УДК 532.516

ПЛОСКИЙ АНАЛОГ СПОНТАННОЙ ЗАКРУТКИ

Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается плоский аналог задачи о спонтанной закрутке — возникновение безнапорного поперечного потока при возмущении исходного плоскопараллельного течения. Показано, что в течениях с круговыми линиями тока между соосными цилиндрами в результате потери устойчивости может возникать осесимметричный в среднем (осреднение по осевой координате и азимутальному углу) аксиальный поток за счет контрградиентного переноса осевой компоненты импульса напряжениями Рейнольдса.

Проблема спонтанной закрутки рассматривалась в работах [1–3] и заключается в следующем: может ли возникать вращательно-симметричное течение при отсутствии явных внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда осесимметричное движение без вращения заведомо возможно? Плоским аналогом этого явления можно считать возникновение безнапорного поперечного потока при возмущении исходного плоскопараллельного течения. Более точная формулировка этой проблемы дана в [2, 3]. Предложенная там постановка обеспечивает строгий контроль кинематического потока осевой составляющей момента импульса, исключающий втекание вращающейся жидкости в рассматриваемую область. В случае плоского аналога эта формулировка обеспечивает строгий контроль кинематического потока поперечной составляющей импульса и исключает втекание в область жидкости с поперечным импульсом через боковую поверхность. Возникновение поперечного потока рассматривается как бифуркация исходного плоскопараллельного течения в результате потери устойчивости [1].

В [2, 3] показано, что бифуркация осесимметричное течение — вращательно-симметричное течение (и соответствующий плоский аналог такого перехода [3]) для возмущений той же симметрии, что и исходный поток, не имеет места для произвольной сжимаемой жидкости с переменным коэффициентом вязкости.

В настоящей работе приводится пример возникновения поперечного (осевого) потока при потере устойчивости исходного плоскопараллельного течения невязкой несжимаемой жидкости с круговыми линиями тока между двумя соосными цилиндрами.

Уравнения, описывающие такие течения, в общепринятых обозначениях (плотность жидкости $\rho = 1$) в цилиндрической системе координат r, φ, z имеют вид

$$Du - v^2/r = -p_r, \qquad Dv + uv/r = -p_\varphi/r; \tag{1}$$

$$Dw = -p_z, \qquad ru_r + u + v_\varphi + rw_z = 0, \tag{2}$$

где $D = \partial/\partial t + u\partial/\partial r + (v/r)\partial/\partial\varphi + w\partial/\partial z$; индексами обозначены производные по соответствующим переменным; компоненты скорости $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

Рассмотрим возмущение исходного течения $v_0 = v_0(r)$, $u_0 = 0$, $w_0 = 0$, $p_0 = p_0(r)$, ${p_0}_r = {v_0}^2/r$, где $v_0(r)$ — произвольная функция, заключенного между круговыми концентрическими цилиндрами $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Бесконечно малые возмущения удовлетворяют линеаризованным уравнениям (1), (2):

$$D_0u - 2v_0v/r = -p_r, \qquad D_0v + \Omega u = -p_\varphi/r; \tag{3}$$

$$D_0 w = -p_z, \qquad r u_r + u + v_\varphi + r w_z = 0; \tag{4}$$

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + (v_0/r)\,\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad \Omega = v_{0r} + v_0/r. \tag{5}$$

Решения системы (3)–(5) должны удовлетворять граничным условиям $u = 0$ при $r = r_1$ и $r = r_2$.

Исследованию этой задачи посвящено много работ, и имеется достаточно полное представление о поведении решений в зависимости от начального поля скорости $v_0(r)$. После того как возмущения найдены из решения сформулированной задачи, можно вычислить усредненные по z и φ напряжения Рейнольдса $\sigma_{\varphi r} = -\langle vu \rangle$ и $\sigma_{zr} = -\langle wu \rangle$ и определить возникающее вторичное (второго порядка малости) течение $\langle u_2 \rangle = u_2(r,t)$, $\langle v_2 \rangle = v_2(r,t)$, $\langle w_2 \rangle = w_2(r,t)$, усредненное по тем же переменным. Для этих величин из (1), (2) во втором приближении получим

$$u_2(r,t) = 0, \qquad v_{2t} = -(r^2 \langle vu \rangle)_r / r^2, \qquad w_{2t} = -(r \langle wu \rangle)_r / r. \tag{6}$$

При исследовании устойчивости рассматриваемых течений обычно вычисляют величину $\langle vu \rangle$, поскольку она при учете вязкости определяет крутящий момент. Величина $\langle wu \rangle$, по-видимому, никогда не вычислялась. Это обстоятельство связано с тем, что в соответствующих экспериментах длина цилиндров всегда ограничена и вопрос о возникновении аксиального, поперечного к исходному течению потока в таких условиях отпадает. Однако, если этот аксиальный поток (в бесконечно длинной трубе) рассматривать как аналог спонтанной закрутки, то его определение приобретает соответствующий смысл. Отметим, что предположение о возможности появления такого потока высказано в [1].

