

ТЕРМОУПРУГИЙ КОНТАКТ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ФРИКЦИОННЫМ ТЕПЛООБРАЗОВАНИЕМ

УДК 539.3

Д. В. Грилицкий, П. П. Краснюк

Львовский государственный университет им. И. Франко, 290602 Львов

В осесимметричной постановке исследуется задача термоупругости о контактном взаимодействии двух круглых неограниченных цилиндров с учетом теплообразования от действия сил трения, зависящих от времени и изменяющихся по общей оси трибосистемы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трибосистему, состоящую из двух круглых пустотелых неограниченных цилиндров, вставленных без зазора один в другой (на рис. 1 показано осевое сечение трибосистемы). Круглый цилиндр с внутренним радиусом a_1 и внешним a_0 вставлен в другой такой же формы цилиндр с внутренним радиусом a_0 и внешним a_2 . На боковых поверхностях двухслойного пакета задаются радиальные напряжения q_1 и q_2 , зависящие от осевой координаты и времени.

Предположим, что один из цилиндров вращается относительно другого с угловой скоростью ω , изменяющейся со временем. За счет действия сил трения, возникающих на соприкасающихся поверхностях цилиндров и подчиненных закону Амонтона, образуется тепло. Тепловой контакт элементов трибосистемы неидеальный. Между неконтактирующими поверхностями пакета и внешней средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Динамическими эффектами, которые могут возникнуть от действия внешней нагрузки, пренебрегаем. Определим поля температур, тепловых потоков, перемещений и напряжений в двухслойном цилиндре.

Отнесем данное трибосопряжение к цилиндрической системе координат, выбрав некоторое сечение в качестве нулевого и направив ось z по оси цилиндра. Предположим, что поведение на бесконечности внешней нагрузки таково, что оно допускает применение интегрального преобразования Фурье по координате z . Поскольку внешняя нагрузка не зависит от угловой координаты θ , то для определения температурных полей, тепловых потоков, термоупругих напряжений и перемещений данная задача рассматривается в осесимметричной постановке.

При сделанных предположениях задача сводится к построению решений системы,

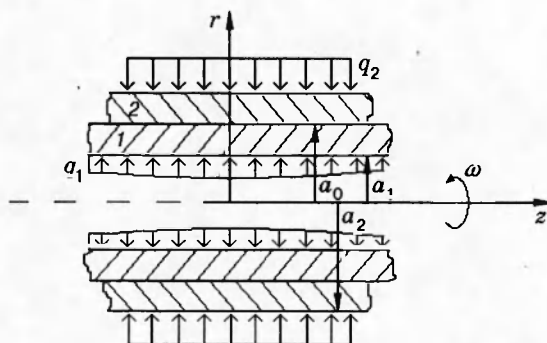


Рис. 1

включающей в себя дифференциальные уравнения теплопроводности

$$\partial_r^2 T_j + r^{-1} \partial_r T_j + \partial_z^2 T_j = k_j^{-1} \partial_\tau T_j; \quad (1.1)$$

равновесия

$$\partial_r \sigma_r^{(j)} + r^{-1} (\sigma_r^{(j)} - \sigma_\theta^{(j)}) + \partial_z \tau_{rz}^{(j)} = 0, \quad \partial_r \tau_{rz}^{(j)} + r^{-1} \tau_{rz}^{(j)} + \partial_z \sigma_z^{(j)} = 0; \quad (1.2)$$

совместности деформаций

$$\partial_r \varepsilon_\theta^{(j)} + r^{-1} (\varepsilon_\theta^{(j)} - \varepsilon_r^{(j)}) = 0, \quad r \partial_z^2 \varepsilon_\theta^{(j)} + \partial_r \varepsilon_z^{(j)} = \partial_z \gamma_{rz}^{(j)}; \quad (1.3)$$

соотношения закона Гука

$$\begin{aligned} E_j \varepsilon_r^{(j)} &= \sigma_r^{(j)} - \nu_j (\sigma_\theta^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, & E_j \varepsilon_\theta^{(j)} &= \sigma_\theta^{(j)} - \nu_j (\sigma_r^{(j)} + \sigma_z^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, \\ E_j \varepsilon_z^{(j)} &= \sigma_z^{(j)} - \nu_j (\sigma_r^{(j)} + \sigma_\theta^{(j)}) + E_j \alpha_j T_j, & E_j \gamma_{rz}^{(j)} &= 2(1 + \nu_j) \tau_{rz}^{(j)} \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

