УДК 533.6.011.72

РАСПАД ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ СЖАТИЯ ПРАНДТЛЯ — МАЙЕРА В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ГАЗА

А. В. Омельченко, В. Н. Усков

Балтийский государственный технический университет, 198005 Санкт-Петербург

Рассмотрен случай распада разрыва в сингулярной точке центрированной волны сжатия. Приводятся аналитические решения, позволяющие определить тип исходящего из точки распада отраженного разрыва и границы областей параметров, в которых существует решение задачи.

Введение. Задача о распаде произвольного стационарного разрыва в плоском сверхзвуковом равномерном потоке совершенного невязкого газа является одной из традиционных в сверхзвуковой газовой динамике. Поставленная впервые Л. Д. Ландау [1], она до сих пор привлекает к себе внимание исследователей [2–5].

В данной работе рассматривается частный случай задачи — распад разрыва в сингулярной точке центрированной волны сжатия. На основе анализа изомах на плоскости интенсивностей волн [4, 6] получены аналитические решения, позволяющие определить тип исходящего из точки распада отраженного разрыва и границы областей исходных параметров, в которых существует решение задачи, а также оптимальные волны для различных параметров задачи [6].

Полученные решения носят не только теоретический, но и прикладной характер и могут быть использованы при газодинамическом проектировании сверхзвуковых воздухозаборников, аппаратов струйных технологий и других технических объектов.

1. Рассматривается центрированная волна сжатия Прандтля — Майера (рис. 1) в потоке совершенного газа с известными значениями числа Маха M и показателя адиабаты γ. За интенсивность J_1 волны *1* принимается отношение статических давлений за волной p_1 и до волны p ($J_1 = p_1/p$). Модуль угла поворота потока в простой волне определяется с помощью известных функций Прандтля — Майера:

$$\beta_1(\mathrm{M}, J) = |\omega(\mathrm{M}_1) - \omega(\mathrm{M})|. \tag{1.1}$$

Связь чисел Маха до волны M и за волной M_1 устанавливается с помощью общего для изоэнтропных i и ударных j волн соотношения [6]

$$\mu/\mu_1 = J/E \quad (\mu = 1 + \varepsilon(\mathrm{M}^2 - 1), \quad E = \rho/\rho_1, \quad \varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)). \tag{1.2}$$

Значения E и J связаны адиабатами Рэнкина — Гюгонио на j-волнах и Лапласа — Пуассона на i-волнах:

$$E^{(j)} = (J + \varepsilon)/(1 + \varepsilon J), \qquad E^{(i)} = J^{1/\gamma}. \tag{1.3}$$

Следовательно, значение M_1 в (1.1) определяется с учетом (1.2), (1.3) из формулы

$$\mu_1 = \mu J^{-1/\eta} \qquad (\eta = (1 + \varepsilon)/2\varepsilon). \tag{1.4}$$

Условие $\mathrm{M}_1 \geqslant 1$ ограничивает значения интенсивности волны сжатия и угла поворота потока в волне величинами J_* и β_*, рассчитываемыми по формулам

$$J_*(\mathrm{M}) = \mu^\eta, \qquad \beta_*(\mathrm{M}) = \omega(\mathrm{M}). \tag{1.5}$$

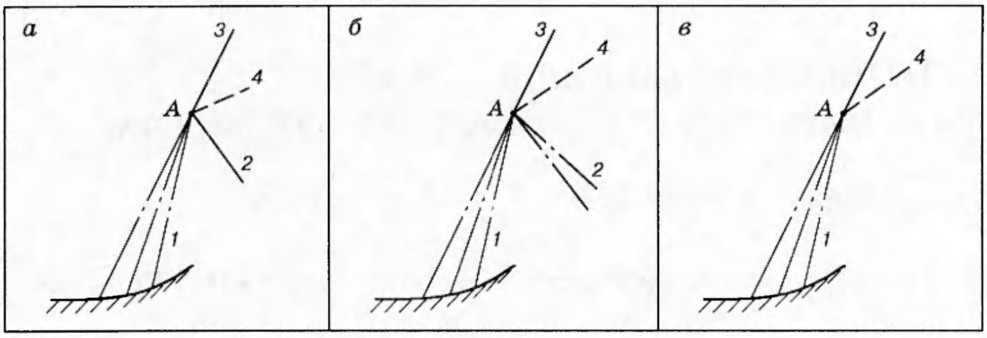

Рис. 1

Центр волны сжатия (точка A на рис. 1) является сингулярной точкой, в которой имеет место распад волны [1]. Распад сопровождается образованием исходящих из точки A отраженного разрыва *2* и результирующего скачка уплотнения *3*, имеющих различные направления. На рис. 1 направления главного (результирующего) скачка уплотнения *3* и волны сжатия *1* совпадают, следовательно, показатели направления χ_i [4] у них одинаковые ($\chi_1 = \chi_3 = +1$). Отраженный разрыв имеет противоположное направление ($\chi_2 = -1$) и может быть как скачком уплотнения ($\lambda_2^{(j)} = \mathrm{sign}\Lambda = +1$, $\Lambda = \ln J$) (рис. 1,*а*), так и центрированной волной разрежения ($\lambda_2^{(i)} = -1$) (рис. 1,*б*). В частном случае отраженный разрыв может отсутствовать (распад волны без отражения) (рис. 1,*в*).

