УДК 532.51

КОЛЛАПС СФЕРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ И КУМУЛЯЦИЯ ЭНЕРГИИ В ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Ф. Куропатенко

РФЯЦ, ВНИИ технической физики им. Е. И. Забабахина, 456770 Снежинск, V.F.Kuropatenko@rambler.ru

Построены аналитические решения задачи о схлопывании уединенной сферической оболочки или полости в идеальной сжимаемой жидкости с постоянной в процессе движения плотностью. Исследовано влияние газа, находящегося в полости, на движение ее границы. Предложена количественная характеристика кумуляции энергии. Получено выражение для кумуляции энергии при схлопывании оболочки или полости. Проведено сравнение кумуляции энергии с результатами Е. И. Забабахина.

Ключевые слова: кумуляция, несжимаемость, давление, энергия, скорость, энерговыделение.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема коллапса пузырьков в жидкости возникла в связи с кавитационной коррозией гребных винтов. Первое решение задачи о схлопывании сферического пузырька в несжимаемой идеальной жидкости получено Рэлеем в 1917 г. Второе дыхание проблема приобрела при создании атомного оружия. Е. И. Забабахин построил аналитическое решение о фокусировке сферической оболочки из несжимаемого материала под действием начального импульса. Публикация этого решения стала возможной только в 1965 г. [1]. Захлопывание пустой полости в сжимаемой идеальной жидкости рассматривал Ж. Хантер [2]. Построенное им решение имеет физический смысл лишь в ограниченной области, далекой от фокусировки. Глубокий анализ автомодельных решений о схлопывании полости в газе представлен в обзоре Я. М. Каждана и К. В. Брушлинского [3]. Далее Е. И. Забабахин рассмотрел коллапс сферического пузырька в вязкой жидкости [4]. Подробный обзор работ по схлопыванию сферических полостей в жидкости приведен в [5].

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И УПРОЩАЮЩИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Законы сохранения массы, импульса и энергии в идеальной сжимаемой жидкости в лагранжевых координатах для сферически-симметричного случая имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - 4\pi \frac{\partial r^2 u}{\partial M} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial M} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E + \frac{1}{2}u^2\right) + 4\pi \frac{\partial r^2 p u}{\partial M} = 0. \tag{3}$$

Здесь V — удельный объем, p — давление, u — скорость, r, M — эйлерова и лагранжева координаты, t — время, E — удельная внутренняя энергия. Из уравнений (1)–(3) следует уравнение для удельной внутренней энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + p\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (1)–(4) записаны в лагранжевых координатах. Входящие в них частные производные по времени являются субстанциональными производными, поскольку берутся при постоянной координате M, т. е. вдоль траектории частицы.

Из термодинамики известно, что сжимаемость β_s и скорость звука C определяются уравнениями

$$\beta_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s, \quad C^2 = -V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s.$$

Таким образом, квадрат скорости звука обратно пропорционален сжимаемости:

$$C^2 = V/\beta_s.$$

В природе нет несжимаемых веществ, просто в механике рассматривается обширный

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00072).

класс течений, в которых плотность остается постоянной при изменении времени. Постоянство плотности в течении многими воспринимается как несжимаемость, т. е. $\beta_s = 0$ и $C^2 = \infty$. Это заблуждение. Свойство течения — это не свойство вещества.

В сжимаемой жидкости с конечным удельным объемом при $\beta_s > 0$ всегда $C^2 > 0$ и система уравнений (1)–(3) имеет три вещественные характеристики. Предположение же о несжимаемости ($\beta_s = 0$) означает, что $C = \infty$ и система (1)–(3) не является гиперболической. И то и другое противоречит физическим фактам. Как правило [4], в модели «несжимаемой» жидкости при решении уравнения (2) закон сохранения энергии (3) и уравнение состояния не рассматриваются. Это порождает внутреннее противоречие модели. Из (4) следует, что в идеальной «несжимаемой» жидкости $E = \text{const}$ при $V = \text{const}$. Но в этом случае из уравнения состояния $p = p(V, E)$ следует, что и $p = \text{const}$. Однако при $V = \text{const}$ система уравнений (1), (2) имеет ряд решений, в которых p изменяется. Противоречие состоит в том, что, с одной стороны, давление изменяется, с другой — оно постоянно. Это противоречие неустранимо в рамках модели адиабатической «несжимаемой» среды, включающей только уравнения (1), (2). Оно устраняется, если предположить, что среда неадиабатична, т. е. в ней действуют источники энергии. В этом случае уравнение (4) должно быть записано в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -p\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{5}$$

