Таким образом, на продольном разрезе

$$2G\left(v_1^+ - v_1^-\right) = (\varkappa + 1)\,\mathrm{Im}\,\widetilde{Z}_1^+;$$

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{Z}_1^{(1)+} = \sigma_1\left[(\alpha_{10} + \alpha_{11})\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{4}{3c^2}\alpha_{11}\sqrt{(c^2 - x^2)^3}\right];$$

$$\Delta A_1 = \frac{1}{2G}\frac{\varkappa + 1}{2}\int_{-c}^{c}\sigma_1\,\mathrm{Im}\,\widetilde{Z}_1^{(1)+}(x)\,dx = \frac{\pi c^2}{E}\sigma_1^2\alpha_{10}.$$

Окончательно прирост энергии на одну продольную трещину примет вид

$$\Delta A_c = \frac{\pi c^2}{E}\left(\sigma_1\sigma_2\alpha_{10} + \sigma_2^2\beta_{10} + \tau^2\omega_{20}\right).$$

Аналогичным путем получаем прирост энергии на одну поперечную трещину

$$\Delta A_a = \frac{\pi a^2}{E}\left(\sigma_1^2\alpha_{40} + \sigma_1\sigma_2\beta_{40} + \tau^2\omega_{30}\right),$$

где величины α_{n_0}, β_{n_0}, ω_{n_0} определяются равенствами (2.2), (2.5), (2.6).

Поступила 14 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.** О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Труды конф. по теории волнового сопротивления. М., ЦАГИ, 1937.
2. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
3. **Koiter W. T.** An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet.—«Ingenieur-Archiv», 1958, Bd 28.
4. **Койтер В. Т.** Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. (К 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили), 1974.
5. **Качанов Л. М.** Основы механики разрушения. М., «Наука», 1974.
6. **Михлин С. Г.** Интегральные уравнения. М. —Л., Гостехиздат, 1949.

УДК 624.131.6

К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА РАССОЛЕНИЯ ГРУНТОВ

В. И. Пеньковский

(*Новосибирск*)

Из многих физико-химических факторов, влияющих на передвижение солей в почвогрунтах, обычно учитывают лишь молекулярно-фильтрационную диффузию, конвективный перенос и солеобмен между пористым скелетом грунта и движущимся раствором [1].

Процесс солеобмена носит диффузионный характер («внутренняя» диффузия) и зависит от вида почв и характера их засоления. Можно предположить, что для почв тяжелого механического состава (глины, тяжелые суглинки), обладающих большой водоудерживающей способностью, наиболее подходящей моделью будет гетерогенная пористая среда с пористостью $m = m_1 + m_2$, где m_1 означает объем транзитных пор, занятых движущимся раствором, m_2 — объем тупиковых пор, заполненных неподвижным раствором («связанной» влагой).

В этом случае внутридиффузионный процесс массообмена между порами обоих видов записывают [2,3] в виде изотермы типа Фрейндлиха

(0.1) $$\alpha\, \partial N/\partial t = c - N,$$

где $c(x, t)$, $N(x, t)$ — концентрации растворов в транзитных и тупиковых порах соответственно; t — время; x — координата; α — параметр кинетики. Засоление почв легкого механического состава (пески, легкие суглинки) с низкой водоудерживающей способностью связано с наличием солей в твердой фазе. Вместо уравнения (0.1) необходимо писать уравнения кинетики растворения солей Некоторые виды таких уравнений приведены в работах [1—5].

В данной работе рассмотрены три задачи, моделирующие процесс рассоления грунтов и допускающие аналитические решения при произвольно заданном начальном засолении.

При этом предполагается, что процесс «внутренней» диффузии протекает достаточно быстро (или бесконечно быстро) в сравнении с процессом «внешней» диффузии и конвекции.

