

УДК 539.3  
DOI: 10.15372/PMTF202315404

## КРУЧЕНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КОРОБЧАТЫМ СЕЧЕНИЕМ

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова, А. Ю. Власов

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева,  
Красноярск, Россия

E-mails: sen@sibsau.ru, ruppa@inbox.ru, vlasov@sibsau.ru

Рассмотрен двухслойный стержень с коробчатым сечением, закручиваемый под действием касательных напряжений на угол  $\theta$ . Предполагается, что деформации в стержне упругие, его боковая поверхность свободна от напряжений. Слои обладают различными упругими свойствами и имеют различную толщину. Линия контакта слоев полагается жесткой, т. е. напряжения на ней совпадают. С помощью законов сохранения построено точное решение, описывающее напряженное состояние данной конструкции. Напряженное состояние определяется в каждой точке поперечного сечения с помощью интегралов по внешним контурам.

**Ключевые слова:** упругое кручение, многослойный стержень, точное решение, законы сохранения

**Введение.** Развертывание крупногабаритных трансформируемых конструкций основано на использовании упругой энергии, запасаемой в процессе начальной сборки конструкции. Перспективными элементами таких конструкций являются гибкие, упругие стержни, изготовленные из армированных композиционных материалов. В частности, для выдвижения антенн на космических аппаратах используются полые стержни большой длины с коробчатым сечением, изготавливаемые из многослойных композитных материалов. Под действием солнечного излучения в стержнях возникают напряжения, закручающие их вокруг собственной оси. Кручение стержней оказывает существенное влияние на функционирование приборов, находящихся на выдвигаемой конструкции. Поскольку масса изделия должна быть минимальной, а надежность развертывания максимальной, необходимо детальное изучение механики процесса и введение ограничений на технологию изготовления элементов указанных конструкций.

В настоящее время имеется достаточно много общих точных решений, описывающих напряженно-деформированное состояние упругих тел (см., например, работы [1–3] и библиографию к ним). Однако “...знание общих решений, за редким исключением, ничего не дает для решения важных частных задач, ...ибо мы получаем при решении этих частных задач систему столь сложных функциональных соотношений для произвольных функций, что их отыскание практически невозможно” [4]. Построение точных частных решений основано, например, на методах группового анализа дифференциальных уравнений, а именно на методе симметрии и законах сохранения [5, 6]. Теория симметрий позволяет строить решения с использованием так называемого полуобратного метода,

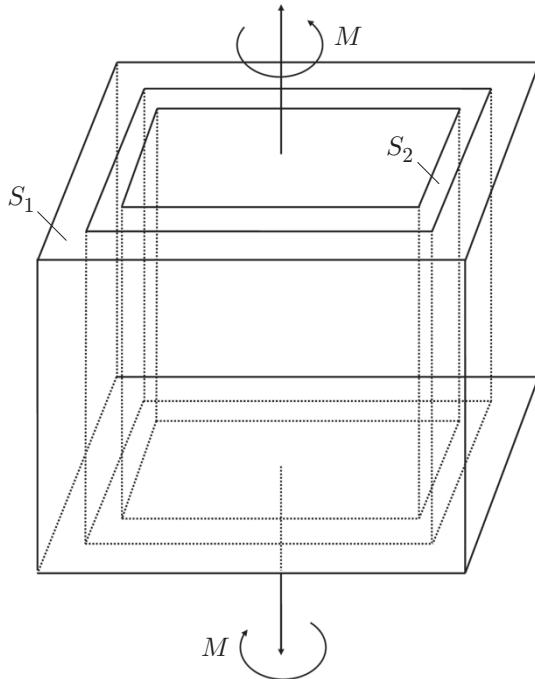


Рис. 1. Двухслойный стержень с коробчатым сечением под действием крутящего момента

когда к построенному тем или иным способом решению подбирается соответствующая краевая задача. При решении конкретных краевых задач более перспективным, по мнению авторов, является применение законов сохранения, построенных для данной системы уравнений [7]. Это позволяет разработать численно-аналитический метод, в соответствии с которым решение получается в виде интегралов по границе заданной области. В данной работе показано, что законы сохранения, эффективные при решении ряда краевых задач упругости и пластичности, могут применяться при исследовании многослойных упругих материалов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрено упругое состояние двухслойного стержня с коробчатым сечением под действием крутящего момента. Контакт двух упругих слоев из различных материалов полагается жестким. С помощью построенных законов сохранения определено напряженное состояние в каждой точке этой конструкции (рис. 1).

