УДК 662.612

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГОРЯЩЕГО ПОРОХА С АКУСТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ ПРИ НАЛИЧИИ РАВНОВЕСНЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ЗА ПЛАМЕНЕМ

Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил

(Москва)

В работе [1] было рассмотрено взаимодействие зоны горения с акустическим полем в случае, когда химический состав продуктов за фронтом пламени не меняется под действием возмущений давления и температуры (химически «замороженные» продукты). Представляет интерес исследование другого предельного случая взаимодействия, когда газ, покидающий зону горения, способен к обратимым химическим реакциям в акустической волне.

Решение такой задачи может быть проведено путем рассмотрения соответствующих уравнений переноса вещества и энергии с учетом кинетики химических реакций в продуктах. Однако в такой постановке задача, вероятно, имеет малое прикладное значение, поскольку достоверных и достаточно полных данных о кинетике реакций при горении пороха до сих пор не имеется. В то же время для некоторых практически интересных случаев решение проблемы можно осуществить и без детализации механизма химических превращений в продуктах, используя феноменологический подход.

Так, если характерное время накладываемых возмущений значительно больше характерного времени химических реакций, то химический состав продуктов можно считать равновесным, а сам газ характеризовать заданием функции полной энтальпии $h(p, T_g)$ от давления и температуры. Эта функция будет в принятых допущениях одинаковой как для стационарных, так и для нестационарных процессов (для продуктов сгорания порохов зависимости $h(p, T_g)$ достаточно хорошо изучена и существуют методы ее расчета [2]). Оценки показывают, что подобный подход является оправданным вплоть до частот акустических колебаний порядка 10^4—10^5 Гц.

Будем исходить из общего уравнения энергии для химически реагирующей среды, которое, согласно [3], можно записать в виде:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \operatorname{div} v + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}\left(\sum \rho_i h_i v_{id}\right), \qquad (1)$$

где $D/Dt = \partial/\partial t + v \operatorname{grad}$, $U = h - p/\rho$ — внутренняя энергия, величина $\rho_i v_{id} = Y_i \rho v_{id}$ определяет диффузионный поток i-го компонента. Учитывая уравнение неразрывности смеси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho v,$$

(1) перепишем в форме

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}\left(\sum \rho_i h_i v_{id}\right). \qquad (2)$$

Поскольку полная энтальпия смеси является функцией давления и температуры, то

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial h}{\partial T} \frac{DT}{Dt}. \qquad (3)$$

Используя определение полной энтальпии

$$h_i = h_{i0} + \int c_{pi}(T)\, dT,$$

преобразуем последний член (2) к виду:

$$F = \operatorname{div} \rho \Sigma Y_i v_{id} h_{i0} + \operatorname{div} \rho \Sigma Y_i v_{id} \cdot \int c_{pi}(T)\, dT.$$

Воспользовавшись очевидным равенством $\Sigma Y_i v_{id} \equiv 0$ и допуская $c_{pi} = c_p$, $D_i = D$ (рассматривается концентрационная самодиффузия), получим с учетом определения диффузионного потока

$$\rho Y_i v_{id} = -\rho D \operatorname{grad} Y_i,$$

$$F = -\operatorname{div}[\rho D \operatorname{grad}(\Sigma Y_i h_{i0})]. \qquad (4)$$

Умножая обе части уравнения для h_i на Y_i и суммируя по i ($\Sigma Y_i \equiv 1$), найдем для химической энтальпии

$$\Sigma Y_i h_{i0} = h(p, T) - \int c_p(T)\, dT. \qquad (5)$$

Уравнения (4) и (5) с учетом равенств

$$\operatorname{grad} h = \frac{\partial h}{\partial p} \operatorname{grad} p + \frac{\partial h}{\partial T} \operatorname{grad} T,$$

$$\operatorname{grad} \int c_p(T)\, dt = c_p(T) \operatorname{grad} T$$

дают

$$F = -\operatorname{div}\left[\rho D \frac{\partial h}{\partial p} \operatorname{grad} p\right] - \operatorname{div}\left[\rho D \frac{\partial h}{\partial T} \operatorname{grad} T\right] + \operatorname{div}[\rho D c_p \operatorname{grad} T]. \qquad (6)$$