Представим p и E в виде суммы холодных и тепловых компонентов:

$$p = p_{\text{х}}(V) + p_{\text{т}}, \quad E = E_{\text{х}}(V) + E_{\text{т}},$$

$$p_{\text{х}} = -\frac{dE_{\text{х}}}{dV}.$$

Подставив p и E в (5), получим уравнение для теплового давления и тепловой внутренней энергии. В общем случае изменение $E_{\text{т}}$ определяется диссипативной функцией q и работой теплового давления $p_{\text{т}}$ при изменении удельного объема. Но при $V = \text{const}$ работа теплового давления равна нулю и изменение $E_{\text{т}}$ определяется только диссипативной функцией q:

$$\frac{\partial E_{\text{т}}}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Из теории уравнений состояния [6] следует, что для жидкости параметры $p_{\text{т}}$ и $E_{\text{т}}$ связаны уравнением $p_{\text{т}}V = \Gamma(V)E_{\text{т}}$. При $V = \text{const}$ везде ниже это уравнение будет использоваться в виде

$$pV_0 = \Gamma E, \tag{6}$$

где $\Gamma = \text{const}$, $p = p_{\text{т}}$, $E = E_{\text{т}}$. Поскольку $p(t, M)$ является решением уравнений (1), (2), то и следующая из (6) зависимость $E(t, M)$ в каждом течении вполне конкретна. Она определена необходимостью выполнения условия $V = \text{const}$.

Одной из известных диссипативных функций является вязкость. Но поскольку у каждого вещества коэффициент вязкости вполне конкретен, вязкость обеспечивает лишь часть диссипации энергии, необходимой для поддержания постоянной плотности.

В данной работе ограничимся течениями, в которых удельный объем не зависит ни от M, ни от t, т. е. $V = \text{const}$. При этом жидкость является сжимаемой, ее сжимаемость β_s не равна нулю.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

При $V = V_0$ уравнение (1) сводится к уравнению $\dfrac{\partial r^2 u}{\partial M} = 0$, которое имеет решение

$$r^2 u = f(t). \tag{7}$$

Поскольку f не зависит от M, то (7) справедливо для любого M. На границе пузырька, где $M = 0$, уравнение (7) принимает вид

$$r_{\text{в}}^2 u_{\text{в}} = f(t), \tag{8}$$

где $r_{\text{в}}$ — координата внутренней поверхности, $u_{\text{в}}$ — скорость внутренней границы пузырька. Из (7) и (8) следует зависимость скорости от координаты

$$u = u_{\text{в}} r_{\text{в}}^2 r^{-2}.$$

Выразим $u_{\text{в}}$ из (8) и подставим в уравнение траектории границы $\dfrac{dr_{\text{в}}}{dt} = u_{\text{в}}$. Проинтегрировав это уравнение, получим зависимость

$$r_{\text{в}} = \left(r_{\text{в}0}^3 + \int_{t_0}^{t} 3f(t)dt\right)^{1/3}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) видно, что траектория поверхности полости полностью определяется функцией $f(t)$. Если $f(t) < 0$, то и $u_\text{в} < 0$ и, таким образом, полость коллапсирует. Время фокусировки поверхности полости $t_\text{ф}$ определяется из (9) при $r_\text{в} = 0$:

$$r_{\text{в}0}^3 + \int_{t_0}^{t_\text{ф}} 3f(t)dt = 0. \qquad (10)$$

Рассмотрим далее уравнение (2). С помощью (7), (8) преобразуем его к виду

$$\frac{\partial p}{\partial M} = -\frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{f}{r^2 r_\text{в}^2}\frac{df}{dr_\text{в}} - \frac{2f^2}{r^5}\right). \qquad (11)$$

Умножим (11) на $dM = 4\pi r^2 V_0^{-1} dr$ и проинтегрируем от 0 до M (от $r_\text{в}$ до r):

$$p = p_\text{в}(t) + \frac{1}{V_0}\left[\frac{f}{r_\text{в}^2}\frac{df}{dr_\text{в}}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\text{в}}\right) - \frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_\text{в}^4}\right)\right]. \qquad (12)$$