которые удовлетворяют начальным

$$T_j(r, z, 0) = 0, \quad (1.5)$$

граничным и контактными условиями

$$r = a_1: \quad \partial_r T_1 = \gamma_1 T_1, \quad \sigma_r^{(1)} = -q_1(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad (1.6)$$

$$r = a_2: \quad \partial_r T_2 = -\gamma_2 T_2, \quad \sigma_r^{(2)} = -q_2(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} r = a_0: \quad \lambda_1 \partial_r T_1 - \lambda_2 \partial_r T_2 &= f \omega(\tau) a_0 p(z, \tau), \quad \lambda_1 \partial_r T_1 + \lambda_2 \partial_r T_2 + h(T_1 - T_2) = 0, \\ \sigma_r^{(1)} &= \sigma_r^{(2)} = -p(z, \tau), \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)} = 0, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь r, z — радиальная и осевая координаты; τ — время; $p(z, \tau)$ — контактное давление; $\omega(\tau)$ — относительная угловая скорость вращения; T_j — температура; $\sigma_r^{(j)}, \sigma_\theta^{(j)}, \sigma_z^{(j)}$ — радиальное, тангенциальное и осевое нормальные напряжения; $\tau_{rz}^{(j)}$ — касательное напряжение; $\varepsilon_r^{(j)}, \varepsilon_\theta^{(j)}, \varepsilon_z^{(j)}$ — радиальная, тангенциальная и осевая линейные деформации; $\gamma_{rz}^{(j)}$ — деформация сдвига; $u_r^{(j)}$ — радиальное перемещение; E_j — модуль Юнга; $\nu_j, \lambda_j, k_j, \alpha_j$ — соответственно коэффициенты Пуассона, теплопроводности, температуропроводности и линейного теплового расширения; $\gamma_j = \alpha_j / \lambda_j$; $\bar{\alpha}_j$ — коэффициент теплообмена; h — термическая проводимость поверхности контакта; f — коэффициент трения. В этих и следующих соотношениях $j = 1$ соответствует внутреннему цилиндру, $j = 2$ — внешнему.

2. Построение решения. Из постановки задачи следует, что характер поведения решения зависит от распределения внешней нагрузки. Предположим, что внешняя нагрузка распределена симметрично относительно сечения $z = 0$. Тогда и решение поставленной задачи будет симметричным относительно нулевого сечения. В этом случае получаем дополнительные условия симметрии ($\partial_z T_j(r, 0, \tau) = 0$), и для решения поставленной задачи можно воспользоваться интегральным косинус-преобразованием Фурье.

Задачу (1.1)–(1.8) приведем к системе двух интегральных уравнений относительно функций

$$f_j(z, \tau) = (-1)^{j-1} \partial_r T_j(a_0, z, \tau), \quad (2.1)$$

пропорциональных тепловым потокам на поверхности контакта. С этой целью температуру цилиндров выразим через введенные функции f_j , предварительно решив уравнение (1.1) при начальном условии (1.5) и тепловых граничных условиях (1.6), (1.7) и (2.1). При-

менив к данной задаче теплопроводности интегральное косинус-преобразование Фурье [1] по осевой координате z

$$T_j(r, \xi, \tau) = \int_0^{\infty} T_j(r, z, \tau) \cos(\xi z) dz$$

и теорему Дюамеля [1] по времени τ , для определения трансформанты температуры T_j получим интегральное представление

$$T_j(r, \xi, \tau) = \partial_\tau \int_0^\tau \bar{f}_j(\xi, y) \Phi_j(r, \xi, \tau - y) dy, \quad (2.2)$$

где $\bar{f}_j(\xi, \tau)$ — трансформанта Фурье функции $f_j(z, \tau)$. Ядро интегрального представления находится из решения вспомогательной задачи

$$\begin{aligned} \partial_r^2 \bar{\Phi}_j + r^{-1} \partial_r \bar{\Phi}_j - \xi^2 \bar{\Phi}_j &= k_j^{-1} \partial_\tau \bar{\Phi}_j, & \bar{\Phi}_j(r, \xi, 0) &= 0, \\ \partial_r \bar{\Phi}_j(a_0, \xi, \tau) &= \pm 1, & \partial_r \bar{\Phi}_j(a_j, \xi, \tau) &= \pm \gamma_j \bar{\Phi}_j(a_j, \xi, \tau). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этих и следующих соотношениях верхний знак соответствует $j = 1$, нижний — $j = 2$.

Искомую функцию $\bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau)$ представим в виде суммы двух функций:

$$\bar{\Phi}_j(r, \xi, \tau) = \bar{\Phi}_{j1}(r, \xi) + \bar{\Phi}_{j2}(r, \xi, \tau). \quad (2.4)$$

Первое слагаемое является решением стационарного уравнения теплопроводности и удовлетворяет неоднородным граничным условиям задачи (2.3):

$$\partial_r^2 \bar{\Phi}_{j1} + r^{-1} \partial_r \bar{\Phi}_{j1} - \xi^2 \bar{\Phi}_{j1} = 0, \quad \partial_r \bar{\Phi}_{j1}(a_0, \xi) = \pm 1, \quad \partial_r \bar{\Phi}_{j1}(a_j, \xi) = \pm \gamma_j \bar{\Phi}_{j1}(a_j, \xi). \quad (2.5)$$