Задача о распаде разрыва ставится следующим образом: в потоке с M и γ по заданному значению интенсивности J_1 центрированной волны сжатия требуется определить интенсивности исходящих из точки A разрывов. Решение строится на основе традиционных условий динамической совместности на тангенциальном разрыве *4*, исходящем из точки A, которые приводят к системе уравнений (системе распада) относительно интенсивности J_3 сильного скачка уплотнения *3*, а также интенсивности J_2 отраженного разрыва *2*:

$$J_1 J_2 = J_3; \tag{1.6}$$

$$\beta_1(\mathrm{M}, J_1) + \psi_2\beta_2(\mathrm{M}_1, J_2) = \beta_3(\mathrm{M}, J_3). \tag{1.7}$$

Показатель угла поворота $\psi = 1$, если поток в волне поворачивается против часовой стрелки, и $\psi = -1$ в противном случае. Положительные и отрицательные значения величин ψ, λ, χ связаны простым соотношением [4]

$$\psi = \lambda\chi. \tag{1.8}$$

Следовательно, $\psi_1 = \psi_3 = 1$, в отраженной волне разрежения $\psi_2^i = 1$ (рис. 1,*б*), а на скачке уплотнения $\psi_2^j = -1$ (рис. 1,*а*).

Модуль угла β_2 поворота потока в отраженной волне разрежения рассчитывается с помощью формулы (1.1) по числам Маха M_1 за волной сжатия и M_2 за отраженной волной. Значение M_2 выражается через J_2 по формуле (1.4) с соответствующей заменой индексов.

Если отраженный разрыв является скачком уплотнения, то угол β_2 находится из соотношения

$$\beta(\mathrm{M}, J) = \mathrm{arctg}\left[\sqrt{\frac{J_m - J}{J + \varepsilon}}\,\frac{(1-\varepsilon)(J-1)}{J_m + \varepsilon - (1-\varepsilon)(J-1)}\right] \qquad (J_m = (1+\varepsilon)\mathrm{M}^2 - \varepsilon) \tag{1.9}$$

по M_1 и $J = J_2$. При этом M_1 выражается через параметры M и J_1 из (1.2) с учетом первой из формул (1.3).

