = 1$, следуя [2], получим

$$\rho_s^{(1)} = -\frac{a_0}{2} + p^*\cos 2\theta. \tag{2.16}$$

Из условия сопряжения перемещений [2], которое сводится к виду

$$u^{(1)e} = u^{(1)p}, \quad v^{(1)e} = v^{(1)p} \text{ при } \rho = 1,$$

и выражений (2.15) получим граничные условия для перемещений в пластической зоне

$$u^{(1)p} = \frac{a_0}{2G} - \frac{p^*}{G}\cos 2\theta, \quad v^{(1)p} = \frac{p^*}{G}\sin 2\theta. \tag{2.17}$$

Из (2.3), (2.11) имеем

$$e_\rho^{(1)} + e_\theta^{(1)} = 0, \quad de_{\rho\theta}^{(1)p} = 0. \tag{2.18}$$

Следуя [2], заметим, что так как $de_{\rho\theta}^{(1)p} = d\lambda\,\frac{\partial e_{\rho\theta}^{(1)p}}{\partial\lambda}$ (λ — параметр нагрузки), то, согласно (2.17), $e_{\rho\theta}^{(1)p}$ не зависит от изменения нагрузки. В начальный момент пластические деформации равны нулю, значит,

$$e_{\rho\theta}^{(1)p} = e_{\rho\theta}^{(1)} - \frac{1}{2G}\tau_{\rho\theta}^{(1)p} = e_{\rho\theta}^{(1)} = 0. \tag{2.19}$$

Уравнения (2.18), (2.19) с учетом (1.7) примут вид

$$\frac{\partial u^{(1)p}}{\partial\rho} + \frac{u^{(1)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v^{(1)p}}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial v^{(1)p}}{\partial\rho} - \frac{v^{(1)p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{(1)p}}{\partial\theta} = 0. \tag{2.20}$$

Полагая $u^{(1)p} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\theta}$, $v^{(1)p} = \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\rho}$, из второго уравнения (2.20) получим

$$\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial\theta^2} = 0. \tag{2.21}$$

Используя решение уравнения (2.21), приведенное в [2], и граничные условия (2.17), имеем

$$u^{(1)p} = -\frac{a_0}{2G\rho} - \frac{2p^*}{\sqrt{3}\,G}\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\theta, \quad v^{(1)p} = \frac{2p^*}{\sqrt{3}\,G}\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\sin 2\theta, \tag{2.22}$$

$$e_\rho^{(1)} = -e_\theta^{(1)} = \frac{a_0}{2G\rho^2} + \frac{2p^*}{G\rho}\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\theta, \quad e_{\rho\theta}^{(1)} = 0,$$

где $t = \sqrt{3}\ln\rho$.

Таким образом, первое приближение полностью найдено. По сравнению с решением для идеального упругопластического материала [2] в выражении для границы раздела упругой и пластической зон (2.16) появилась постоянная — $a_0/2$, характеризующая «торможение» распространения пластической зоны за счет упрочнения.

3. Перейдем к определению второго приближения. Из (2.2) и (2.11) находим

$$\sigma_{\theta}^{(2)p} - \sigma_{\rho}^{(2)p} = c^* \left(e_{\theta}^{(1)p} - e_{\rho}^{(1)p}\right). \tag{3.1}$$

Согласно (1.2), (1.3), (2.11), (2.22), будем иметь

$$e_{\theta}^{(1)p} - e_{\rho}^{(1)p} = \frac{c^*}{2G^2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{a_0}{G\rho^2} - \frac{4p^*}{G\rho}\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\theta. \tag{3.2}$$

После подстановки (2.8) и (3.2) в (3.1) получим уравнение, вполне аналогичное (2.9), решая которое по формулам (2.8), учитывая граничные условия (2.10), находим

$$\sigma_{\rho}^{(2)p} = \frac{c^*}{2G}\left[\frac{c^*}{2G}\left(2\ln\frac{\rho}{\alpha} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) + a_0\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\right] + \tag{3.3}$$

$$+ \frac{4c^*p^*}{\sqrt{3}G\rho}\left[\sin t - t_1\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) - \sin t_0\cos t_1\right]\cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)p} = \sigma_{\rho}^{(2)p} + \frac{c^*}{G}\left[\frac{c^*}{2G}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{a_0}{\rho^2} - \frac{4p^*}{\rho}\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\cos 2\theta\right],$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(2)p} = \frac{4c^*p^*}{\sqrt{3}G\rho}\left[\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(t_0 - \frac{\pi}{6}\right)\cos t_1 - t_1\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right]\sin 2\theta,$$