Второе слагаемое есть решение следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} \partial_r^2 \bar{\Phi}_{j2} + r^{-1} \partial_r \bar{\Phi}_{j2} - \xi^2 \bar{\Phi}_{j2} &= k_j^{-1} \partial_\tau \bar{\Phi}_{j2}, & \bar{\Phi}_{j2}(r, \xi, 0) &= -\bar{\Phi}_{j1}(r, \xi), \\ \partial_r \bar{\Phi}_{j2}(a_0, \xi, \tau) &= 0, & \partial_r \bar{\Phi}_{j2}(a_j, \xi, \tau) &= \pm \gamma_j \bar{\Phi}_{j2}(a_j, \xi, \tau). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для определения функций $\bar{\Phi}_{j1}(r, \xi)$ получили дифференциальное уравнение Бесселя. Удовлетворив граничным условиям, имеем

$$\bar{\Phi}_{j1}(r, \xi) = \pm \xi^{-1} \frac{I_0(\xi r)[\xi K_1(\xi a_j) \pm \gamma_j K_0(\xi a_j)] + K_0(\xi r)[\xi I_1(\xi a_j) \mp \gamma_j I_0(\xi a_j)]}{I_1(\xi a_0)[\xi K_1(\xi a_j) \pm \gamma_j K_0(\xi a_j)] - K_1(\xi a_0)[\xi I_1(\xi a_j) \mp \gamma_j I_0(\xi a_j)]} \quad (2.7)$$

($I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка ν [2]).

Для решения задачи (2.6) применим конечное интегральное преобразование Ханкеля [1] по радиальной координате r :

$$\bar{\Phi}_{j2}(\mu_{j,m}, \xi, \tau) = \pm \int_{a_j}^{a_0} r \bar{\Phi}_{j2}(r, \xi, \tau) K_j(r, \mu_{j,m}) dr.$$

Здесь

$$K_j(r, \mu_{j,m}) = W_0(\mu_{j,m} r, \mu_{j,m} a_0) N_{j,m}^{-1} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

— ортонормированное ядро, определяемое из решения задачи Штурма — Лиувилля $\partial_r^2 K_j + r^{-1} \partial_r K_j + \mu_{j,m}^2 K_j = 0$, $\partial_r K_j = 0$, $r = a_0$; $\partial_r K_j = \pm \gamma_j K_j$, $r = a_j$; $\mu_{j,m}$ — корни характеристического уравнения $\mu_j W_1(\mu_j a_j, \mu_j a_0) \pm \gamma_j W_0(\mu_j a_j, \mu_j a_0) = 0$; $N_{j,m}$ — нормирующий делитель; $N_{j,m}^2 = \pm 0,5 [a_0^2 W_0^2(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0) - a_j^2 [W_0^2(\mu_{j,m} a_j, \mu_{j,m} a_0) + W_1^2(\mu_{j,m} a_j, \mu_{j,m} a_0)]]$. В предыдущих соотношениях введены функции

$$W_0(x, y) = J_0(x) Y_1(y) - Y_0(x) J_1(y), \quad W_1(x, y) = J_1(x) Y_1(y) - Y_1(x) J_1(y),$$

где $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка ν [2].

Применив интегральное преобразование к задаче (2.6) и решив полученное при этом обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, находим формулу для определения трансформанты Ханкеля функции $\bar{\Phi}_{j2}(r, \xi, \tau)$:

$$\bar{\Phi}_{j2}(\mu_{j,m}, \xi, \tau) = -\bar{\Phi}_{j1}(\mu_{j,m}, \xi) \exp[-k_j(\xi^2 + \mu_{j,m}^2)\tau]. \quad (2.9)$$

Здесь

$$\bar{\Phi}_{j1}(\mu_{j,m}, \xi) = a_0 W_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0) ((\xi^2 + \mu_{j,m}^2) N_{j,m})^{-1} \quad (2.10)$$

— трансформанта Ханкеля функции $\bar{\Phi}_{j1}(r, \xi)$. Обращение трансформанты Ханкеля проводится по формуле

$$\bar{\Phi}_{j2}(r, \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Phi}_{j2}(\mu_{j,m}, \xi, \tau) K_j(r, \mu_{j,m}).$$

Используя соотношения (2.8)–(2.10), запишем решение задачи (2.6) в виде

$$\bar{\Phi}_{j2}(r, \xi, \tau) = -a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_0(\mu_{j,m} r, \mu_{j,m} a_0) W_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{N_{j,m}^2 (\xi^2 + \mu_{j,m}^2)} \exp[-k_j(\xi^2 + \mu_{j,m}^2)\tau]. \quad (2.11)$$

Таким образом, формулы (2.2), (2.4), (2.7), (2.11) определяют выражение для трансформанты Фурье температуры каждого из цилиндров. При $\xi = 0$ эти формулы остаются в силе, если принять во внимание, что $\Phi_{j1}(r, 0) = \pm a_0 \ln(r/a_j) + a_0 [a_j \gamma_j]^{-1}$.