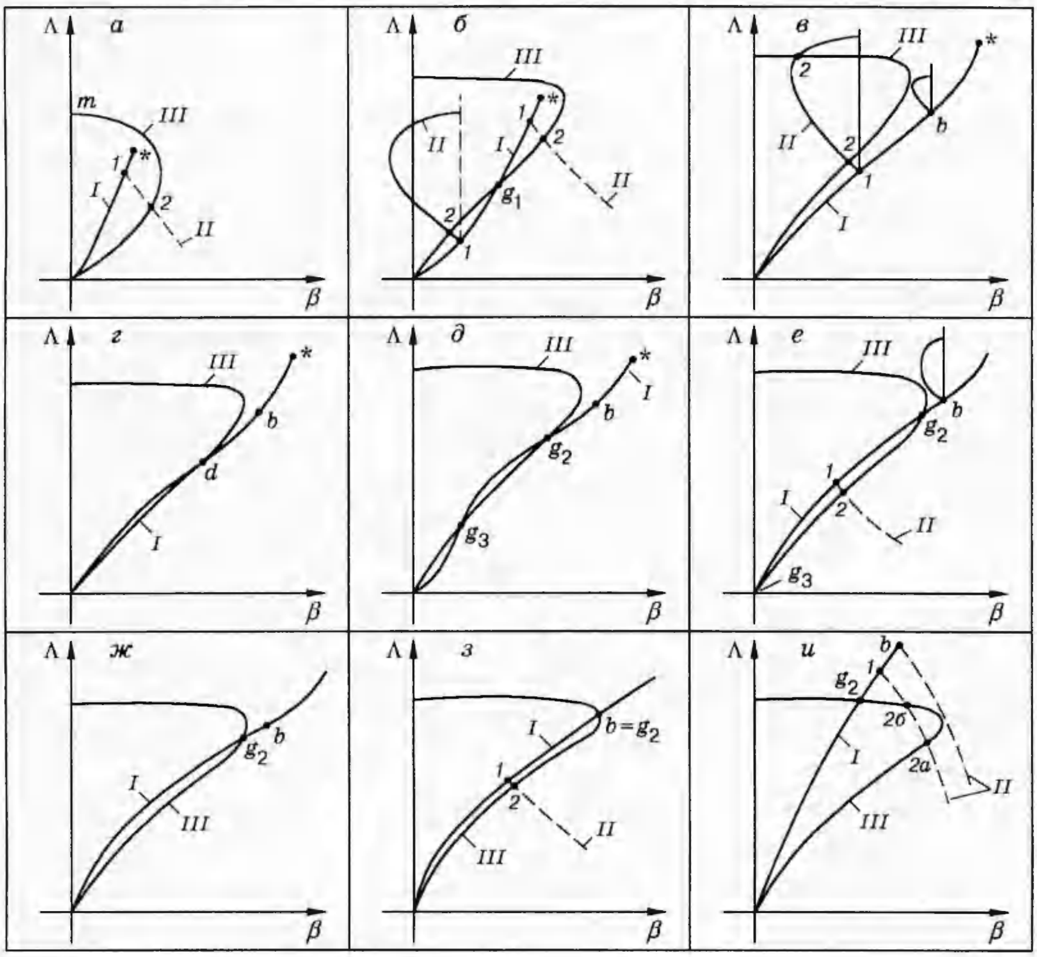

Рис. 2

Соотношение (1.9) позволяет также по заданным значениям М и $J = J_3$ вычислить угол поворота β_3 на результирующем скачке уплотнения *3*.

Задача исследования состоит в определении границ областей исходных параметров (М, J_1, γ), в которых реализуются отраженные разрывы различных типов, границ областей отсутствия решения поставленной задачи, а также в нахождении интенсивностей оптимальных волн [6].

2. Анализ решения системы распада (1.6), (1.7) удобно производить на плоскости интенсивностей волн $\Lambda = \ln J$, β [4, 6] (рис. 2). Линии постоянных значений чисел Маха (изомахи) на этой плоскости строятся на основе зависимостей (1.1), (1.4), (1.9). Изомаху скачка уплотнения часто называют сердцевидной кривой. На рис. 2 кривые *I–III* — изомахи волны сжатия, отраженного и главного скачков уплотнения соответственно. Точки *1* на изомахе *I* отвечают заданному значению J_1 и имеют координаты Λ_1, β_1. Штриховые линии *II* на рис. 2 изображают отраженные разрывы *2* (см. рис. 1) и представляют в соответствии с формулой (1.8) либо правую ветвь волны разрежения, либо левую ветвь сердцевидной кривой. Они строятся в системе координат с началом в точке *1* на изомахе *I* (рис. 2) и описываются формулами (1.1), (1.4) с заменой в них индекса *1* на *2*, а М на М_1 в первом случае или формулой (1.9) при $\text{М} = \text{М}_1$ и $J = J_2$ во втором.

Точка *2* (рис. 2) пересечения линий *II* и *III* представляет графическое решение системы (1.6), (1.7). Ее координаты на сердцевидной кривой *III* определяют интенсивность

J_3 главного скачка уплотнения и угол β_3 поворота потока на нем, а координаты Λ_2 и β_2 в системе координат с началом в точке *1* соответствуют этим же характеристикам отраженного разрыва.

На рис. 2 приведены возможные варианты решения задачи при различных значениях исходных параметров М и J_1 и постоянном значении γ. Так, рис. 2,*а* отвечает решению с отраженной волной разрежения, а точка *2* на рис. 2,*б* — отраженному скачку уплотнения. Точки g_i пересечения изомах *I* и *III* на рис. 2,*б*,*д*–*и* иллюстрируют распад волны сжатия без отраженного разрыва ($J_2 = 1$, $\beta_2 = 0$).

Качественный анализ рис. 2 показывает, что решение зависит от положения точки *1* относительно кривой *III*. В случае слабой волны сжатия взаиморасположение изоэнтропных линий *I* и сердцевидных кривых *III* определяется значениями производных $\partial^k\Lambda/\partial\beta^k$ k-го порядка в начале координат, найденных с использованием зависимостей (1.1), (1.4), (1.9) при $J_3 \to 1$, $J_1 \to 1$. Из анализа этих производных видно, что линии *I* и *III* в начале координат при любых М имеют второй порядок касания, а при

$$\mathrm{M}_{F_i} = \sqrt{\frac{2}{5-3\gamma}\left[(3-\gamma)\mp\sqrt{\gamma^2-1}\right]} \qquad (i = 1,\, 2) \tag{2.1}$$

у них совпадают и третьи производные. При этом в диапазоне $\mathrm{M} \in [1, \mathrm{M}_{F_1}] \cup [\mathrm{M}_{F_2}, \infty)$ $\partial^3\Lambda_3/\partial\beta_3^3 < \partial^3\Lambda_1/\partial\beta_1^3$, а в диапазоне $\mathrm{M}\in[\mathrm{M}_{F_1}, \mathrm{M}_{F_2}]$ имеет место обратное неравенство. Это означает, что в первом случае распад слабой волны сжатия ($J_1 \approx 1$) сопровождается образованием отраженной волны разрежения, а во втором отраженный разрыв является скачком уплотнения.

Зависимости $\mathrm{M}_{F_1}(\gamma)$ и $\mathrm{M}_{F_2}(\gamma)$ приводятся на рис. 3 (кривые *1* и *2*). Ранее они были получены в [7] при решении задачи о взаимодействии слабых возмущений со скачком уплотнения и в [4] при анализе свойств изомах на плоскости β, Λ.

С увеличением J_1 положение точки *1* относительно кривой *III* (см. рис. 2) существенно зависит не только от значений М и γ, но и от интенсивности J_1 центрированной волны сжатия.