В этом уравнении r зависит от t и M, $p_\text{в}(t)$ — давление на поверхности каверны (при $M = 0$). Зависимость $p_\text{в}(t)$ определяется либо находящимся внутри каверны газом, либо поверхностным натяжением. При отсутствии того и другого $p_\text{в} = 0$. Предельное при $r = \infty$ давление обозначим p_∞,

$$p_\infty(t) = p_\text{в}(t) - \frac{1}{V_0}\left(\frac{df}{dr_\text{в}}\frac{f}{r_\text{в}^3} - \frac{f^2}{2}\frac{1}{r_\text{в}^4}\right). \qquad (13)$$

Из четырех зависимостей от времени $p_\infty(t)$, $p_\text{в}(t)$, $r_\text{в}(t)$ и $f(t)$ любые две являются независимыми. Иными словами, рассматриваются течения с двухфункциональным произволом.

С помощью (13) перепишем (12) в виде

$$p = p_\infty(t) + \frac{1}{V_0}\left(\frac{df}{dr_\text{в}}\frac{f}{r_\text{в}^2 r} - \frac{f^2}{2r^4}\right). \qquad (14)$$

Перейдя от p к E с помощью (6) и продифференцировав (14) по t, получим уравнение для скорости диссипации энергии

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma} \times \left(V_0\frac{dp_\infty(t)}{dt} + \frac{1}{r}\frac{d^2 f}{dt^2} - \frac{2f}{r^4}\frac{df}{dt} + \frac{2f^3}{r^7}\right). \qquad (15)$$

Уравнения (7)–(15) носят общий характер. Величины r, u, p, E, $\dfrac{\partial p}{\partial M}$ и $\dfrac{\partial q}{\partial t}$ зависят от t и M. Все эти зависимости становятся конкретными после задания двух из четырех функций от времени: $p_\infty(t)$, $p_\text{в}(t)$, $r_\text{в}(t)$ и $f(t)$.

КУМУЛЯЦИЯ ЭНЕРГИИ

В связи с тем, что в механике сплошных сред известно несколько видов энергии (внутренняя, кинетическая, холодная, тепловая, свободная и т. д.), понятие кумуляции энергии нуждается в уточнении. Для фокусирующихся сферических полостей в несжимаемой жидкости Е. И. Забабахин определил кумуляцию энергии следующим образом [1, 5, 7, 8]. В момент t_0 максимальное давление равно $\max p_0$, в момент $t > t_0$ — $\max p$. Отношение этих давлений в [1, 5, 7, 8] названо кумуляцией:

$$K = \max p / \max p_0. \qquad (16)$$

Давление достигает максимального значения на линии, уравнение которой получается из (11) при $\dfrac{\partial p}{\partial M} = 0$:

$$r_\text{max} = r_\text{в}\left(2f \Big/ r_\text{в}\frac{df}{dr_\text{в}}\right)^{1/3}. \qquad (17)$$

Подставив r_max в (14), получим

$$\max p = p_\infty + \frac{3}{V_0}\left(\frac{df}{dr_\text{в}}\right)^{4/3} f^{2/3} r_\text{в}^{-8/3} 2^{-7/3}. \qquad (18)$$

В решении Рэлея — Забабахина при $r_\text{в} \to 0$ кумуляция неограниченно возрастает с показателем степени $n = 3$:

$$K_p = G_1\left(\frac{r_{\text{в}0}}{r_\text{в}}\right)^3, \qquad (19)$$

где $G_1 = \text{const}$ при $r_\text{в} = 0$. Этот яркий теоретический результат не получил подтверждения на практике: в опытах достичь неограниченной кумуляции не удалось. Исследования Е. И. Забабахина показали [5], что «максимально полный учет реальных условий (в том числе диссипации энергии из-за вязкости и теплопроводности) теоретической неограниченной кумуляции не устраняет, и вопрос о том, что же ее в конце концов ограничивает, остается открытым».

«Вероятно, кумуляция ограничена неустойчивостью» [5]. Безусловно, неустойчивость ограничивает кумуляцию энергии. Однако есть и другие причины.

Все зависимости $K_p(r_в)$ в течениях с $V = \mathrm{const}$ были получены без учета уравнения энергии и уравнения состояния. Иными словами, не учитывалась энергия, которую нужно дополнительно затратить, чтобы в течении жидкости сохранялось условие $V = \mathrm{const}$.