Задачу термоупругости (1.2)–(1.4) при заданных на границе напряжениях (граничные условия (1.6)–(1.8)) решим методом, изложенным в [3, 4]. Для каждого цилиндра вводится функция напряжений $\varphi_j(r, z, \tau)$, и задача приводится к неоднородному бигармоническому уравнению

$$DD\varphi_j + 2D\partial_z^2\varphi_j + \partial_z^4\varphi_j = F_j(r, z, \tau) \quad (2.12)$$

при однородных граничных условиях

$$D\varphi_j = 0, \quad \partial_r\varphi_j = r^{-1}(1 - \nu_j)\varphi_j, \quad r = a_0, a_j. \quad (2.13)$$

В соотношениях (2.12), (2.13) D — дифференциальный оператор, равный $r\partial_r r^{-1}\partial_r$;

$$\begin{aligned} F_j(r, z, \tau) = & -\frac{a_j^2}{a_0^2 - a_j^2} \left(\frac{a_0^2}{1 - \nu_j} + \frac{r^2}{1 + \nu_j} \right) \left[\partial_z^2 q_j(z, \tau) + \frac{E_j \alpha_j}{a_j} \partial_r T_j(a_j, z, \tau) + \right. \\ & \left. + \frac{E_j \alpha_j}{a_j^2} k_j^{-1} \partial_r \int_{a_j}^{a_0} \rho T_j(\rho, z, \tau) d\rho \right] + \\ & + \frac{a_0^2}{a_0^2 - a_j^2} \left(\frac{a_j^2}{1 - \nu_j} + \frac{r^2}{1 + \nu_j} \right) \left[\partial_z^2 p(z, \tau) + \frac{E_j \alpha_j}{a_0} \partial_r T_j(a_0, z, \tau) \right] - \frac{E_j \alpha_j}{1 - \nu_j} k_j^{-1} \partial_r \int_{a_0}^r \rho T_j(\rho, z, \tau) d\rho. \end{aligned}$$

Радиальные перемещения определяются по формуле

$$\begin{aligned} u_r^{(j)}(r, z, \tau) = & -\frac{1 - \nu_j^2}{E_j} r^{-1} \left[-\frac{q_j(z, \tau) a_j^2}{a_0^2 - a_j^2} \left(\frac{a_0^2}{1 - \nu_j} + \frac{r^2}{1 + \nu_j} \right) + \frac{p(z, \tau) a_0^2}{a_0^2 - a_j^2} \left(\frac{a_j^2}{1 - \nu_j} + \frac{r^2}{1 + \nu_j} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{E_j \alpha_j}{a_0^2 - a_j^2} \left(\frac{a_0^2}{1 - \nu_j} + \frac{r^2}{1 + \nu_j} \right) \int_{a_j}^{a_0} \rho T_j(\rho, z, \tau) d\rho - \frac{E_j \alpha_j}{1 - \nu_j} \int_{a_0}^r \rho T_j(\rho, z, \tau) d\rho - \partial_z^2 \varphi_j(r, z, \tau) \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{\nu_j(1+\nu_j)}{E_j} r^{-1} D\varphi_j(r, z, \tau). \quad (2.14)$$

Применив интегральное косинус-преобразование Фурье к уравнению (2.12) и граничным условиям (2.13), для трансформанты $\varphi_j(r, \xi, \tau)$ получим неоднородное дифференциальное уравнение 4-го порядка. Решение этого уравнения находим как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения представляется линейной комбинацией модифицированных функций Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядка. Для определения четырех неизвестных коэффициентов общего решения используем граничные условия, после удовлетворения которых получим систему четырех линейных алгебраических уравнений. Решив систему, для каждого цилиндра находим выражение трансформанты функции напряжения $\bar{\varphi}_j(r, \xi, \tau)$. Имея выражение трансформанты функции напряжений, можем записать формулы для трансформант перемещений, деформаций и напряжений.

Здесь запишем лишь выражение для трансформанты радиальных перемещений на поверхности контакта цилиндров:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^{(j)}(a_0, \xi, \tau) = & \frac{1-\nu_j^2}{E_j} \left(a_0 p(\xi, \tau) \frac{\Delta_1(a_j, \xi)}{\Delta(a_j, \xi)} - \bar{a}_j \bar{q}_j(\xi, \tau) \frac{\Delta_2(a_j, \xi)}{\Delta(a_j, \xi)} \right) + \\ & + \partial_\tau \int_0^\tau \bar{f}_j(\xi, y) \bar{H}_j(\xi, \tau - y) dy, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$\bar{H}_j(\xi, \tau) = \bar{H}_{j1}(\xi) + \bar{H}_{j2}(\xi, \tau);$$