3. Приведенный в п. **2** анализ изомах и результаты численного решения системы распада (1.6), (1.7) показывают, что при $\mathrm{M} < \mathrm{M}_{F_1}$ изомаха *I* волны сжатия целиком располагается внутри сердцевидной кривой *III* и для любого значения $J_1 \in [1, J_*(\mathrm{M})]$ отраженный разрыв *2* является центрированной волной разрежения (см. рис. 1,*б*). В этом диапазоне М система распада принимает вид

$$J_3 = J_1 J_2, \quad \omega(\mathrm{M}) - 2\omega(\mathrm{M}_1) + \omega(\mathrm{M}_2) = \beta^{(j)}(\mathrm{M}, J_3), \quad \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^\eta = J_1, \quad \left(\frac{\mu}{\mu_2}\right)^\eta = J_3. \tag{3.1}$$

Здесь M_2 — число Маха за отраженной волной разрежения *2*.

При $\mathrm{M}_{F_1} < \mathrm{M} < \mathrm{M}_s$ нижняя часть изомахи *I*, которой соответствует диапазон интенсивностей волны сжатия $J_1 \in [1, J_{g1}]$, располагается вне сердцевидной кривой *III* (рис. 2,*б*). В этом диапазоне J_1 отраженный разрыв является скачком уплотнения (рис. 1,*а*), а соответствующая этим J_1 система уравнений (1.6), (1.7) имеет вид

$$J_3 = J_1 J_2, \quad \left(\frac{\mu}{\mu_1}\right)^\eta = J_1, \quad \omega(\mathrm{M}) - \omega(\mathrm{M}_1) - \beta^{(j)}(\mathrm{M}_1, J_2) = \beta^{(j)}(\mathrm{M}, J_3). \tag{3.2}$$

При $J_1 = J_{g1}(\mathrm{M})$ распад волны сжатия происходит без отражения (рис. 1,*в*), а в диапазоне $J_1 \in [J_{g1}, J_*]$ вновь реализуется отраженная волна разрежения. Для определения J_{g1} в формулах (3.1) или (3.2) надо положить $J_2 = 1$, что приводит к следующей системе уравнений относительно J_{g1} и β_{g1}:

$$\omega(\mathrm{M}) - \omega(\mathrm{M}_1) = \beta^{(j)}(\mathrm{M}, J_{g1}), \qquad \mu_1 = \mu J_{g1}^{-1/\eta}. \tag{3.3}$$

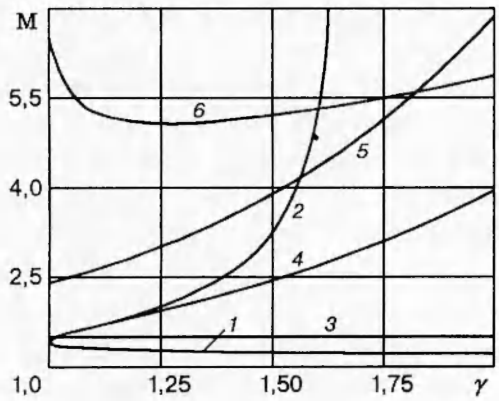

Рис. 3

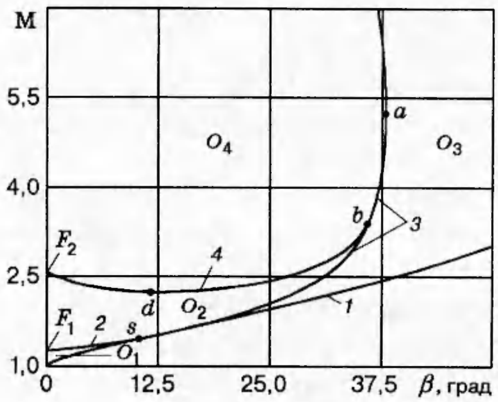

Рис. 4

Функции $\beta_*(\mathrm{M})$ и $\beta_{g1}(\mathrm{M})$ (кривые *1* и *2* на рис. 4) имеют точку касания при $\mathrm{M} = \mathrm{M}_s$. В этой точке $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = 1$, $J_2 = 1$, $\omega(\mathrm{M}_1) = \omega(\mathrm{M}_2) = 0$, и из (3.2) вытекает уравнение для определения M_s:

$$\omega(\mathrm{M}) = \beta^{(j)}(\mathrm{M}, J_3), \qquad J_3 = \mu^{\eta}. \tag{3.4}$$

Зависимость $\mathrm{M}_s(\gamma)$ приведена на рис. 3 (кривая *3*).

Таким образом, в диапазоне чисел Маха $\mathrm{M}\in[\mathrm{M}_{F_1}, \mathrm{M}_s]$ при $J_1\in[1, J_{g1}]$ отраженный разрыв *2* является скачком уплотнения (область O_2 на рис. 4), а при $J_1\in[J_{g1}, J_*]$ — волной разрежения (область O_1). Разделяющая области O_1 и O_2 кривая *2* соответствует распаду волны сжатия без отражения.

