АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПЛАСТЕ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ (ДВУЧЛЕННОМ) ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Л. М. Гаджиев

(Баку)

При нестационарном режиме фильтрации двучленный закон сопротивления можно написать в виде [1]

$$-\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{\mu}{k}\,v+b\rho v^2\operatorname{sign}v \tag{1}$$

Здесь p — давление, v — скорость фильтрации, μ — коэффициент вязкости газа, k — коэффициент проницаемости, ρ — плотность газа, s — пространственная координата, b — так называемый коэффициент турбулентности.

Построим автомодельное решение одномерной задачи о нестационарной фильтрации газа в пласте.

Для простоты сделаем специальный подбор начальных и граничных условий, т. е. примем, что в начальный момент давление газа в пласте равно нулю $p(s,\,0)=0$ и пласт бесконечен. Согласно [2], надо предполагать, что в данном случае будет иметь место конечная скорость распространения возмущения.

Напишем дифференциальное уравнение нестационарной изотермической фильтрации в случае закачки газа в пласт ($\operatorname{sign}v=1$). Умножив обе части (1) на ρ, получим квадратное уравнение относительно произведения ρv; разрешая его, найдем

$$\rho v=-\frac{1}{2b}\left[a-\left(a^2-4b\rho\frac{\partial p}{\partial s}\right)^{1/2}\right]$$

Подставляя значение ρv в уравнение неразрывности

$$\frac{1}{s^n}\frac{\partial}{\partial s}(s^n\rho v)=-m\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Получим

$$\frac{1}{S^n}\frac{\partial}{\partial s}\left\{s^n\left[a-\left(a^2-4b\frac{\rho_{am}}{p_{am}}p\,\frac{\partial p}{\partial s}\right)^{1/2}\right]\right\}=2mb\,\frac{\rho^\circ}{p^\circ}\frac{\partial p}{\partial t}\left(a=\frac{\mu}{k}\right) \tag{2}$$

Здесь t — время, m — коэффициент пористости, $n=0,\,1,\,2$ (плоские движения, движения с осевой и центральной симметрией).

Требуется найти решение уравнения (2) при условиях

$$\lim_{s\to 0}\frac{F(s)\,a}{2b}\left[-1+\left(1-\frac{4b}{a^2}\frac{\rho^\circ}{p^\circ}\,p\,\frac{\partial p}{\partial s}\right)^{1/2}\right]=At^\beta,\qquad p(s,\,0)=0 \tag{3}$$

Здесь $F(s)$ — площадь поперечного сечения пласта.

В случае прямолинейно-параллельной фильтрации F не зависит от s и определяется $F=1h$, в случаях плоско-радиальной и сферически-радиальной фильтраций соответственно $F=2\pi hs$, $F=2\pi s^2$.

Используя теорию размерностей [3], нетрудно убедиться, что решение задачи автомодельно и имеет вид

$$p=a\left(\frac{p^{\circ 2}t}{mb^2\rho^{\circ 2}}\right)^{1/3}f(\eta),\qquad \eta=\left(\frac{m^2b\rho^\circ}{p^\circ}\right)^{1/3}\frac{s}{t^{2/3}} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), получим

$$\eta\frac{d^2f^2}{d\eta^2}+n\left[-1+2\frac{df^2}{d\eta}+\left(1-2\frac{df^2}{d\eta}\right)^{1/2}\right]=\frac{2}{3}\eta\left(f-2\eta\frac{df}{d\eta}\right)\left(1-2\frac{df^2}{d\eta}\right)^{1/2} \tag{5}$$

Граничные условия для f имеют вид:

для $n=0$ ($\beta=0$)

$$\lim_{\eta\to 0}D_1\left[-1+\left(1-2\frac{df^2}{d\eta}\right)^{1/2}\right]=1,\qquad f(\infty)=0 \tag{6}$$

для $n = 1$ $(\beta = {}^2/_3)$

$$\lim_{\eta\to 0} D_2\eta \left[-1 + \left(1 - 2\frac{df^2}{d\eta}\right)^{1/2}\right] = 1, \qquad f(\infty) = 0 \tag{7}$$