$$\bar{H}_{j1}(\xi) = \frac{\alpha_j(1-\nu_j^2)}{\xi^2} \left[\frac{\Delta_2(a_j, \xi)}{\Delta(a_j, \xi)} \partial_r \bar{\Psi}_{j1}(a_j, \xi) \mp \left(\frac{\Delta_1(a_j, \xi)}{\Delta(a_j, \xi)} - \frac{1}{1-\nu_j} \right) \right];$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{j2}(\xi, \tau) = & \alpha_j(1+\nu_j)a_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_0(\mu_{j,m}a_0, \mu_{j,m}a_0)}{N_{j,m}^2(\xi^2 + \mu_{j,m}^2)^2} \left[\xi^2 \left(\frac{\Delta_1(a_j, \xi)}{\Delta(a_j, \xi)} a_0 W_0(\mu_{j,m}a_0, \mu_{j,m}a_0) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\Delta_2(a_j, \xi)}{\Delta(a_j, \xi)} a_j W_0(\mu_{j,m}a_j, \mu_{j,m}a_0) \right) + \frac{\Delta_3(a_j, \xi)}{\Delta(a_j, \xi)} \mu_{j,m} W_1(\mu_{j,m}a_j, \mu_{j,m}a_0) \right] \exp[-k_j(\xi^2 + \mu_{j,m}^2)\tau]; \\ \Delta(a_j, \xi) = & 4(1-\nu_j) + a_j^2 \xi^2 + a_0^2 \xi^2 + (2(1-\nu_j) + a_j^2 \xi^2)(2(1-\nu_j) + a_0^2 \xi^2) [I_1(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) - \\ & - I_1(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)]^2 - a_j^2 \xi^2 (2(1-\nu_j) + a_0^2 \xi^2) [I_0(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]^2 - \\ & - a_0^2 \xi^2 (2(1-\nu_j) + a_j^2 \xi^2) [I_1(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) + I_0(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)]^2 + \\ & + a_j^2 a_0^2 \xi^4 [I_0(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) - I_0(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(a_j, \xi) = & 2[1 + (2(1-\nu_j) + a_j^2 \xi^2) [I_1(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)]^2 - \\ & - a_j^2 \xi^2 [I_0(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]^2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(a_j, \xi) = & 2a_0 \xi [I_1(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) + I_0(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)] - \\ & - 2a_j \xi [I_0(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) + I_1(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3(a_j, \xi) = & 2[(2(1-\nu_j) + a_j^2 \xi^2) [I_1(a_j \xi) K_1(a_0 \xi) - I_1(a_0 \xi) K_1(a_j \xi)] - \\ & - a_j a_0 \xi^2 [I_0(a_j \xi) K_0(a_0 \xi) - I_0(a_0 \xi) K_0(a_j \xi)]]; \end{aligned}$$

Используя условие равенства радиальных перемещений на поверхности контакта и соотношения (2.15), получим интегральное представление для трансформанты контактного давления:

$$\bar{p}(\xi, \tau) = \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \left(\frac{1 - \nu_k^2}{E_k} a_k \bar{q}_k(\xi, \tau) \frac{\Delta_2(a_k, \xi)}{\Delta(a_k, \xi)} - \partial_\tau \int_0^\tau f_k(\xi, y) \bar{H}_k(\xi, \tau - y) dy \right) \right] \times \\ \times \left[a_0 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{\Delta_1(a_k, \xi)}{\Delta(a_k, \xi)} \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

При этом

$$\bar{p}(0, \tau) = \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \left(\frac{\bar{q}_k(0, \tau)}{E_k} \frac{2a_k^2}{a_0^2 - a_k^2} - \partial_\tau \int_0^\tau f_k(0, y) \bar{H}_k(0, \tau - y) dy \right) \right] \times \\ \times \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1}{E_k} \left(\frac{a_0^2 + a_k^2}{a_0^2 - a_k^2} - \nu_k \right) \right]^{-1}.$$

Здесь

$$\bar{H}_{j1}(0) = \alpha_j a_0 \left(\mp \frac{a_0^2}{a_0^2 - a_j^2} \ln \left(\frac{a_0}{a_j} \right) \pm \left(0,5 \mp \frac{1}{a_j \gamma_j} \right) \right); \\ \bar{H}_{j2}(0, \tau) = -\frac{2\alpha_j a_j a_0}{a_0^2 - a_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_1(\mu_{j,m} a_j, \mu_{j,m} a_0) W_0(\mu_{j,m} a_0, \mu_{j,m} a_0)}{N_{j,m}^2 \mu_{j,m}^3} \exp[-k_j \mu_{j,m}^2 \tau].$$

Применив к теплофизическим условиям контакта (1.8) интегральное косинус-преобразование Фурье и используя соотношения (2.1), (2.2) и (2.16), получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода для определения трансформант Фурье функций $f_j(z, \tau)$:

$$\sum_{k=1}^2 \lambda_k \bar{f}_k(\xi, \tau) = f\omega(\tau) \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \left(\frac{1 - \nu_k^2}{E_k} a_k \bar{q}_k(\xi, \tau) \frac{\Delta_2(a_k, \xi)}{\Delta(a_k, \xi)} - \partial_\tau \int_0^\tau \bar{f}_k(\xi, y) \bar{H}_k(\xi, \tau - y) dy \right) \right] \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{\Delta_1(a_k, \xi)}{\Delta(a_k, \xi)} \right]^{-1}, \quad (2.17) \\ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \left[\lambda_k \bar{f}_k(\xi, \tau) + h \partial_\tau \int_0^\tau f_k(\xi, y) \bar{\Phi}_k(a_0, \xi, \tau - y) dy \right] = 0.$$

Решив эту систему интегральных уравнений, найдем трансформанты контактного давления и функций $f_j(z, \tau)$. Вместе с выражениями для трансформант функций напряжений $\varphi_j(r, \xi, \tau)$ они дают полное аналитическое решение поставленной задачи в трансформантах интегрального косинус-преобразования Фурье.

Оригинал определяется формулой обращения [1]

$$\varphi_j(r, z, \tau) = 2\pi^{-1} \int_0^\infty \bar{\varphi}_j(r, \xi, \tau) \cos(z\xi) d\xi, \quad (2.18)$$

а значение интеграла находится численно.