Для определения интересующей нас величины воспользуемся хорошо известными результатами исследований устойчивости рассматриваемого течения (см., например, [4]). Будем искать решение системы (3)–(5) в виде нормальных мод

$$(u_1, v_1, w_1, p_1) = \mathrm{Re}(U, V, W, P)\,\mathrm{e}^{i(kz + m\varphi - \omega t)},$$

где функции U, V, W, P зависят только от r. Для определения этих величин из (3)–(5) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i\lambda U - 2v_0 V/r = -P_r, \qquad i\lambda V + \Omega U = -imP/r; \tag{7}$$

$$i\lambda W = -ikP, \qquad rU_r + U + imV + ikrW = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями $U(r_1) = U(r_2) = 0$. Здесь $\lambda = (mv_0/r) - \omega$. При заданных k и m система (7), (8) вместе с граничными условиями определяет собственные функции U, V, W, P и собственные частоты ω. Если в спектре присутствует частота с $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, то исходное течение является неустойчивым.

Исключая V, W, P из (7), (8), получаем для U уравнение

$$U'' + \frac{2-\alpha}{r}\,U' - \Big(K + \frac{\alpha}{r^2}\Big)U + \frac{A}{\lambda}\,U + \frac{B}{\lambda^2}\,U = 0. \tag{9}$$

Здесь $\alpha = (k^2r^2 - m^2)/(k^2r^2 + m^2)$, $A = 2k^2 m\Omega/(k^2r^2 + m^2) - m\Omega'/r$, $B = 2k^2\Omega v_0/r$, $K = k^2 + m^2/r^2$. Если U найдено, то V и W даются равенствами:

$$V = \frac{i}{r^2 K}\Big(m(rU)' + \frac{k^2 r^2 \Omega}{\lambda}\,U\Big). \tag{10}$$

$$W = \frac{ik}{rK}\Big((rU)' - \frac{m\Omega}{\lambda}\,U\Big). \tag{11}$$

Для вычисления напряжений Рейнольдса удобно преобразовать уравнение (9) к виду, не содержащему первой производной. Положим

$$U = (K/r)^{1/2} Y.$$

Тогда из (9) получим

$$Y'' + \left(g(r) - K + \frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2}\right) Y = 0, \tag{12}$$

где $g(r) = [(2-3\alpha)/2 + 2m^2k^2r^2/(m^2+k^2r^2)^2]/r^2$.

Напряжения Рейнольдса определяются следующим образом:

$$\sigma_{\varphi r} = -\langle v_1 u_1 \rangle = -(1/2)\,\mathrm{Re}\,(VU^*)\,\exp(2qt),$$
$$\sigma_{zr} = -\langle w_1 u_1 \rangle = -(1/2)\,\mathrm{Re}\,(WU^*)\,\exp(2qt).$$

Отсюда с учетом (9)–(12) получаем формулы, определяющие эти величины ($q = \mathrm{Im}\,\omega$):

$$(r^2\sigma_{\varphi r})_r = -\frac{q}{2}\exp(2qt)\Big[m|Y|^2(A/|\lambda|^2 + 2B\,\mathrm{Re}\,\lambda/|\lambda|^4) - k^2\frac{d}{dr}(r\Omega|Y|^2/|\lambda|^2)\Big]; \tag{13}$$

$$(r\sigma_{zr})_r = -\frac{q}{2}\exp(2qt)\Big[k|Y|^2(A/|\lambda|^2 + 2B\,\mathrm{Re}\,\lambda/|\lambda|^4) + km\frac{d}{dr}(\Omega|Y|^2/r|\lambda|^2)\Big]. \tag{14}$$

Формула (13) приведена в [4]. Для рассматриваемой проблемы важно напряжение Рейнольдса, определяемое формулой (14), которое и приводит к возникновению аксиального потока во втором приближении в соответствии с уравнениями (6). Отметим, что хотя, как известно, наиболее быстрорастущими являются осесимметричные возмущения, они не создают необходимые для возникновения осевого потока напряжения, так как при $m = 0$ $A = 0$ и либо $q = 0$, либо $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Это следует из уравнения (12). Если $k = 0$, то осевой поток также не появляется, что соответствует ранее доказанному [3]. Для демонстрации возможности возникновения поперечного потока достаточно рассмотреть начальные данные, соответствующие какой-либо растущей моде с k и m, не равными нулю. Тогда w_2 определяется интегрированием по времени уравнения (6) с начальным условием $w_2(0,r) = 0$. Из этих уравнений следует, что полный расход и осевая составляющая импульса не возникают. Появляется слоистое течение (как минимум два слоя) с противоположно направленными скоростями, растущими со временем.

Отсюда следует, что в данном течении происходит контрградиентный перенос осевой составляющей импульса, который иногда связывают с появлением «отрицательной» вязкости. Под этим подразумевается следующее: если попытаться представить напряжение Рейнольдса с помощью «турбулентного» коэффициента вязкости и тензора деформации усредненного течения, то в данном течении, по крайней мере в некоторой окрестности границы между слоями, «турбулентный» коэффициент вязкости оказывается отрицательным. Очевидно, что такое описание не является адекватным. Тем не менее эта терминология широко используется. Известно, что такие явления существуют в течениях планетарного масштаба и некоторых довольно сложных течениях (например эффект Ранка — разделение горячего и холодного потоков во вращающейся жидкости). Существование этого явления в таком простом течении, как рассматриваемое здесь, представляется удивительным и заслуживает дальнейшего изучения. Для полного исследования характера возникающего в результате неустойчивости вторичного режима и его устойчивости необходимо учитывать нелинейность и вязкость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01771).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
2. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.
3. **Губарев Ю. Г., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 52–59.
4. **Владимиров В. А.** Аналогия эффектов стратификации и вращения // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. С. 270–312.

Поступила в редакцию 29/XII 1997 г.