Используя разложение Dh/Dt и (6) совместно с (2), получим

$$\rho \frac{\partial h}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \left(\rho \frac{\partial h}{\partial p} - 1\right) \frac{Dp}{Dt} = \Phi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \operatorname{div}\left(\rho D \frac{\partial h}{\partial p} \operatorname{grad} p\right) +$$

$$+ \operatorname{div}\left(\rho D \frac{\partial h}{\partial T} \operatorname{grad} T\right) - \operatorname{div}(\rho D c_p \operatorname{grad} T).$$

В частном случае $\varkappa/D = 1{,}0$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \left(\rho \frac{\partial h}{\partial p} - 1\right) \frac{Dp}{Dt} = \Phi + \operatorname{div} \frac{\lambda}{c_p}\left(\frac{\partial h}{\partial p} \operatorname{grad} p + \frac{\partial h}{\partial T} \operatorname{grad} T\right). \qquad (7)$$

Для химически «замороженного» газа

$$\frac{\partial h}{\partial p} \equiv 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial T} \equiv c_p$$

и уравнение (7) переходит в обычное уравнение энергии для вязкой, теплопроводной среды.

Покажем, что в рамках феноменологической модели нестационарного горения пороха [1, 4, 5], использующей предположение о квазистационарности процессов в зоне пламени, для описания поведения химически реагирующих продуктов за фронтом можно пользоваться только уравнениями для невязкого и нетеплопроводного газа. В самом деле, в нестационарных условиях фронт пламени генерирует акустические, температурные и возмущения химической энтальпии с длинами волн $\Lambda_a = ct_*$, $\Lambda_T = \Lambda_x = ut_*$ [1] (t_*, c, u — характерные время возмущения внешнего параметра, скорость звука и скорость газа). Оценим порядок величин в правой и левой частях уравнения энергии (7), помня, что в одномерном случае температура в волне меняется на характерном расстоянии Λ_T, а давление и скорость газа — на Λ_a

$$\frac{\Phi}{Dp/Dt} \sim \frac{\mu(\partial u/\partial x)^2}{u \partial p/\partial x} \sim \frac{\mu}{pu\Lambda_a} \sim \frac{\Lambda_g}{\Lambda_a} \sim \frac{t_g}{t_*} \frac{u}{c},$$

$$\frac{\lambda \partial^2 T/dx^2}{\rho u c_p (\partial T/\partial x)} \sim \frac{\lambda}{\rho u \Lambda_T} \sim \frac{\Lambda_g}{\Lambda_T} \sim \frac{t_g}{t_*}.$$

Здесь $\Lambda_g \sim \frac{\varkappa}{u} \sim t_g u$ — характерная толщина теплового слоя зоны горения, t_g — характерное время перестройки такого слоя. Видно, что если для каких-то процессов состояние пламени квазистационарно ($t_g/t_* \ll 1$, 0), то для этих процессов продукты сгорания нужно описывать уравнением энергии для идеального нетеплопроводного газа. Аналогичная ситуация имеет место и для уравнения движения. Попытка учета теплопроводности и вязкости в оттекающих продуктах автоматически приводят к необходимости учитывать тепловую нестационарность зоны пламени, что не охватывается феноменологической моделью. Таким образом, полная система уравнений для химически равновесных продуктов за пламенем принимает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho\frac{\partial h}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \left(\rho\frac{\partial h}{\partial p} - 1\right)\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0,$$

$$p = \rho R T \tag{8}$$

(полная энтальпия продуктов сгорания $h(p, T)$ известна). В уравнении состояния удельная газовая постоянная R так же, как и h является функцией давления и температуры.

Переходя в подвижную систему координат [1]

$$x' = x + \int^{t} u(\eta)\, d\eta, \quad t' = t$$

и линеаризуя (8) по малым возмущениям

$$\delta\tilde{\rho} = \frac{\delta\rho}{\rho^0}, \quad \delta w = \frac{\delta u}{u^0}, \quad \delta\pi = \frac{\delta p}{p^0}, \quad \delta\tilde{R} = \frac{\delta R}{R^0}, \quad \delta\vartheta = \frac{\delta T}{T_F^0}$$