Изменим определение кумуляции энергии. Обозначим через K_E отношение максимальной удельной внутренней энергии E к среднему по области M_0 значению E_m:

$$K_E = \max E/E_m, \qquad (20)$$

где

$$E_m = \frac{Q}{M_0}, \quad Q = \int\limits_0^{M_0} E\,dM. \qquad (21)$$

Массу M_0 определим в момент $t = t_0$ как массу между границей каверны и определенной уравнением (17) точкой $r_{\max 0}$, где энергия $E(r)$ достигает максимума.

Будем считать, что если $K \to \infty$ при $r_в \to 0$, то кумуляция не ограничена. Если $K \to K_1$, где $1 \ll K_1 < \infty$, то кумуляция ограничена. Во всех других случаях кумуляции нет.

Физический смысл такого определения кумуляции состоит в том, что как бы ни возрастало с течением времени среднее значение удельной внутренней энергии, характер решения обеспечивает хотя бы в одной точке существенное превышение максимального значения над средним.

Подставив E из (6) и (14) в (21), проинтегрировав и разделив на M_0, определим среднее по массе M_0 значение удельной внутренней энергии

$$E_m = \frac{p_\infty V_0}{\Gamma} + \frac{4\pi}{2\Gamma M_0 V_0} \times$$
$$\times \left[\frac{df}{dr_в}\frac{f}{r_в^2}\,(r_a^2 - r_в^2) + f^2\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_в}\right)\right], \qquad (22)$$

где r_a — наружная координата сферического слоя массой M_0. Зависимость $E(r)$ немонотонна, и $\max E = V_0 \max p \cdot \Gamma^{-1}$ достигается на линии $r_{\max}(t)$ (17).

Чтобы определить конкретное выражение для K, нужно устранить произвол в выборе $f(t)$, $p_в(t)$, $r_в(t)$ и $p_\infty(t)$. Например, в течении Рэлея — Забабахина при $p_в(t) = 0$, $p_\infty(t) = 0$ функция $f(t)$ имеет вид $f = u_{в0} r_{в0}^{3/2} r_в^{1/2}$. При энергетическом подходе к определению кумуляции в этом решении величина K_E определяется из (20), (22) и (18) и имеет вид

$$K_E \approx G_2\left(\frac{r_a}{r_в}\right), \qquad (23)$$

где $G_2 = \mathrm{const}$ при $r_в = 0$. Из сравнения (23) с (19) видно, что при $r_в \to \infty$ показатель степени коэффициента кумуляции уменьшился в три раза.

КЛАСС ПРОСТЕЙШИХ РЕШЕНИЙ

Функцию $f(t)$ возьмем в виде степенной зависимости $f = d r_в^\alpha$, где d и α — постоянные величины. Поскольку $d = \mathrm{const}$, то из (8) при $t = t_0$ следует $d = u_{в0} r_{в0}^{2-\alpha}$. Таким образом, класс решений частично определяется функцией $f(t)$ вида

$$f = u_{в0} r_{в0}^{2-\alpha} r_в^\alpha, \qquad (24)$$

с одним постоянным значением α. Выбранной форме f (24) соответствуют

$$\frac{df}{dt} = \alpha u_{в0}^2 r_{в0}^{2(2-\alpha)} r_в^{2\alpha-3}, \qquad (25)$$

$$u_в = u_{в0} r_{в0}^{2-\alpha} r_в^{\alpha-2}, \quad u = u_{в0} r_{в0}^{2-\alpha} r_в^\alpha r^{-2}. \qquad (26)$$

Для полного определения класса решений ограничимся случаем, когда давление на границе каверны равно нулю, $p_в = 0$. Из (13) и (24) в этом случае следует уравнение

$$p_\infty = \frac{1}{V_0} u_{в0}^2 r_{в0}^{2(2-\alpha)} r_в^{2(\alpha-2)}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right). \qquad (27)$$

Из условия, что тепловое давление не может быть отрицательным даже на бесконечности, следует ограничение на область возможных значений α: $\alpha \leqslant 1/2$. Для рассматриваемого класса решений зависимость $p(r)$ имеет вид

$$p = \frac{u_{в0}^2}{V_0}\left(\frac{r_{в0}}{r_в}\right)^{2(2-\alpha)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_в^4}{r^4}\right) - \alpha\left(1 - \frac{r_в}{r}\right)\right]. \qquad (28)$$