В первом слое  $S_1$  выполняются уравнения равновесия и совместности деформаций

$$F_1 = \partial_x \tau_1^+ + \partial_y \tau_2^+ = 0, \quad F_2 = \partial_x \tau_2^+ - \partial_y \tau_1^+ = -2G_1 \theta = -D_1, \quad (1)$$

во втором слое  $S_2$  — аналогичные уравнения

$$F_3 = \partial_x \tau_1^- + \partial_y \tau_2^- = 0, \quad F_4 = \partial_x \tau_2^- - \partial_y \tau_1^- = -2G_2 \theta = -D_2, \quad (2)$$

где  $\tau_1 = \tau_{xz}$ ,  $\tau_2 = \tau_{yz}$  — компоненты тензора напряжений;  $G_i$  — модули упругости материала в соответствующих слоях;  $\theta$  — угол закручивания поперечного сечения.

Отрезки  $L_l^2$ ,  $L_l^5$ ,  $L_d^2$ ,  $L_d^5$ , показанные на рис. 2, являются линиями контакта слоев. В предположении, что конструкция является сплошной, на этих линиях выполняются условия

$$\tau_1^+ = \tau_1^-, \quad \tau_2^+ = \tau_2^-.$$

Боковые поверхности полагаются свободными от напряжений, поэтому на них выполняются условия

$$\tau_1^+ n_1 + \tau_2^+ n_2 = 0 \quad (3)$$

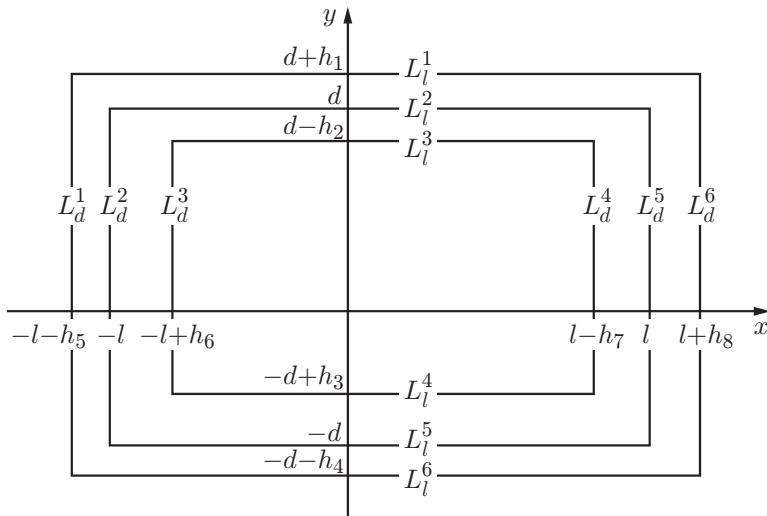


Рис. 2. Сечение двухслойного стержня

для слоя  $S_1$  и

$$\tau_1^- n_1 + \tau_2^- n_2 = 0 \quad (4)$$

для слоя  $S_2$ . Здесь  $n_1, n_2$  — компоненты вектора внешней нормали к боковым поверхностям. В результате из (3), (4) получаем граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_1^+ &= \tau_1(x, d + h_1) \leqslant 0, \quad \tau_2^+ = 0 \quad \text{на } L_l^1, & \tau_1^- &= \tau_1(x, d - h_2) \geqslant 0, \quad \tau_2^- = 0 \quad \text{на } L_l^3, \\ \tau_1^- &= \tau_1(x, -d + h_3) \leqslant 0, \quad \tau_2^- = 0 \quad \text{на } L_l^4, & \tau_1^+ &= \tau_1(x, -d - h_4) \geqslant 0, \quad \tau_2^+ = 0 \quad \text{на } L_l^6, \\ \tau_1^+ &= 0, \quad \tau_2^+ = \tau_2(-l - h_5, y) \leqslant 0 \quad \text{на } L_d^1, & \tau_1^- &= 0, \quad \tau_2^- = \tau_2(-l + h_6, y) \geqslant 0 \quad \text{на } L_d^3, \\ \tau_1^- &= 0, \quad \tau_2^- = \tau_2(l - h_7, y) \leqslant 0 \quad \text{на } L_d^4, & \tau_1^+ &= 0, \quad \tau_2^+ = \tau_2(l + h_8, y) \geqslant 0 \quad \text{на } L_d^6, \end{aligned}$$

где  $l > 0, d > 0, h_i \geqslant 0$  — постоянные.