(R^0, h^0 — стационарные значения удельной газовой постоянной и энтальпии потока), найдем:

$$\frac{\partial\delta\tilde{\rho}}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta w}{\partial x'} + u^0\frac{\partial\delta\tilde{\rho}}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{\partial\delta w}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta w}{\partial x'} + \frac{p^0}{u^0\rho^0}\frac{\partial\pi}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial h^0}{\partial T_0}\right)\left(\frac{\partial\delta\vartheta}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta\vartheta}{\partial x'}\right) + \left[\frac{h^0}{R^0T^0}\frac{\partial \ln h^0}{\partial \ln p^0} - 1\right]\left(\frac{\partial\delta\pi}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta\pi}{\partial x'}\right) = 0,$$

$$\delta\pi = \delta\tilde{R} + \delta\tilde{\rho} + \delta\vartheta, \quad \delta\tilde{R} = \left(\frac{\partial \ln R^0}{\partial \ln p^0}\right)\delta\pi + \left(\frac{\partial \ln R^0}{\partial \ln T^0}\right)\delta v.$$

Исключая из полученных уравнений возмущения плотности и вводя обозначения

$$\alpha_1 = \frac{\partial \ln R_0}{\partial \ln p^0}, \quad \beta_1 = \frac{\partial \ln R^0}{\partial \ln T^0},$$

$$\alpha_2 = \frac{h^0}{R^0T^0}\frac{\partial \ln h^0}{\partial \ln p^0}, \quad \beta_2 = \frac{1}{R^0}\frac{\partial h^0}{\partial T^0}, \tag{9}$$

$$c^0 = \frac{\gamma p^0}{\rho^0},$$

окончательно запишем:

$$(1-\alpha_1)\left(\frac{\partial\delta\pi}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta\pi}{\partial x'}\right) + u^0\frac{\partial\delta w}{\partial x'} - (1+\beta_1)\left(\frac{\partial\delta\vartheta}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta\vartheta}{\partial x'}\right) = 0,$$

$$\frac{c_0^2}{\gamma u^0}\frac{\partial\delta\pi}{\partial x'} + \frac{\partial\delta w}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta w}{\partial x'} = 0.$$

$$(\alpha_2 - 1)\left(\frac{\partial\delta\pi}{\partial t} + u^0\frac{\partial\delta\pi}{\partial x'}\right) + \beta_2\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + u^0\frac{\partial v}{\partial x'}\right) = 0. \tag{10}$$

Разыскивая решение уравнений (10) в виде волн

$$X_i = |X| \exp i\,(k_j' x + \omega' t)$$

и разрешая соответствующий характеристический определитель, найдем возможные значения волновых векторов:

$$k_1' = \frac{\omega'}{c_0\sqrt{E} + u^0}, \quad k_2' = \frac{\omega'}{c_0\sqrt{E} - u^0}, \quad k_3' = -\frac{\omega'}{u^0}, \tag{11}$$

где

$$E = \frac{\beta_2}{\gamma\,[(1+\beta_1)(\alpha_2-1)+\beta_2(1-\alpha_1)]}. \tag{12}$$

Из (11) видно, что скорость распространения акустических возмущений (волновые векторы $k_{1,2}$) в химически активной среде отличается от скорости звука c^0 в «замороженных» продуктах в $\sqrt{E}$ раз: $c = c_0\sqrt{E}$ ($E=1$ в химически «замороженном» газе).

Обозначив через Δ амплитуду падающей акустической волны, общее решение системы уравнений (10) можно представить в виде:

$$\delta\pi = \Delta\,(Ae^{ik_1'x'} + e^{ik_2'x'})\,e^{i\omega' t}, \quad \delta w = \frac{\Delta}{\gamma M\sqrt{E}}\,(Ae^{ik_1'x'} - e^{ik_2'x'})\,e^{i\omega' t},$$

$$\delta\vartheta = \Delta\left(\frac{1-\alpha_2}{\beta_2}\,\delta\pi + Be^{ik_3'x' + i\omega' t}\right). \tag{13}$$

Постоянные A и B определяются из условия неразрывности температуры и массового потока на фронте пламени. С учетом решения линеаризованного нестационарного уравнения теплопроводности для конденсированной фазы пороха, полученного в [1], окончательно находим:

$$\delta\pi = \Delta\left(\frac{1-\gamma MY\sqrt{E}}{1+\gamma MY\sqrt{E}}\,e^{ik_1'x'} + e^{ik_2'x'}\right)e^{i\omega' t},$$

$$\delta w = \frac{\Delta}{\gamma M\sqrt{E}}\left(\frac{1-\gamma MY\sqrt{E}}{1+\gamma MY\sqrt{E}}\,e^{ik_1'x'} - e^{ik_2'x'}\right)e^{i\omega' t}, \tag{14}$$

$$\delta\vartheta = \Delta\left(\frac{1-\alpha_2}{\beta_2}\,\delta\pi + \frac{2}{1+\gamma MY\sqrt{E}}\,e^{ik_3'x' + i\omega' t}\right),$$