Сначала определим показатель кумуляции K_p. Для этого определим $\max p$. В точке $r_{\max} = r_{\text{в}}(2/\alpha)^{1/3}$ из (28) следует

$$\max p = \frac{u_{\text{в}0}^2}{2V_0}\left(\frac{r_{\text{в}0}}{r_{\text{в}}}\right)^{2(2-\alpha)} \times$$

$$\times\left[1 - 2\alpha - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{4/3} + 2\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/3}\right]. \quad (29)$$

При $r_{\text{в}} = r_{\text{в}0}$ уравнение (29) определяет $\max p_0$. Подставив $\max p$ и $\max p_0$ в (16), получим

$$K_p \approx G_3\left(\frac{r_{\text{в}0}}{r_{\text{в}}}\right)^{2(2-\alpha)}, \quad (30)$$

где $G_3 = \text{const}$ при $r_{\text{в}} = 0$. При $\alpha = 1/2$ показатель кумуляции K_p (30) совпадает с полученным Е. И. Забабахиным, при $\alpha < 1/2$ показатель возрастает.

Определим теперь показатель кумуляции энергетическим методом. Умножим p (28) на V_0/Γ, подставим полученное выражение E в (21) и определим полную внутреннюю энергию массы M_0. Проинтегрировав E по массе M_0, найдем внутреннюю энергию этой массы

$$Q = \frac{4\pi u_{\text{в}0}^2}{3\Gamma V_0}\left(\frac{r_{\text{в}0}}{r_{\text{в}}}\right)^{2(2-\alpha)} F_1, \quad (31)$$

где

$$F_1 = \frac{1}{2}(1-2\alpha)r_a^3 +$$

$$+ r_{\text{в}}\left[\frac{3}{2}\alpha r_a^2 + r_{\text{в}}^2\left(\frac{3}{2}\frac{r_{\text{в}}}{r_a} - \frac{1}{2}\alpha - 2\right)\right]. \quad (32)$$

В начальный момент времени $t = t_0$ при $r_{\text{в}} = r_{\text{в}0}$ полная энергия массы M_0 равна Q_0, а $F_1 = F_{10}$. Разделив Q на Q_0, получим

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{r_{\text{в}0}}{r_{\text{в}}}\right)^{2(2-\alpha)}\frac{F_1}{F_{10}}.$$

Из (29) видно, что независимо от r при $r_{\text{в}} \to 0$ $\max p \to \infty$ и, значит, $\max E \to \infty$, как и вся энергия Q с показателем степени $2(2-\alpha)$.

Средняя по массе M_0 удельная внутренняя энергия получается делением Q (31) на M_0, $\max E$ достигается на линии $r_{\max}(t)$ (17) и выражается через $\max p$:

$$\max E = \frac{V_0}{\Gamma}\max p. \quad (33)$$

Из (20), (29), (31) и (33) следует

$$K_E = \frac{\Gamma V_0 M_0}{4\pi F_1}. \quad (34)$$

Из (32) и (34) видно, что при $\alpha < 1/2$ кумуляции энергии нет. При $\alpha = 1/2$ первый член в F_1 обращается в нуль. В этом случае при $r_{\text{в}} \to 0$ существует кумуляция первого порядка. Отметим, что при $\alpha = 1/2$ решение из рассматриваемого класса совпадает с решением Рэлея — Забабахина

$$p_{\text{в}} = 0, \quad p_\infty = 0, \quad u_{\text{в}} = u_{\text{в}0}\left(\frac{r_{\text{в}0}}{r_{\text{в}}}\right)^{3/2}.$$

В качестве примера определим траекторию границы каверны для решения, в котором при $\alpha = 0$ выражения (24) и (26) принимают вид

$$f = u_{\text{в}0}r_{\text{в}0}^2, \quad u_{\text{в}} = u_{\text{в}0}r_{\text{в}0}^2 r_{\text{в}}^{-2}. \quad (35)$$

Подставив f из (35) в (9) и проинтегрировав, получим

$$r_{\text{в}} = [r_{\text{в}0}^3 + 3u_{\text{в}0}r_{\text{в}0}^2(t - t_0)]^{1/3}.$$