Кроме того, потребуем выполнения равенства касательных напряжений в угловых точках:

$$\begin{aligned} \tau_1(-l - h_5, d + h_1) &= \tau_2(-l - h_5, d + h_1), & \tau_1(-l - h_5, -d - h_4) &= \tau_2(-l - h_5, -d + h_4), \\ \tau_1(l + h_8, d - h_4) &= \tau_2(l + h_5, d - h_4), & \tau_1(l + h_8, d + h_1) &= \tau_2(l + h_5, d + h_1), \\ \tau_1(-l - h_6, d - h_2) &= \tau_2(-l - h_6, d - h_2), & \tau_1(-l - h_6, -d + h_3) &= \tau_2(-l - h_6, -d + h_3), \\ \tau_1(l - h_7, d - h_2) &= \tau_2(l - h_7, d - h_2), & \tau_1(l - h_7, -d + h_3) &= \tau_2(l - h_7, -d + h_3). \end{aligned}$$

**2. Законы сохранения для уравнений (1), (2).** Сохраняющийся ток в законе сохранения будем искать в виде

$$A = \alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1, \quad B = \alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2, \quad (5)$$

где  $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$  — функции  $x, y$ . Тогда

$$\partial_x A + \partial_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получаем

$$\begin{aligned} \partial_x(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) + \partial_y(\alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2) &= \\ = \omega_1(\partial_x \tau_1 + \partial_y \tau_2) + \omega_2(\partial_x \tau_2 - \partial_y \tau_1 + D_i), & i = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В формулах (6), (7) опущены знаки “+” и “−”, поскольку эти формулы различаются только постоянными  $D_i$ .

Из (7) получаем

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \beta^2, & \alpha^2 &= -\beta^1, & \partial_x \beta^1 + \partial_y \alpha^1 &= 0, \\ \partial_x \alpha^1 - \partial_y \beta^1 &= 0, & \partial_x \gamma^1 + \partial_y \gamma^2 - \beta^1 D_i &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Из (8) следует, что в каждом слое допускается бесконечное число законов сохранения.

**3. Вычисление компонент тензора напряжений в слое  $S_1$ .** Пусть точка  $(x_0, y_0) \in S_1$ . Рассмотрим решение уравнений (8), которое имеет особенность в этой точке:

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \alpha^{1+} = \alpha^{1-} = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^1 &= \beta^{1+} = \beta^{1-} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^{1+} &= \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2}, & \gamma^2 &= 0, \\ \gamma^{1-} &= \frac{D_2}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2}, & \gamma^{2-} &= 0.\end{aligned}$$

Опишем вокруг точки  $(x_0, y_0) \in S_1$  окружность радиусом  $\varepsilon$ :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$  и выполним разрез  $c$  (рис. 3).

С использованием формулы Грина получаем

$$\begin{aligned}\iint_{S_1 \cup S_2} (\partial_x A + \partial_y B) dx dy &= \int_{L^+} -A dy + B dx + \int_{L^-} -A dx + B dy + \\ &+ \int_{N^+} -A dx + B dy + \int_{N^-} -A dy + B dx + \int_{\varepsilon} -A dx + B dy = 0,\end{aligned}$$

где

$$L^+ = L^- = \{L_l^2 \cup L_d^5 \cup L_l^4 \cup L_d^3\},$$

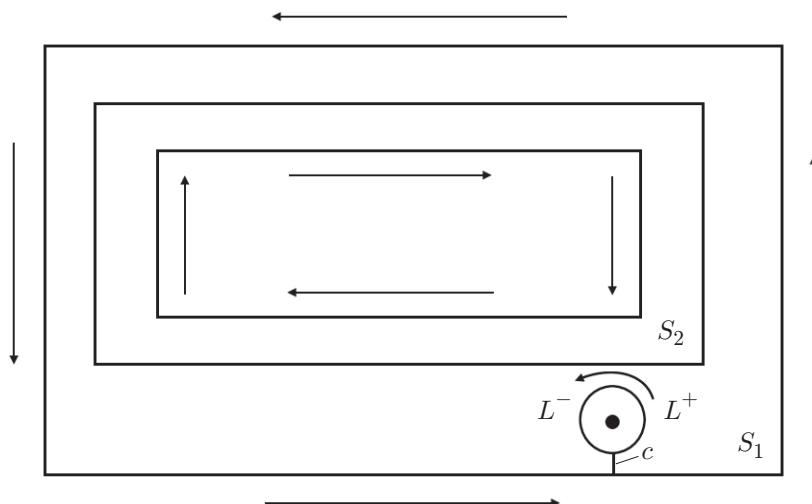


Рис. 3. Определение напряженного состояния в точке  $(x_0, y_0) \in S_1$

направления обхода контуров  $L^+$  и  $L^-$  противоположные:

$$N^+ = \{L_l^1 \cup L_d^6 \cup L_l^6 \cup L_d^1\}, \quad N^- = \{L_l^3 \cup L_d^4 \cup L_l^4 \cup L_d^3\}.$$