При $\mathrm{M}\in[\mathrm{M}_s, \mathrm{M}_d]$ изомаха волны сжатия располагается вне сердцевидной кривой *III* (см. рис. 2,*в*). Следовательно, отраженный разрыв может быть только скачком уплотнения. С увеличением J_1 размеры сердцевидной кривой *II*, соответствующей отраженному скачку уплотнения, уменьшаются, а при $J_1 > J_b$ линии *II* и *III* не имеют общих точек. Это означает, что при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_s$ и $J_1 > J_b$ условия динамической совместности (1.6), (1.7) на тангенциальном разрыве *4* не выполняются. Область O_3, ограниченная кривыми *1* и *3* на рис. 4, соответствует значениям параметров, при которых система (3.2) не имеет решения.

Положение границы области O_3 зависит от поведения функции $J_1(J_3)$, задаваемой системой (3.2). Как видно из рис. 2,*в*, в рассматриваемом диапазоне чисел Маха любой

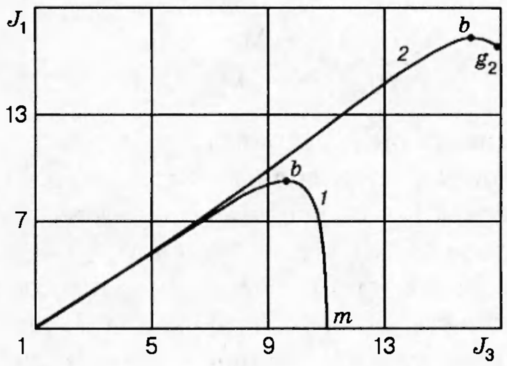

Рис. 5

интенсивности $J_1 < J_b$ соответствуют две точки пересечения кривых *II* и *III*; при $J_1 = J_b$ эти точки сливаются в одну.

Зависимость $J_1(J_3)$ при фиксированном числе Маха является немонотонной (кривая *1* на рис. 5), а максимум функции $J_1(J_3)$ определяет предельное значение интенсивности $J_b(\mathrm{M})$ волны сжатия, начиная с которого отсутствует решение задачи о распаде волны.

Так как связь J_1 и J_3 в (3.2) осуществляется неявно, то для нахождения интенсивности J_b целесообразно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов Лагранжа. Функция Лагранжа $F = J_1 + \lambda[\omega(\mathrm{M}) - \omega(\mathrm{M}_1(J_1)) - \beta_2^{(j)}(\mathrm{M}_1(J_1), J_3/J_1) - \beta_3^{(j)}(\mathrm{M}, J_3)]$ при фиксированном M зависит только от J_1, J_3, λ (λ — множитель Лагранжа), так как M_1 явно выражается через интенсивность J_1 этой волны (формула (1.4)).

Дифференцируя F по указанным переменным и приравнивая полученные выражения нулю, несложно получить следующую систему уравнений относительно J_b:

$$\omega(\mathrm{M}) - \omega(\mathrm{M}_1) - \beta_2^{(j)}(\mathrm{M}_1, J_2) = \beta_3^{(j)}(\mathrm{M}, J_3); \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\beta_2^{(j)}(\mathrm{M}_1, J_2)}{\partial\Lambda_2} + \frac{\partial\beta_3^{(j)}(\mathrm{M}, J_3)}{\partial\Lambda_3} = 0, \quad J_1J_2 = J_3, \quad \mu = \mu_1 J_1^{1/\eta}. \tag{3.6}$$

Производные в (3.6) находятся дифференцированием (1.9) по J:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\beta^{(j)}}{\partial\Lambda} = \frac{1}{2\gamma J}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\chi(J+\varepsilon)}}\,\frac{\delta + \chi(1+\varepsilon)}{\mu(J+\varepsilon) - J(1+\varepsilon J)(1-\varepsilon)},\\ \chi = \mu(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon J), \quad \delta = \chi(J+\varepsilon) - \varepsilon(1+\varepsilon J)(J-1).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Теперь, зная $J_b(\mathrm{M})$, легко построить зависимость $\beta_b(\mathrm{M})$ (кривая *3* на рис. 4), соответствующую границе области O_3 отсутствия решения задачи.

При числе Маха M_d изомахи волны сжатия *I* и скачка уплотнения *III* касаются в точке d (рис. 2,*г*), а при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_d$ они имеют две точки пересечения: g_2 и g_3 (рис. 2,*д*). В диапазоне $J_1 \in [J_{g3}, J_{g2}]$ часть изомахи *I* находится внутри сердцевидной кривой *III*, а следовательно, при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_d$ вновь, как и при малых числах Маха, появляется область O_4, в которой отражение происходит в виде волны разрежения.

Величины $J_d(\gamma)$ и $\mathrm{M}_d(\gamma)$ находятся из условий

$$\beta_1^{(i)}(\mathrm{M}_d, J_d) = \beta_3^{(j)}(\mathrm{M}_d, J_d), \qquad \frac{\partial\beta_1^{(i)}(\mathrm{M}_d, J_d)}{\partial\Lambda_d} = \frac{\partial\beta_3^{(j)}(\mathrm{M}_d, J_d)}{\partial\Lambda_d}. \tag{3.8}$$

Производная в правой части (3.8) определяется по формуле (3.7), а в левой рассчитывается по M_1:

$$\frac{\partial\beta^{(i)}}{\partial\Lambda} = \frac{\sqrt{\mathrm{M}_1^2 - 1}}{\gamma\mathrm{M}_1^2}. \tag{3.9}$$

Зависимость $\mathrm{M}_d(\gamma)$ приведена на рис. 3 (кривая *4*).