1. Конвективный перенос солей в гетерогенной пористой среде. Пренебрегая влиянием внешнедиффузионного процесса, запишем уравнение баланса массы солей в движущемся растворе

(1. 1) $$vc_x + m_1 c_t + m_2 N_t = 0$$

(v — скорость фильтрации раствора по транзитным порам). Не умаляя общности, можно считать, что концентрация промывной воды равна нулю, и применительно к задаче о промывке засоленной почвы, первоначально свободной от гравитационной влаги, граничные условия к системе уравнений (0.1), (1.1) запишутся в виде

(1.2) $$c(0, t) = 0; \quad N(x, m_1 x/v) = \varphi(x).$$

Решение поставленной задачи находится с помощью метода Римана [6] и имеет вид

$$c(x, t) = e^{-x_2} \int_0^{x_1} I_0\left(2\sqrt{\xi x_2}\right) \varphi_0(x_1 - \xi)\, e^{-\xi} d\xi;$$

$$N(x, t) = c(x, t) + e^{-x_2}\left[I_0\left(2\sqrt{x_1 x_2}\right) \varphi_0(0)\, e^{-x_1} + \int_0^{x_1} I_0\left(2\sqrt{\xi x_2}\right) \varphi_0'(x_1 - \xi)\, e^{-\xi} d\xi \right],$$

где $x_1 = m_2 x/(v\alpha)$; $x_2 = (t - m_1 x/v)/\alpha$;

$\varphi_0(x_1) = \varphi(v\alpha x_1/m_2$; $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; штрих обозначает дифференцирование.

Если процесс «внутренней» диффузии протекает достаточно быстро, то вместо записи уравнения типа (0.1) иногда делают одно из следующих предположений [7]:

(A) $$N(x, t) = c(x + \varkappa, t);$$

(B) $$N(x, t) = c(x, t - \varkappa_1),$$

где величины $\varkappa$ — «путь запаздывания» и $\varkappa_1$ —«время запаздывания» считаются малыми.

Предполагая справедливыми разложения $c(x+\varkappa, t) \approx c(x, t) + \varkappa c_x$; $c(x, t - \varkappa_1) \approx c(x, t) - \varkappa_1 c_t$ и подставляя их в уравнение (1.1), получают уравнение метода «эффективных тарелок» (предположение (A))

(1.3) $$vc_x + mc_t + m_2 \varkappa c_{xt} = 0$$

или уравнение метода «запаздывания» (предположение (B))

(1.4). $$vc_x + mc_t - m_2 \varkappa_1 c_{tt} = 0.$$

Уравнение (1.3) гиперболического, а уравнение (1.4) параболического типа. Следовательно, формулировка краевых задач и свойства решений этих уравнений будут различными. Предположения (А) и (В) в некотором смысле эквивалентны. В этом можно убедиться. Поскольку функции c и N зависят от параметра $\varkappa$ (или $\varkappa_1$), предположения (А) и (В) соответственно принимают вид

$$N(x,t,\varkappa)=c(x+\varkappa,t,\varkappa)=c_0(x,t)+\left[c_1(x,t)+\frac{\partial c_0}{\partial x}(x,t)\right]\varkappa+0(\varkappa^2);$$

$$N(x,t,\varkappa_1)=c(x,t-\varkappa_1,\varkappa_1)=c_0(x,t)+\left[c_1(x,t)-\frac{\partial c_0}{\partial t}(x,t)\right]\varkappa_1+0\left(\varkappa_1^2\right),$$

где $\quad c_1(x,t)=c_\varkappa(x,t,0), \quad (c_1(x,t)=c_{\varkappa_1}(x,t,0)).$

Подставляя эти разложения в уравнение (1.1) и условия (1.2), путем приравнивания коэффициентов при степенях параметра $\varkappa$ (или $\varkappa_1$) для функций $c_0(x,t)$ и $c_1(x,t)$ получим задачи:

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} v\dfrac{\partial c_0}{\partial x}+m\dfrac{\partial c_0}{\partial t}=0, \quad 0<x<\dfrac{vt}{m_1}, \quad t>0,\\ c_0(0,t)=0, \quad c_0(x,m_1x/v)=\varphi(x); \end{cases}$$

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{cases} v\dfrac{\partial c_1}{\partial x}+m\dfrac{\partial c_1}{\partial t}=-m_2\dfrac{\partial^2 c_0}{\partial x\partial t}\left(=m_2\dfrac{\partial^2 c_0}{\partial t^2}\right),\\ c_1(0,t)=0, \quad c_1(x,m_1x/v)=-c_{0x}(=c_{0t}). \end{cases}$$