3. Построение численного алгоритма. Система интегральных уравнений (2.17) решается численным методом. Исследование поведения трибосопряжения производится на

интервале $[0, \tau^*]$, который разбивается с постоянным шагом τ_1 на N частей. Тогда в каждый момент времени $\tau_n = n\tau_1$ ($n = 1, \dots, N$) интегралы заменяются конечными суммами по схеме

$$\int_0^{\tau_n} f(y)F(\tau_n - y) dy = \tau_1 \left(0,5f(0)F(\tau_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(\tau_i)F(\tau_n - \tau_i) \right),$$

где

$$\int_0^{\tau_1} f(y)F(\tau_1 - y) dy = 0,5\tau_1 f(0)F(\tau_1).$$

При записи этих соотношений использовались квадратурная формула трапеций и характер поведения функций $\Phi_j(r, \xi, \tau)$ и $H_j(\xi, \tau)$: по построению (задача (2.3)) $\Phi_j(r, \xi, 0) = 0$, такое же значение имеет при $\tau = 0$ и функция $\tilde{H}_j(\xi, \tau)$. Производные функций заменяются конечными разностями по схеме $d_\tau T(\tau_n) = 0,5\tau_1^{-1}(T(\tau_{n+1}) - T(\tau_{n-1}))$.

Тогда производные от интегралов в системе (2.17) заменяются соотношениями

$$\begin{aligned} I_n &= \left(\partial_\tau \int_0^\tau f(y)F(\tau - y) dy \right)_{\tau=\tau_n} = 0,25f(0)[F(\tau_{n+1}) - F(\tau_{n-1})] + \\ &+ 0,5 \left(f(\tau_n)F(\tau_1) + f(\tau_{n-1})F(\tau_2) + \sum_{i=1}^{n-2} f(\tau_i)[F(\tau_{n+1} - \tau_i) - F(\tau_{n-1} - \tau_i)] \right) \quad (n = 3, 4, \dots), \\ I_1 &= 0,25f(0)F(\tau_2) + 0,5f(\tau_1)F(\tau_1), \\ I_2 &= 0,25f(0)[F(\tau_3) - F(\tau_1)] + 0,5(f(\tau_1)F(\tau_2) + f(\tau_2)F(\tau_1)). \end{aligned}$$

Легко показать, что $I_0 = 0$.

Анализируя данные соотношения, можем сделать вывод, что система интегральных уравнений (2.17) в каждый момент времени τ_n приводится к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно функций $\bar{f}_j(\xi, \tau_n)$. При этом функции f_j линейным образом зависят от внешней нагрузки: $\bar{f}_j(\xi, \tau_n) = \bar{Q}_{j1}(\xi, \tau_n)\bar{q}_1(\xi, \tau_n) + \bar{Q}_{j2}(\xi, \tau_n)\bar{q}_2(\xi, \tau_n)$. Закономерности такого же характера имеют место и для трансформант температуры, контактного давления и функций напряжений.

Как показал численный анализ, функции $\bar{Q}_{jk}(\xi, \tau_n)$ не являются осциллирующими и достаточно быстро убывают при увеличении ξ . Поэтому при обращении функций $\bar{f}_j(\xi, \tau_n)$ промежутки интегрирования $[0, \infty)$ можем разделить на две части: $[0, \xi^*]$ и $[\xi^*, \infty)$, где ξ^* порядка 1000, и пренебречь интегралом по второму промежутку. Для вычисления интеграла по промежутку $[0, \xi^*]$ используем метод Филона [5] (метод приближенного вычисления интегралов от тригонометрических функций); причем нужно учитывать характер поведения функций q_j . Объясним это на примере.

Пусть $q_1(z, \tau) = 0$, а $q_2(z, \tau) = q_0(\tau)H(L - z)H(L + z)$ ($H(z)$ — функция Хевисайда [1], L — параметр, определяющий интервал приложения внешней нагрузки). В этом случае трансформанта Фурье от внешней нагрузки имеет вид $\bar{q}_2(\xi, \tau) = q_0(\tau)\sin(L\xi)\xi^{-1}$. После дополнительных преобразований получим

$$\bar{f}_j(z, \tau) = 2\pi^{-1}q_0(\tau) \int_0^{\xi^*} \bar{Q}_{j2}(\xi, \tau)\xi^{-1} \sin(L\xi) \cos(z\xi) d\xi =$$

$$= \pi^{-1} q_0(\tau) \int_0^{\xi^*} [\bar{Q}_{j2}(\xi, \tau) - \bar{Q}_{j2}(0, \tau)] \xi^{-1} [\sin(\xi(L+z)) + \sin(\xi(L-z))] d\xi + \\ + Q_{j2}(0, \tau) \pi^{-1} q_0(\tau) [\text{Si}(\xi^*(L+z)) + \text{Si}(\xi^*(L-z))],$$

где

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \sin(x) x^{-1} dx$$

— интегральный синус [2], и можем непосредственно применить формулы Филона.

Численные исследования показали, что для относительной погрешности вычислений в 1 % промежутки $[0, \xi^*]$ достаточно разделить на отрезки с шагом 5 м^{-1} , а τ_1 взять равным 2 с.

4. Анализ результатов. Анализ полученных результатов показывает, что контактное давление (2.16) со временем выходит на стационарное значение, которое совпадает с найденным аналитическим путем значением контактного давления стационарной задачи.