Например,

$$\begin{aligned} \int_{L_l^1} &= \int_{-l-h_5}^{l+h_8} (-\beta^1 \tau_1 + \alpha^1 \tau_2 + \gamma^2) \Big|_{y=d+h_1} dx = \\ &= - \int_{-j-h_5}^{l+h_8} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (d + h_1 - y_0)^2} \tau_1(x, d + h_1) dx, \\ \int_{L_d^1} &= \int_{-d-h_4}^{d+h_1} -(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) \Big|_{x=-l-h_5} dy = \\ &= \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \left( \frac{l + h_5 + x_0}{(y - y_0)^2 + (l + h_5 + x_0)^2} \tau_2(-l - h_5, y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{D_i}{2} \ln \frac{(l + h_5 + x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right) dy. \end{aligned}$$

Остальные интегралы вычисляются аналогично.

Рассмотрим интегралы

$$\int_{L^+} = \int_{L_{l^+}^2} + \int_{L_{d^+}^5} + \int_{L_{l^+}^5} + \int_{L_{d^+}^2}, \quad \int_{L^-} = \int_{L_{l^-}^2} + \int_{L_{d^-}^5} + \int_{L_{l^-}^5} + \int_{L_{d^-}^2}.$$

Вычисляя их, получаем

$$\int_{L_{l^+}^2} = \int_{L_{l^+}^2} (-\beta^1 \tau_1^+ + \alpha^1 \tau_2^+ + \gamma^{2+}) dx, \quad \int_{L_{l^-}^2} = \int_{L_{l^-}^2} (-\beta^1 \tau_1^- + \alpha^1 \tau_2^- + \gamma^{2-}) dx.$$

Так как  $\tau_1^+ = \tau_1^-$ ,  $\tau_2^+ = \tau_2^-$  на  $L_l^2$  и  $\gamma^{2+} = \gamma^{2-} = 0$ , то  $\int_{L_{l^+}^2} = - \int_{L_{l^-}^2}$ . Аналогично получаем

$$\int_{L_{l^+}^5} = - \int_{L_{l^-}^5}.$$

Вычислим интегралы

$$\int_{L_{d^+}^5} = \int_{L_{d^+}^5} (\alpha^1 \tau_1^+ + \beta^1 \tau_2^+ + \gamma^{1+}) dx, \quad \int_{L_{d^-}^5} = \int_{L_{d^-}^5} (\alpha^1 \tau_1^- + \beta^1 \tau_2^- + \gamma^{1-}) dx.$$

Так как  $\tau_1^+ = \tau_1^-$ ,  $\tau_2^+ = \tau_2^-$  на  $L_d^5$  и  $\gamma^{1+} = \gamma^{1-} = 0$ , то  $\int_{L_{d^+}^5} = - \int_{L_{d^-}^5}$ . Следовательно,

$$\int_{L^+} = - \int_{L^-}.$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\varepsilon} -(\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^{1+}) dy + (-\beta^1 \tau_1 + \alpha^1 \tau_2 + \gamma^{2+}) dx = \\
& = \oint_{\varepsilon} - \left( \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau_1 + \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau_2 + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right) dy + \\
& \quad + \left( -\frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau_1 + \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \tau_2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Пусть  $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$ ,  $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , тогда

$$\oint_{\varepsilon} = - \int_0^{2\pi} \tau_2(x_0 + \varepsilon \cos \varphi, y_0 + \varepsilon \sin \varphi) d\varphi = -2\pi \tau_2(x_0, y_0).$$