Значения интенсивностей J_{g2} и J_{g3} волны сжатия, при которых распад волны происходит без отражения, определяются из решения уравнения (3.3); при этом интенсивность J_{g2} следует искать в диапазоне $[J_d, J_b(\mathrm{M})]$, а значение J_{g3} — в диапазоне $[1, J_d]$.

Значение $J_{g3} = 1$ реализуется при $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{F_2}$ (2.1) и соответствует углу $\beta_{g3} = 0$. Это означает, что точка g_3 существует только в узком диапазоне чисел Маха ($\mathrm{M} \in [\mathrm{M}_d, \mathrm{M}_{F_2}]$), опускаясь с увеличением M вниз по сердцевидной кривой *III* до начала координат (рис. 2,*е*).

Вторая точка пересечения изомах *I* и *III* (точка g_2) с ростом M поднимается вверх по кривой *I* и приближается к точке b, соответствующей границе области отсутствия решения (рис. 2,*ж*). При $\mathrm{M} = \mathrm{M}_b$ точки b и g_2 сливаются (рис. 2,*з*). Это приводит к тому, что при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_b$ отраженный разрыв может быть только волной разрежения (рис. 2,*и*).

Описанное поведение изомах на плоскости интенсивностей волн приводит к сужению области O_2, в которой распад волны сопровождается отраженным скачком уплотнения, и к ее исчезновению при $\mathrm{M} = \mathrm{M}_b$. Значение M_b определяется из системы (3.5), (3.6), в которой следует положить $J_2 = 1$ (кривая *5* на рис. 3).

Как видно из рис. 2,*и*, при $\mathrm{M} > \mathrm{M}_b$ точка g_2 не исчезает, однако ее физический смысл меняется. Действительно, в диапазоне интенсивностей $J_1 \in [1, J_{g2}]$ решение системы (3.1) существует и единственно. Однако, начиная с точки g_2, интенсивности J_1 отвечают две точки пересечения кривых *II* и *III* (точки *2а* и *2б*). Указанная ситуация типична в теории интерференции ударных волн [4]. Обычно в таких случаях из двух решений выбирают то, которое соответствует более слабому скачку уплотнения (точка *2а*).

При $\mathrm{M} > \mathrm{M}_b$ меняется также тип отраженного разрыва в точке b, отвечающей границе отсутствия решения. В соответствии с этим изменится и система уравнений для нахождения зависимости $J_b(\mathrm{M})$.

Для определения системы уравнений, аналогичной (3.5), (3.6), необходимо рассмотреть поведение функции $J_1(J_3)$, задаваемой уравнениями (3.1). Как и в случае скачка уплотнения, эта функция немонотонна (кривая *2* на рис. 5), а точка максимума отвечает искомой границе отсутствия решения. Исследование функции $J_1(J_3)$ на экстремум позволяет записать систему уравнений для определения зависимости $J_b(\mathrm{M})$ в случае $\mathrm{M} > \mathrm{M}_b$:

$$\omega(\mathrm{M}) - 2\omega(\mathrm{M}_1) + \omega(\mathrm{M}_2) = \beta_3^{(j)}(\mathrm{M}, J_3); \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \beta_2^{(i)}(\mathrm{M}_1, J_2)}{\partial \Lambda_2} + \frac{\partial \beta_3^{(j)}(\mathrm{M}, J_3)}{\partial \Lambda_3} = 0, \quad J_1 J_2 = J_3, \quad \mu = \mu_1 J_1^{1/\eta}, \quad \mu_2 = \mu J_3^{-1/\eta}. \tag{3.11}$$

Производные в (3.10), (3.11) рассчитываются по формулам (3.7) и (3.9) для j и i соответственно.

С дальнейшим увеличением числа Маха описанная схема распада волны сжатия принципиально не меняется.

4. Значение γ существенно влияет на особые числа Маха, а следовательно, и на границы характерных областей решения задачи.

Поскольку значение M_s (3.4) от γ практически не зависит (кривая *3* на рис. 3) и с точностью до второго знака равно 1,50 во всем диапазоне $\gamma \in (1{,}2]$, то начало области отсутствия решения задачи слабо зависит от γ.

В отличие от слабо убывающей монотонной зависимости $\mathrm{M}_{F_1}(\gamma)$ (кривая *1* на рис. 3), функция $\mathrm{M}_{F_2}(\gamma)$ (кривая *2*) стремится к бесконечности при $\gamma \to 5/3$. В диапазоне $\gamma \in [5/3{,}2]$ при любых $\mathrm{M} > \mathrm{M}_d$ отраженный разрыв может быть как волной разрежения, так и скачком уплотнения.