где

$$t_0 = \sqrt{3}\ln\alpha;\ t_1 = \sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha}.$$

Условия сопряжения напряжений во втором приближении имеют вид [2]

$$\left[\sigma_{\rho}^{(2)} + \frac{d\sigma_{\rho}^{(1)}}{d\rho}\rho_s^{(1)} + \frac{d^2\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho^2}\frac{\rho_s^{(1)2}}{2} + \frac{d\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho}\rho_s^{(2)}\right] = 0. \tag{3.4}$$

Условия сопряжения для σ_{θ}, $\tau_{\rho\theta}$ аналогичны. Из (3.4), учитывая (3.3), (2.4), (2.11), (2.15), (2.16), получим ($\rho = 1$)

$$\sigma_{\rho}^{(2)e} = b_0 + c_1\cos 2\theta - p^{*2}\cos 4\theta,\ \tau_{\rho\theta}^{(2)e} = c_2\sin 2\theta - 4p^{*2}\sin 4\theta, \tag{3.5}$$

где $b_0 = -p^{*2} - \frac{a_0}{2}\left(a_0 + \frac{c^*}{G\alpha^2}\right);\ c_1 = 2p^*\left[a_0 + \frac{c^*}{G}\left(\ln\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2t\right)\right];$

$$c_2 = 2p^*\left[2a_0 - \frac{c^*}{G}\left(\ln\alpha - \sin^2 t_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2t_0\right)\right].$$

Для второго приближения в упругой зоне, согласно граничным условиям (3.5) и (2.13), имеем

$$\sigma_{\rho}^{(2)e} = \frac{b_0}{\rho^2} + \left(\frac{2M}{\rho^2} - \frac{N}{\rho^4}\right)\cos 2\theta + p^{*2}\left(\frac{9}{\rho^4} - \frac{10}{\rho^6}\right)\cos 4\theta, \tag{3.6}$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)e} = -\frac{b_0}{\rho^2} + \frac{N}{\rho^4}\cos 2\theta - p^{*2}\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{10}{\rho^6}\right)\cos 4\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(2)e} = \left(\frac{M}{\rho^2} - \frac{N}{\rho^4}\right)\sin 2\theta + 2p^{*2}\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{5}{\rho^6}\right)\sin 4\theta,$$

где $M = c_1 - c_2$; $N = c_1 - 2c_2$. Из условия сопряжения σ_{θ} при $\rho = 1$ во втором приближении определяем

$$\rho_s^{(2)} = \frac{a_0}{8} + \frac{c^*a_0}{4G\alpha^2} - p^*\left[\frac{a_0}{2} - \frac{c^*}{G}\left(\ln\alpha - \sin^2 t_0 + \right.\right. \tag{3.7}$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2t_0\right)\right]\cos 2\theta - \frac{3}{4}p^{*2}(1 - \cos 4\theta).$$

Сделаем несколько замечаний. Формулы (2.11), (2.15), (2.16), (2.22), (3.3), (3.6), (3.7) позволяют оценить влияние упрочнения. При $c^* = 0$ имеет место решение, приведенное в [2]. При $p^* = 0$ (2.16), (3.7) совпадают с (1.14).

Обратим внимание на то, что в соотношения (2.3) входят дифференциалы компонент деформаций. В данном случае $de_{ij}^p \approx d\lambda \partial e_{ij}^p / \partial \lambda$. В задачах, подобных рассмотренной, удобно принять за параметр нагрузки величину ρ. Интегрирование по пластическим деформациям следует вести от нуля до текущего значения пластических деформаций, а по ρ — от единицы до текущего значения ρ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ишлинский А. Ю.** Общая теория пластичности с линейным упрочнением.— Укр. мат. журн., 1954, т. 6, № 3.
2. **Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.** Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978.
3. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
4. **Филоненко-Бородич М. М.** Теория упругости. М.: Госиздат, 1959.

Поступила 10/VIII 1984 г.