Положим $\tau=vt/m_1$, $\lambda=m_1/m$, тогда решение задачи (1.5) запишется в виде

$$c_0(x,t)=\begin{cases}\varphi(z) \text{ для } \lambda\tau\leqslant x\leqslant\tau,\\ 0 \text{ для } 0\leqslant x<\lambda\tau;\end{cases}$$
$$z=(x=\lambda\tau)/(1-\lambda).$$

Предполагая функцию $\varphi(x)$ дважды дифференцируемой, задачу (1.6) приведем к виду

$$\text{(1.7)} \qquad \frac{\partial c_1}{\partial x}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial c_1}{\partial t}=\frac{1}{1-\lambda}\varphi''(z)\left(=\frac{v}{m_2}\varphi''(z)\right),$$

$$c_1(0,t)=0; \ c_1(x,x)=-\varphi'(x)/(1-\lambda) \ (=-v\varphi'(x)/m_2).$$

Отсюда видно, что предположения (А) и (В) эквивалентны, если $\varkappa=v\varkappa_1/m$.

Решением задачи (1.7) будет функция

$$\text{(1.8)} \qquad c_1(x,t)=\begin{cases}-(1-\lambda)^{-1}\varphi'(z)-\lambda(1-\lambda)^{-2}(x-\tau)\varphi''(z) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } \lambda\tau\leqslant x\leqslant\tau,\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \text{для } 0\leqslant x<\lambda\tau.\end{cases}$$

Можно прийти к такому же результату, отыскивая решение системы уравнений (0.1), (1.1) при условиях (1.2) в виде рядов по степеням параметра α и удерживая лишь по два члена разложений. Оказывается, что $\varkappa_1=\alpha$ и, учитывая (1.8), с точностью до величин порядка α включительно это решение запишем в виде

$$c(x,t,\alpha)=\begin{cases}\varphi(z)-\dfrac{v\alpha}{m_2}\left[\varphi'(z)-\dfrac{m_1}{m_2}\left(x-\dfrac{vt}{m_1}\right)\varphi''(z)\right], & \dfrac{vt}{m}\leqslant x\leqslant\dfrac{vt}{m_1},\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant vt/m;\end{cases}$$

$$N(x,t,\alpha)=\begin{cases}\varphi(z)-\dfrac{v\alpha m_1}{m_2^2}\left(x-\dfrac{vt}{m_1}\right)\varphi''(z), & \dfrac{vt}{m}\leqslant x\leqslant\dfrac{vt}{m_1},\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant vt/m.\end{cases}$$

2. Конвективная диффузия в гетерогенной пористой среде. Первое приближение. Учет влияния внешнедиффузионного процесса сводится к добавлению в правую часть уравнения (1.1) члена Dc_{xx}, где D — коэффициент диффузии. В случае сравнительно быстрого солеобмена между транзитными и тупиковыми порами (малые α) первое приближение $c_0(x, t) = N_0(x, t)$ как первые члены разложений функций $c(x, t, \alpha)$ и $N(x, t, \alpha)$ по степеням параметра α должно определяться по условиям

$$\begin{cases} D\dfrac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} - v\dfrac{\partial c_0}{\partial x} = m\dfrac{\partial c_0}{\partial t}; & 0 < x < x_0(t), \quad t > 0, \\ c_0 = c_n, \quad x = 0; & c_0 = N_0 = \varphi_0(x), \quad t = m_1 x/v, \end{cases} \tag{2.1}$$

где c_n — концентрация поливной воды; $\varphi_0(x)$ — начальная концентрация солей в «связанном» с грунтом растворе; $x_0 = vt/m_1$ — фронт продвижения поливной воды.