Последнее равенство получается в результате предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с использованием теоремы о среднем.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
2\pi \tau_2(x_0, y_0) &= - \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (d + h_1 - y_0)^2} \tau_1(x, d + h_1) dx + \\
&\quad + \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (d + h_4 + y_0)^2} \tau_1(x, -d - h_4) dx + \\
&+ \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \left( \frac{l + h_5 + x_0}{(y - y_0)^2 + (l + h_5 + x_0)^2} \tau_2(-l - h_5, y) - \frac{D_1}{2} \ln \frac{(l + h_5 + x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right) dy - \\
&- \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \left( \frac{l + h_8 - x_0}{(y - y_0)^2 + (l + h_8 - x_0)^2} \tau_2(-l + h_8, y) + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(l + h_8 - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right) dy + \\
&+ \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (-d + h_3 - y_0)^2} \tau_1(x, -d + h_3) dx + \\
&+ \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (d - h_2 - y_0)^2} \tau_1(x, d - h_2) dx + \\
&+ \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \left( -\frac{-l + h_6 - x_0}{(y - y_0)^2 + (-l + h_6 - x_0)^2} \tau_2(-l + h_6, y) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(-l + h_6 - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right) dy - \\
&- \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \left( \frac{l - h_7 - x_0}{(y - y_0)^2 + (l - h_7 - x_0)^2} \tau_2(l - h_7, y) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(l - h_7 - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{l^2 + (y - y_0)^2} \right) dy.
\end{aligned}$$

Рассмотрим другое решение уравнений (8):

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= \alpha^{1+} = \alpha^{1-} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \beta^1 &= \beta^{1+} = \beta^{1-} = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^{1+} &= 0, \quad \gamma^{2+} = \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{d^2 + (x - x_0)^2}, \\ \gamma^{1-} &= 0, \quad \gamma^{2-} = \frac{D_2}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{d^2 + (x - x_0)^2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Повторяя предыдущие вычисления, для решения (9) находим

$$\begin{aligned}2\pi\tau_1(x_0, y_0) &= \\ &= - \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \left( \frac{d + h_1 - y_0}{(x - x_0)^2 + (d + h_1 - y_0)^2} \tau_1(x, d + h_1) + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (d + h_1 - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + d^2} \right) dx + \\ &+ \int_{-l-h_5}^{l+h_8} \left( \frac{-d - h_4 - y_0}{(x - x_0)^2 + (d + h_4 + y_0)^2} \tau_1(x, -d - h_4) + \frac{D_1}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (d + h_4 + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + d^2} \right) dx - \\ &- \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \frac{y - y_0}{(y - y_0)^2 + (l + h_5 + x_0)^2} \tau_2(-l - h_5, y) dy + \\ &+ \int_{-d-h_4}^{d+h_1} \frac{y - y_0}{(y - y_0)^2 + (l + h_8 - x_0)^2} \tau_2(l + h_8, y) dy - \\ &- \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \left( \frac{-d + h_3 - y_0}{(x - x_0)^2 + (-d + h_3 - y_0)^2} \tau_1(x, -d + h_3) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (-d + h_3 - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + d^2} \right) dx + \\ &+ \int_{-l+h_6}^{l-h_7} \left( \frac{d - h_2 - x_0}{(x - x_0)^2 + (d - h_2 - y_0)^2} \tau_1(x, d - h_2) + \frac{D_2}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (d - h_2 - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + d^2} \right) dx + \\ &+ \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \frac{y - y_0}{(y - y_0)^2 + (-l + h_6 - x_0)^2} \tau_2(-l + h_6, y) dy - \\ &- \int_{-d+h_3}^{d-h_2} \frac{y - y_0}{(y - y_0)^2 + (l - h_7 - x_0)^2} \tau_2(l - h_7, y) dy.\end{aligned}\tag{10}$$

**Заключение.** В работе построены законы сохранения для уравнений, описывающих напряженное состояние упругого двухслойного стержня с коробчатым сечением под действием крутящего момента. С использованием законов сохранения определено напряженное состояние в каждой точке стержня по формулам (9), (10) с помощью интегралов по внешней границе стержня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Остросаблин Н. И.** Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории упругости к диагональному виду // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.
2. **Остросаблин Н. И.** Операторы симметрии и общие решения уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 98–104.
3. **Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.** Об упругом кручении вокруг трех осей // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 1. С. 120–125.
4. **Соболев С. Л.** Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Гостехтеориздат, 1954.
5. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. **Аннин Б. Д.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
7. **Гомонова О. В., Сенашов С. И.** Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 1. С. 179–186.

*Поступила в редакцию 9/X 2023 г.,*

*после доработки — 9/X 2023 г.*

*Принята к публикации 29/I 2024 г.*

---