Выражение для трансформанты контактного давления стационарной задачи можем найти из соотношения (2.16) и системы интегральных уравнений (2.17), применив к ним интегральное преобразование Лапласа и используя соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \psi(\tau) = \lim_{s \rightarrow 0} s\psi(s),$$

где $\psi(s)$ — трансформанта Лапласа функции $\psi(\tau)$ [1]. Например, при условии, что $q_j(z, \tau) = q_j^*(z)(1 - \exp(-\beta\tau))$, а $\omega = \omega^* = \text{const}$, получим формулу

$$\bar{p}_{\text{st}}(\xi) = \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{a_k}{a_0} \bar{q}_k^*(\xi) \frac{\Delta_2(a_k, \xi)}{\Delta(a_k, \xi)} \right] \times \\ \times \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1 - \nu_k^2}{E_k} \frac{\Delta_1(a_k, \xi)}{\Delta(a_k, \xi)} - f\omega^* \bar{R}(\xi) \right]^{-1}, \quad (4.1)$$

где $\bar{R}(\xi) = [\bar{H}_{21}(\xi)(\lambda_1 + h\bar{\Phi}_{11}(a_0, \xi)) - \bar{H}_{11}(\xi)(\lambda_2 + h\bar{\Phi}_{21}(a_0, \xi))] / [\lambda_2(\lambda_1 + h\bar{\Phi}_{11}(a_0, \xi)) + \lambda_1(\lambda_2 + h\bar{\Phi}_{21}(a_0, \xi))]$. При $\xi = 0$ имеем

$$\bar{p}_{\text{st}}(0) = \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{\bar{q}_k^*(0)}{E_k} \frac{2a_k^2}{a_0^2 - a_k^2} \right] \left[\sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1}{E_k} \left(\frac{a_0^2 + a_k^2}{a_0^2 - a_k^2} - \nu_k \right) - f\omega^* a_0 R(0) \right]^{-1}.$$

Структура знаменателя выражения (4.1) показывает, что для каждого значения ξ из интервала $[0, \infty)$ существует критическое значение угловой скорости ω^* , при котором трансформанта контактного давления $\bar{p}_{\text{st}}(\xi)$ становится неограниченно большой. Поэтому рассчитывать контактное давление стационарной задачи можно только для таких значений ω^* , которые меньше $\min \omega_{\text{кр}}^*(\xi)$. Например, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ имеем $\min \omega_{\text{кр}}^* \approx 3,32 \text{ с}^{-1}$. Увеличение параметра α_1 уменьшает $\min \omega_{\text{кр}}^*$, а уменьшение α_1 увеличивает $\min \omega_{\text{кр}}^*$. Другие параметры при численных расчетах принимались следующими: $E_j = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_j = 0,3$, $\lambda_j = 50 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $\bar{\alpha}_j = 1 \text{ кВт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, $k_j = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $h = 10 \text{ кВт/(м}^2 \cdot \text{К)}$, $f = 0,1$, $a_1 = 3,5 \text{ см}$, $a_2 = 6 \text{ см}$, $a_0 = 5 \text{ см}$, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\alpha_1 = 1,2; 6; 12; 15 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$, $\omega^* = 1; 2 \text{ с}^{-1}$. Внешняя нагрузка изменялась по закону $q_1^*(z) = 0$, $q_2^*(z) = q^* H(L-z)H(L+z)$, где $q^* = 20 \text{ МПа}$, $L = 0,1 \text{ м}$.

Зависимость контактного давления стационарной задачи от коэффициентов линейного теплового расширения выбрана не случайно. Как показали численные исследования,

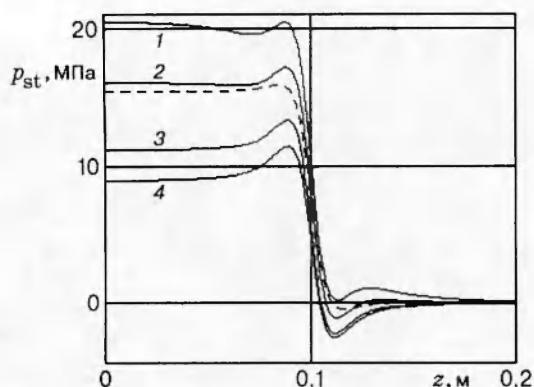


Рис. 2

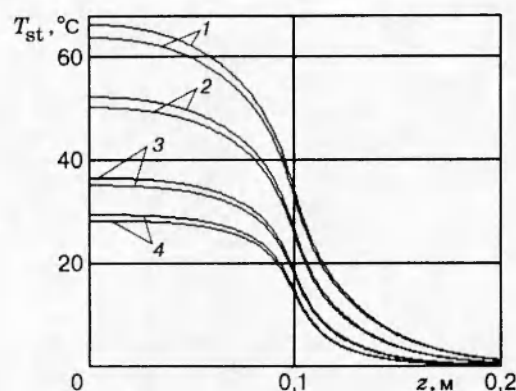


Рис. 3

увеличение параметра α_1 вызывает рост контактного давления в термоупругой задаче по отношению к контактному давлению чисто в упругой задаче. При этом увеличение интенсивности теплообразования за счет возрастания ω^* увеличивает контактное давление. Уменьшение коэффициента линейного теплового расширения α_1 вызывает противоположные эффекты.