В свою очередь, функция $\mathrm{M}_d(\gamma)$ (кривая *4* на рис. 3) существует лишь при $\gamma \in [1{,}15; 2]$. При $\gamma < 1{,}15$ изомахи *I* и *III* на рис. 2 при любых числах Маха имеют не более одной точки пересечения.

Кривой *5* на рис. 3 отвечает зависимость $\mathrm{M}_b(\gamma)$; видно, что с ростом γ число Маха $\mathrm{M} = \mathrm{M}_b$ монотонно возрастает, достигая наибольшего значения $\mathrm{M}_b = 6{,}844$ при $\gamma = 2$. Следовательно, принципиальных отличий в поведении M_b при различных γ нет.

Анализ рис. 2 показывает, что при малых числах Маха (рис. 2,*а*,*б*) отмеченная звездочкой граничная точка изомахи *I*, описываемая формулами (1.5), находится ниже вершины сердцевидной кривой *III*. С ростом M появляется диапазон интенсивностей волны сжатия, в котором статическое давление за волной сжатия превышает статическое давление за прямым скачком уплотнения (рис. 2,*в*–*и*). Следовательно, существует особое число

Маха $\mathrm{M} = \mathrm{M}_m$, при котором имеет место равенство $J_* = J_m$; значение M_m находится как корень уравнения

$$\varepsilon\mu_m^\eta - (1+\varepsilon)\mu_m + 1 = 0. \tag{4.1}$$

Аналитическое решение уравнения (4.1) существует, если $\eta = N + 1$ ($N = 1, 2, 3$). При $N = 1$ ($\gamma = 2$) $\mathrm{M}_m = 2{,}646$, при $N = 2$ ($\gamma = 3/2$) $\mathrm{M}_m = 2{,}226$, а при $N = 3$ ($\gamma = 4/3$) уравнение (4.1) является кубическим и имеет корень $\mathrm{M}_m = 2{,}102$. Численное решение (4.1) для $\gamma = 1{,}4$ дает $\mathrm{M}_m = 2{,}151$.

5. Максимальный угол поворота потока $\beta_m^{(i)}$ в центрированной волне сжатия без учета ударно-волнового взаимодействия в сингулярной точке центрированной волны получается из соотношений (3.1), (3.2), в которых следует положить $\mathrm{M}\to\infty$:

$$\beta_m^{(i)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.1}$$

($\beta_m^{(i)} = 130{,}45^\circ$ для $\gamma = 1{,}4$).

Указанный угол в несколько раз превышает максимальный угол поворота потока на скачке уплотнения $\beta_m^{(j)}$ [4]:

$$\beta_m^{(j)} = \operatorname{arctg}\,\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.2}$$

($\beta_m^{(j)} = 45{,}58^\circ$ для $\gamma = 1{,}4$). Кроме того, значение $\beta_m^{(i)}$ неограниченно возрастает с уменьшением γ, что противоречит физическому смыслу задачи.

Учет ударно-волнового взаимодействия в сингулярной точке волны накладывает существенное ограничение на $\beta_m^{(i)}$ в изоэнтропной волне сжатия: предельный угол определяется как максимум функции $\beta_b(\mathrm{M})$, который достигается при $\mathrm{M} = \mathrm{M}_a$ (точка *a* на кривой *3* рис. 4). Особое число Маха M_a определяется из анализа на экстремум функции $\beta_b(\mathrm{M})$ и зависит только от γ. Из рис. 3 (кривая *6*) видно, что при любых γ значение M_a конечно, т. е. $\beta_b(\infty) < \beta_b(\mathrm{M}_a)$. При этом в диапазоне $\gamma\in(1; 1{,}82]$ максимуму угла $\beta_b(\mathrm{M})$ соответствует отраженная волна разрежения ($\mathrm{M}_a > \mathrm{M}_b$), а при $\gamma\in[1{,}82; 2]$ максимум угла поворота потока реализуется в системе с отраженным скачком уплотнения.

Из проведенных расчетов следует, что, в отличие от угла $\beta_m^{(i)}$ (5.1), угол $\beta_a = \beta_b(\mathrm{M}_a)$ конечен для любого $\gamma\in(1,2]$: функция $\beta_a(\gamma)$ монотонно уменьшается от $\beta_a = 53{,}135^\circ$ ($\gamma \to 1$) до $\beta_a = 28{,}308^\circ$ ($\gamma = 2$). Кроме того, угол β_a при любых γ меньше максимального угла поворота потока $\beta_m^{(j)}$ (5.2) на скачке уплотнения.

Следует также отметить, что максимальный суммарный угол поворота потока в системе, совпадающий с максимальным углом поворота потока на результирующем скачке уплотнения *3* (см. рис. 1), монотонно увеличивается с ростом M и стремится к $\beta_m^{(j)}$ (5.2) при $\mathrm{M} \to \infty$.

6. Как показано в [5, 6], изоэнтропная волна сжатия используется для создания оптимальных ударно-волновых систем. На практике газодинамическое проектирование таких систем стараются осуществлять так, чтобы волна была центрированной [5], а поток за ней обладал экстремальными свойствами.