Положим $u = c_0 - c_n$, $\xi = vx/D$, $\tau = v^2 t/(m_1 D)$, $\varphi(\xi) = \varphi_0(D\xi/v) - c_n$, тогда задача (2.1) принимает вид

$$u_{\xi\xi} - u_\xi = \lambda^{-1} u_\tau, \quad 0 < \xi < \tau, \quad \tau > 0; \tag{2.2}$$

$$\xi = 0, \quad u = 0, \quad \xi = \tau, \quad u = \varphi(\tau). \tag{2.3}$$

Пусть $u(\xi, \tau)$ продолжена как решение уравнения (2.2) на весь квадрант $\xi > 0$, $\tau > 0$ и $\rho(\xi) = u(\xi, 0)$. Замена искомой функции $u = w \exp(\xi/2 - \lambda\tau/4)$ приводит к задаче

$$w_{\xi\xi} = \lambda^{-1} w_\tau, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0,$$

$$\xi = 0, \quad w = 0, \quad \tau = 0, \quad w = \rho_1(\xi) = \rho(\xi)\exp(-\xi/2),$$

решением которой будет функция [8]

$$w = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}} \int_0^\infty \rho_1(s) \left\{\exp\left[-\frac{(\xi - s)^2}{4\lambda\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi + s)^2}{4\lambda\tau}\right]\right\} ds.$$

Для определения функции $\rho_1(\xi)$ из второго условия (2.3) получаем интегральное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda\tau}} \int_0^\infty F(s, \lambda) \exp\left(-\frac{s^2}{4\lambda\tau}\right) ds = e^{\gamma\tau}\varphi(\tau), \tag{2.4}$$

$$(F(s, \lambda) = \rho_1(s)\,\mathrm{sh}\,[s/(2\lambda)], \quad \gamma = (1 - \lambda)^2/(4\lambda)).$$

Обозначим посредством

$$L_p(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)\, e^{-ps} ds; \quad L_s^{-1}(L_p(\varphi)) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} L_p(\varphi)\, e^{ps} dp = \varphi(s)$$

прямое и обратное преобразование Лапласа функции $\varphi(s)$. Применяя операцию L_p к обеим частям уравнения (2.4), найдем [9]

$$\sqrt{\lambda p}\, L_{p-\gamma}(\varphi) = \int_0^\infty F(s, \lambda)\, e^{-s\sqrt{p/\lambda}} ds.$$

Заменяя $\sqrt{p/\lambda}$ снова на p, приходим к соотношению

$$\lambda p L_{\lambda p^2 - \gamma}(\varphi) = L_p(F)$$

и, применяя теперь операцию L_s^{-1}, получаем формулу

$$\rho_1(s) = \mathrm{sh}^{-1}[s/(2\lambda)]\, L_s^{-1}[\lambda p L_{\lambda p^2 - \gamma}(\varphi)],$$

завершающую решение исходной задачи (2.1).

Пример. Пусть $\varphi(\tau) = \exp(\mu\tau)$. Тогда

$$L_p(\varphi) = (p-\mu)^{-1}; \quad \lambda p L_{\lambda p^2-\gamma}(\varphi) = p\,[p^2 - (\mu+\gamma)/\lambda]^{-1}.$$

После вычисления вычетов в точках $p = \pm\sqrt{(\mu+\gamma)/\lambda}$ получается результат

$$\rho_1(s) = \mathrm{ch}\,[s\sqrt{(\mu+\gamma/\lambda}]\,\mathrm{sh}^{-1}[s/(2\lambda)].$$

При $\mu=0$ получим случай постоянного по глубине засоления

$$\rho_1(s) = \mathrm{ch}\,[s(1-\lambda)/(2\lambda)]\,\mathrm{sh}^{-1}\,[s/(2\lambda)].$$

Решение задачи (2.1) или (2.2), (2.3) единственно. Это доказывается аналогично тому, как сделано в работе [10]. Рассматривая функцию

$$H(\tau) = \int_0^\tau u^2(\xi,\tau)\,d\xi = 0,$$

где $u=u_1-u_2$ — разность двух решений уравнения (2.2), удовлетворяющая однородным условиям $u(0,\tau)=u(\tau,\tau)=0$, находим

$$H'(\tau) = -2\lambda\int_0^\tau u_\xi^2(\xi,\tau)\,d\xi \leqslant 0.$$

Поскольку $H(0)=0$, $H(\tau)\equiv 0$, и, следовательно, однородная задача имеет только тривиальное решение.