На рис. 2 приведены графики изменения по оси цилиндра контактного давления стационарной задачи в зависимости от параметра α_1 . Кривые 1–4 соответствуют $\alpha_1 = 15; 12; 6; 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ($\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\omega^* = 1 \text{ c}^{-1}$), штриховая линия — контактному давлению упругой задачи. Существование зоны отрыва при этой закономерности нагружения объясняется разрывным характером внешней нагрузки. Отметим, что увеличение α_1 вызывает такое расширение внутреннего цилиндра, при котором отрыв даже при разрывной внешней нагрузке не наблюдается.

На рис. 3 показано распределение стационарной контактной температуры по оси двухслойного цилиндра. Номера кривых отвечают значениям α_1 на рис. 2 (верхняя кривая — для первого тела, нижняя — для второго). Скачок температуры на поверхности $r = a_0$ обусловлен неидеальностью теплового контакта.

При расчетах контактного давления нестационарной задачи выбирались две закономерности изменения внешней нагрузки и угловой скорости:

- 1) $q_1(z, \tau) = 0$, $q_2(z, \tau) = q_2^*(z)(1 - \exp(-\beta\tau))$, $\omega(\tau) = \omega^*$;
- 2) $q_1(z, \tau) = 0$, $q_2(z, \tau) = q_2^*(z)$, $\omega(\tau) = \omega^*(1 - \exp(-\beta\tau))$;

при этом параметр $\beta = 0,01 \text{ c}^{-1}$. Численные исследования показали, что время выхода

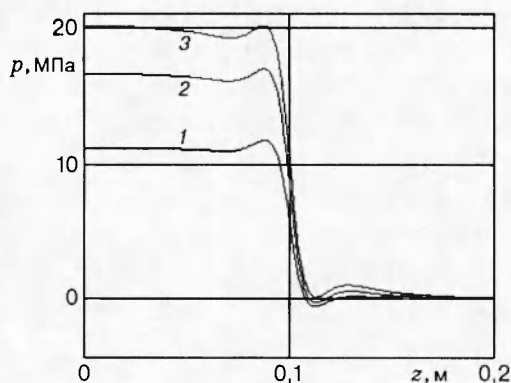


Рис. 4

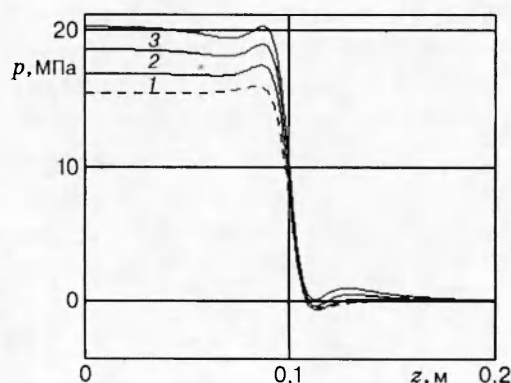


Рис. 5

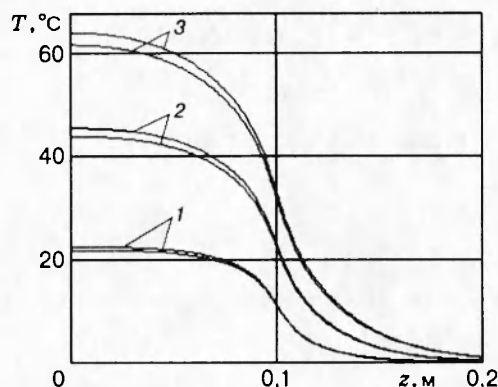


Рис. 6

трибосистемы на стационарное значение в обоих случаях приблизительно равно 900 с.

На рис. 4 и 5 приведены графики изменения контактного давления p по оси двухслойной трибосистемы для некоторых значений времени (рис. 4 соответствует первой закономерности изменения внешней нагрузки и угловой скорости, рис. 5 — второй). Кривые 1–3 на обоих рисунках отвечают $\tau = 200; 400; 900$ с ($\alpha_1 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\omega^* = 1 \text{ c}^{-1}$). Штриховая линия на рис. 5 — контактное давление для $\tau = 0$. Контактное давление монотонно выходит на стационарное значение при условии, что угловая скорость $\omega(\tau)$ изменяется на промежутке $[0, \omega_0]$ ($\omega_0 < \min \omega_{kp}^*$).

На рис. 6 показано распределение контактной температуры для тех же значений времени, что и на рис. 4, 5. Температура цилиндров для приведенных выше значений внешней нагрузки и угловой скорости монотонно выходит на стационарное значение. При этом наблюдается незначительная разница в характере распределения и в значениях температуры, найденных для указанных зависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев: Наук. думка, 1976.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
3. Шачнев В. А. Об осесимметричной задаче термоупругости // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 75–79.
4. Шачнев В. А. Вариационное решение осесимметричной задачи термоупругости // ПММ. 1962. Т. 26, вып. 6. С. 1033–1042.
5. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гос-техтеоретиздат, 1956.

Поступила в редакцию 19/1 1996 г.