Одной из важнейших и часто встречающихся на практике задач управления сверхзвуковым потоком является торможение потока до дозвуковых скоростей с минимальными потерями полного давления. Очевидное решение такой задачи — создание изоэнтропной волны сжатия с интенсивностью $J_*(\mathrm{M})$ (1.5), которая без потерь тормозит поток до скорости, равной скорости звука. Однако учет распада волны в сингулярной точке показывает, что при любых числах Маха течение за отраженным разрывом *2* (см. рис. 1) сверхзвуковое

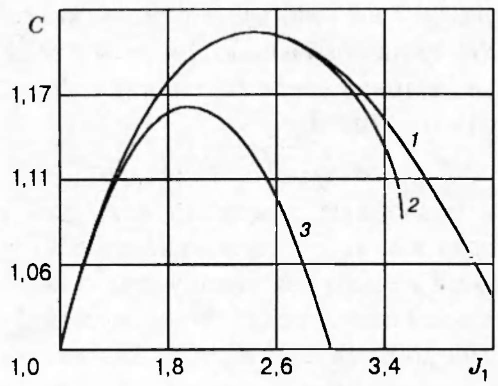

Рис. 6

при всех значениях интенсивности изоэнтропной волны, лежащих в области существования решения.

Действительно, в диапазоне $M \in [1, M_s]$ сверхзвуковой поток, тормозящийся до скорости звука в волне сжатия с интенсивностью J_*, вновь разгоняется в отраженной волне разрежения. В случае $M > M_s$ значение интенсивности J_* лежит в области O_3 отсутствия решения задачи (см. рис. 4). За волнами с интенсивностями из диапазона $[1, J_b]$ области существования решения задачи течение сверхзвуковое как за самой волной, так и за отраженным разрывом. Следовательно, одиночная центрированная волна сжатия затормозить поток до дозвуковой скорости не может. Поэтому для решения поставленной задачи надо либо использовать оптимальные системы, состоящие только из скачков уплотнения [6], либо формировать за изоэнтропной волной дополнительный скачок с дозвуковым течением за ним.

В [6] доказывается, что при $M > \sqrt{2}$ изоэнтропную волну сжатия можно эффективно использовать для максимального восстановления скоростного напора. На рис. 6 приведено отношение скоростного напора до и за волной (кривая *1*, построенная для $M = 2$), рассчитываемое по формуле [1]

$$C \equiv \frac{\rho_1 v_1^2}{\rho v^2} = \frac{\mu J_1^{1/\gamma} - (1-\varepsilon) J_1}{\mu - (1-\varepsilon)}.$$

Из рис. 6 видно, что функция $C(J_1)$ достигает максимума при $J_1 = J_g$:

$$J_g = \left(\frac{\mu}{1+\varepsilon}\right)^{\eta}.$$

Следовательно, изоэнтропная волна с интенсивностью J_g является оптимальной для скоростного напора.

Проведенные расчеты показали, что учет взаимодействия в сингулярной точке в диапазоне $M \in [\sqrt{2}; 2{,}6]$ практически не влияет на положение максимума (кривая *2* на рис. 6). Однако с ростом M соответствующая максимуму интенсивность постепенно приближается к границе области отсутствия решения и при $M > 2{,}6$ исчезает. Это приводит к тому, что при больших значениях M отношение скоростных напоров монотонно увеличивается с ростом J и достигает наибольшего значения при $J = J_b$, т. е. на границе отсутствия решения.

В отличие от отношения скоростных напоров в области под тангенциальным разрывом, отношение скоростного напора на результирующем скачке ведет себя немонотонно при любых значениях M (кривая *3* на рис. 6), достигая максимума при некоторой интенсивности J_d волны сжатия. Расчеты показывают, что эта величина может быть аппроксимирована с высокой точностью выражением интенсивности одиночного оптимального для скоростного напора скачка уплотнения [6]

$$J_d \approx (\sqrt{\mu(1+\varepsilon)} - 1)/\varepsilon.$$

Полученные результаты позволяют рекомендовать для восстановления скоростного напора центрированную волну сжатия с интенсивностью $J_1 = J_d$: при такой интенсивности значение скоростного напора велико как сверху, так и снизу тангенциального разрыва. Дальнейшее увеличение J_1, способствуя росту исследуемой функции за отраженным разрывом *2* (см. рис. 1), одновременно приводит к уменьшению скоростного напора за скачком уплотнения *3*, что ухудшает интегральные характеристики скоростного напора в потоке за точкой распада разрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда по исследованиям в области фундаментального естествознания (код проекта 95-0-4.2-171).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
2. **Росляков Г. С.** Взаимодействие плоских скачков одного направления // Численные методы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. С. 28–51.
3. **Росляков Г. С., Старых А. Л., Усков В. Н.** Интерференция стационарных скачков уплотнения одного направления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 143–152.
4. **Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н.** Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Сиб. изд. фирма ВО «Наука», 1995.
5. **Киреев В. И., Войновский А. С.** Численное моделирование газодинамических течений. М.: Изд-во МАИ, 1991.
6. **Омельченко А. В., Усков В. Н.** Оптимальные ударно-волновые системы // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 118–126.
7. **Черный Г. Г.** Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 27/IX 1996 г.