для $n = 2$ $(\beta = {}^4/_3)$

$$\lim_{\eta\to 0} D_3\eta^2 \left[-1 + \left(1 - 2\frac{df^2}{d\eta}\right)^{1/2}\right] = 1, \qquad f(\infty) = 0 \tag{8}$$

$$D_1 = \frac{ha}{2bA}, \qquad D_2 = \frac{\pi ah}{bA}\left(\frac{p^\circ}{m^2 b\rho^\circ}\right)^{1/3}, \qquad D_3 = \frac{\pi a}{bA}\left(\frac{p^\circ}{m^2 b\rho^\circ}\right)^{2/3}$$

Как видно, решение уравнения (5) возможно только численным путем. Численный расчет можно проводить следующим образом. При $\eta = 1$ задаются значения f и $df^2/d\eta$, решается задача Коши для уравнения (5) методом Рунге — Кутта, определяются значения $df^2/d\eta$ при $\eta = 0$ и затем находятся значения D.

Здесь ограничиваемся случаем, когда $n = 0$; результаты вычислений приведены в таблице.

Значения f

η	численное решение	приближенное решение	
		(9) и (10)	(11)
0.00	0.902195	0.908295	0.910330
0.10	0.822601	0.825712	0.827949
0.20	0.738969	0.743169	0.745587
0.30	0.656495	0.660606	0.663174
0.40	0.574363	0.578014	0.580775
0.50	0.492670	0.495480	0.498397
0.60	0.416496	0.412916	0.416053
0.70	0.328353	0.330303	0.333617
0.80	0.246516	0.247790	0.249199
0.90	0.164077	0.165227	0.168819
1.00	0.081998	0.082462	0.083023

Оценим приближенное решение задачи, полученное на основании метода, предложенного в работе [4], при использовании различных интегральных соотношений.

Приближенное решение этой задачи (при $n = 0$) с применением метода интегральных соотношений будет:

при использовании первого интегрального соотношения (уравнения материального баланса)

$$f^2 = M_1(1 - 2M_4^{-1}\eta + M_4^{-2}\eta^2) \tag{9}$$

при использовании второго интегрального соотношения

$$f^2 = M_2(1 - 2M_5^{-1}\eta + M_5^{-2}\eta) \tag{10}$$

при использовании третьего интегрального соотношения

$$f^2 = M_3(1 - 2M_6^{-1}\eta + M_6^{-2}\eta^2) \tag{11}$$

$$M_1 = 4^{-2/3} D_1^{-4/3} (D_1^{-1} + 2)^{2/3}, \quad M_2 = {}^1/_4 \{36/5 [{}^1/_3 (c^{1/2} - 1) - {}^1/_2 D_1^{-1} (D^{-1} + 2)]\}^{2/3}$$

$$M_3 = {}^1/_4 [{}^{36}/_7 D_1^{-1} (D_1^{-1} + 2)]^{2/3} \{-1 + 4D_1^2 (D_1^{-1} + 2)^{-2} [{}^1/_5 (1 - c^2 \sqrt{c}) -$$
$$- {}^1/_3 c (1 - c\sqrt{c})]\}^{2/3}, \qquad c = 1 + D_1^{-1}(D_1^{-1} + 2)$$

$$M_4 = \frac{4M_1}{c-1}, \qquad M_5 = \frac{4M_2}{c-1}, \qquad M_6 = \frac{4M_3}{c-1}$$

Результаты расчетов по формулам (9), (10) и (11) приведены также в таблице.

Как видно из таблицы, приближенные решения почти совпадают с численным решением.

Кроме того, из таблицы следует, что при решении задач можно использовать и другие интегральные соотношения.

Поступила 5 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Минский Е. М., Пешкин М. А. Экспериментальное исследование нестационарного движения газа в пористой среде при нелинейном законе сопротивления. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М.— Л., Гостехиздат, 1951.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.