3. Конвективная диффузия в пористой среде с мгновенным растворением солей. Рассмотрим случай, когда почвы легкого механического состава содержат легкорастворимые соли в твердой фазе. Предположим, что в момент подхода границы промачивания $x=x_0(t)$ соли мгновенно растворяются и в дальнейшем передвигаются под воздействием конвективного переноса и фильтрационной диффузии. Задача сводится к нахождению функции $c(x,t)$ по условиям:

$$\begin{cases} Dc_{xx} - vc_x = mc_t, & 0 < x < x_0(t), \quad t > 0, \\ c = c_n, \quad x = 0, & Dc_x = N(x)\,x_0', \quad x = x_0 = vt/m, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $N(x)$ — начальная плотность распределения солей в физическом пространстве (частный случай этой задачи $N(x)=N_0=\mathrm{const}$ рассмотрен в работе [10]). Перепишем задачу (3.1) в безразмерных переменных ξ, τ:

$$\begin{cases} u_{\xi\xi} - u_\xi = u_\tau, & 0 < \xi < \tau, \quad \tau > 0, \\ u=0, \quad \xi=0, & u_\xi = \varphi_1(\tau), \quad \xi=\tau \end{cases}$$

$$(u = c - c_n, \quad \xi = vx/D, \quad \tau = v^2t/(mD), \quad \varphi_1(\tau) = N(D\tau/v)/m).$$

Как и при решении задачи (2.2), (2.3), представим функцию $u(\xi,\tau)$ в виде

$$u(\xi,\tau) = \frac{\exp(\xi/2-\tau/4)}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty \rho_1(s)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-s)^2}{4\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi+s)^2}{4\tau}\right]\right\}ds.$$

Искомая функция $\rho_1(s)$ с начальным данным

$$\rho_1(0) = 0 \tag{3.2}$$

должна быть найдена из граничного условия при $\xi=\tau$. Можно убедиться несложными выкладками, что последнее приводит к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty F_1(s)\exp\left(-\frac{s^2}{4\tau}\right)ds = \varphi_1(\tau)$$

$$(F_1(s) = [\rho_1(s)\,\mathrm{ch}\,(s/2)]'),$$

совпадающему с уравнением (2.4) при $\lambda=1$ ($\gamma=0$). Таким образом,

$$F_1(s)=F(s,1)=L_s^{-1}[pL_{p^2}(\varphi_1)].$$

Интегрируя функцию $F_1(s)$ по s, с учетом условия (3.2) получим

$$\rho_1(s)=\operatorname{sh}^{-1}(s/2)\int_0^s L_s^{-1}[pL_{p^2}(\varphi_1)]\,ds.$$

Пример. Пусть $\varphi_1=\exp(\mu\tau)$, тогда $L_p(\varphi_1)=(p-\mu)^{-1}$. Для $\mu>0$ (засоление возрастает с глубиной)

$$\rho_1(s)=\operatorname{sh}(s\sqrt{\mu})\,\mu^{-1/2}\operatorname{ch}^{-1}(s/2);$$

для $\mu<0$ (убывающее с глубиной засоление)

$$\rho_1(s)=\sin(s\sqrt{-\mu})(-\mu)^{-1/2}\operatorname{ch}^{-1}(s/2);$$

для $\mu=0$ (однородное засоление)

$$\rho_1(s)=s\operatorname{ch}^{-1}(s/2).$$

Последнее выражение совпадает с результатом, полученным в работе [10].

Поступила 28 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Развитие** исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). М., «Наука», 1969.
2. **Deans H. A.** A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media.—«Trans. AIME», 1963, vol. 228, p. 49.
3. **Дворкин Л. Б.** К теории конвективной диффузии солей в пористых средах. III. Конвективная диффузия солей в пористых средах с учетом влияния «тупиковых» пор.—«Журн. физ. химии», 1968, т. 42, № 4, с. 948—956.
4. **Веригин Н. Н.** О растворении и вымыве солей в грунтах.—«Научн. докл. высш. школы. Строительство», 1965, № 2.
5. **Пеньковский В. И.** Одномерная задача растворения и вымыва солей при фильтрации с большим значением критерия Пекле.— ПМТФ, 1969, № 2.
6. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 2, М., «Мир», 1964.
7. **Рачинский В. В.** Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М., «Наука», 1964.
8. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроизводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
9. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1958.
10. **Капранов Ю. И.** О некоторых точных решениях в задачах рассоления грунтов.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 1.