где для акустической проводимости зоны горения Y получается выражение, что и в случае химически «замороженных» продуктов [1]:

$$Y = 1 - \left(s - \nu\frac{q}{k}\right) - \left(1 + \frac{q}{k}\right)V_1(\Omega).$$

Здесь $V_1 = [\nu + \delta(\alpha-1)]/[1 - k + (\alpha-1)(r - ik/\Omega')]$ — комплексная амплитуда возмущения скорости горения, $\alpha = 1/2 + \sqrt{1/4 + \Omega'}$, $\Omega' = \omega'\varkappa/u_0^2$, а параметры

$$\nu = \left(\frac{\partial \ln u^0}{\partial \ln p}\right)_{T_0}, \quad k = (T_s^0 - T_0)\left(\frac{\partial \ln u^0}{\partial T_0}\right)_p, \quad \mu = \frac{1}{T_s^0 - T_0}\left(\frac{\partial T_s^0}{\partial \ln p}\right)_{T_0},$$

$$r = \left(\frac{\partial T_s^0}{\partial T_0}\right)_p, \quad s = \left(\frac{\partial \ln T_F^0}{\partial \ln p}\right)_{T_0},$$

$$q = (T_s^0 - T_0)\left(\frac{\partial \ln T_F^0}{\partial T_0}\right)_p,$$

$$\delta = \nu r - \mu k$$

определяют свойства реакционных зон в порохе и в пламени.

Таким образом, резюмируя, можно отметить, что наличие за фронтом пламени равновесных обратимых химических реакций приводит к уменьшению скорости распространения акустических возмущений и, следовательно, к уменьшению коэффициента отражения волны давления от зоны горения (расчеты, проведенные для пороха IPN [2], показывают, что $E \leqslant 1,0$). В случае химически «замороженных» продуктов сгорания $E=1{,}0$, $\beta_2=c_p/R$, $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=0$, $R^0=c_p-c_v$ и формулы (14) сводятся к полученному в [1] решению задачи.

Поступила в редакцию
24/XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Гостинцев, Л. А. Суханов, П. Ф. Похил. Докл. АН СССР, 1971, **200**, 4.
2. Р. Н. Уимпресс. Внутренняя баллистика пороховых ракет. М., ИЛ, 1952.
3. Т. Карман. Вопросы горения ракетных топлив. М., ИЛ, 1959.
4. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 11—12.
5. Б. В. Новожилов. ФГВ, 1968, **4**, 4.

УДК 536.46

ЗАМЕЧАНИЕ О СООТНОШЕНИЯХ ПОДОБИЯ В ЗАДАЧЕ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ ПОРОХОВ

Ю. С. Рязанцев, В. Е. Тульских

(Москва)

Горение пороха в нестационарных условиях исследовалось во многих экспериментальных и теоретических работах (например, [1—9]). Ниже на основе модели нестационарного горения конденсированных систем, предложенной в [1, 2, 10], устанавливаются некоторые законы подобия, позволяющие результаты единичного численного расчета или эксперимента, выполненного при некоторых фиксированных значениях исходных параметров, распространить на целый класс аналогичных расчетов или экспериментов с другими значениями этих параметров.

Рассмотрим задачу о горении пороха при световом облучении [4], когда в к-фазе поглощается меняющийся во времени по экспоненциальному закону световой поток $I(t)$. Математическая формулировка этой задачи сводится к следующим соотношениям:

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}+I(t)\,e^{kx}\right),\quad -\infty<x<0,\quad 0<t<\infty, \tag{1}$$

$$u=Bp^{\nu}f\left[T_s-\frac{\varkappa}{u}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0\right], \tag{2}$$

$$I(t)=I_1+(I_0-I_1)\exp(-t/\alpha), \tag{3}$$

$$t=0:\ p=p_0,\ I=I_0,\ u_0=Bp_0^{\nu}f\left[T_0+\frac{I_0}{u_0\rho c}\right],$$

$$T(x)=T_0+(T_s-T_0)\exp\left(\frac{u_0x}{\varkappa}\right)+\frac{I_0}{\lambda(u_0/\varkappa-k)}\left(e^{kx}-e^{\frac{u_0x}{\varkappa}}\right), \tag{4}$$

$$x=0,\ T=T_s=\text{const},\quad x\to-\infty,\ T\to T_0. \tag{5}$$