Момент фокусировки определяется из этого уравнения при $r_{\text{в}} = 0$:

$$t_{\text{ф}} = t_0 - \frac{r_{\text{в}0}}{3u_{\text{в}0}}. \quad (36)$$

С помощью (36) уравнение траектории границы пузырька преобразуется к виду

$$r_{\text{в}} = r_{\text{в}0}\left(\frac{t_{\text{ф}} - t}{t_{\text{ф}} - t_0}\right)^{1/3}.$$

СХЛОПЫВАНИЕ ПОЛОСТИ С ГАЗОМ

Находящийся в пузырьке газ тормозит движение его поверхности. Будем считать, что плотность газа в пузырьке зависит только от его объема: $\rho = \rho_0(r_{\text{в}0}/r_{\text{в}})^3$. Будем также считать, что газ сжимается изоэнтропически. Из уравнения изоэнтропы для идеального газа получаем

$$p_{\text{в}} = p_{\text{в}0}(r_{\text{в}0}/r_{\text{в}})^{3\gamma}.$$

Поскольку при $t = t_0$ жидкость уже движется к центру симметрии, значение $p_{\text{в}0}$ не является произвольным. Оно должно быть согласовано с состоянием жидкости на поверхности каверны. Для облегчения процедуры построения аналитического решения ограничимся случаем $\gamma = 4/3$. Положим также $p_\infty = 0$. Таким образом, функция $f(t)$ становится зависимой от p_∞ и $p_{\text{в}}$. Она определяется из уравнения (13) и имеет вид

$$f = u_{\text{в}0} r_{\text{в}0}^2 \sqrt{\frac{r_{\text{в}} - r_{\text{в,к}}}{r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}}}}, \qquad (37)$$

где $r_{\text{в,к}}$ — минимальное значение радиуса каверны, при котором скорость ее границы обращается в нуль. При $p_\infty = 0$ из (14) и (37) в момент t_0 находим

$$p_{\text{в}0} = \frac{u_{\text{в}0}^2 r_{\text{в,к}}}{2V_0(r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}})}.$$

Из (8) и (37) получаем зависимость $u_{\text{в}}(t)$:

$$u_{\text{в}} = u_{\text{в}0}\left(\frac{r_{\text{в}0}}{r_{\text{в}}}\right)^2 \sqrt{\frac{r_{\text{в}} - r_{\text{в,к}}}{r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}}}}. \qquad (38)$$

Траектория границы каверны определяется интегрированием уравнения $\dfrac{dr_{\text{в}}}{dt} = u_{\text{в}}$ вместе с (38):

$$A(r_{\text{в}}) - A(r_{\text{в}0}) = \frac{u_{\text{в}0} r_{\text{в}0}^2}{\sqrt{r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}}}}\,(t - t_0),$$

где

$$A(r_{\text{в}}) = \frac{2}{15}\,(3r_{\text{в}}^2 + 4r_{\text{в}} r_{\text{в,к}} + 8r_{\text{в,к}}^2)\sqrt{r_{\text{в}} - r_{\text{в,к}}}.$$

Из этого уравнения при условии $r_{\text{в}} = r_{\text{в,к}}$ определяется момент максимального сжатия газа (момент остановки границы):

$$t_{\text{ф}} = t_0 - \frac{2(r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}})}{15 u_{\text{в}0} r_{\text{в}0}^2}\,(3r_{\text{в}0}^2 + 4r_{\text{в}0} r_{\text{в,к}} + 8r_{\text{в,к}}^2).$$

В каждый фиксированный момент времени зависимость скорости жидкости от времени определяется уравнениями (7) и (37). Зависимость $p(r,t)$ определяется из уравнений (14) и (37):

$$p(r,t) = \frac{u_{\text{в}0}^2 r_{\text{в}0}^4}{2V_0 r_{\text{в}}^2 (r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}})}\left[\frac{1}{r} - \frac{(r_{\text{в}} - r_{\text{в,к}}) r_{\text{в}}^2}{r^4}\right]. \qquad (39)$$

Максимальное значение p достигается при $r_{\max}$, удовлетворяющем уравнению

$$\left(\frac{r_{\max}}{r_{\text{в}}}\right)^3 = 4\left(1 - \frac{r_{\text{в,к}}}{r_{\text{в}}}\right).$$

Из этого уравнения следует, что $r_{\max} < r_{\text{в}}$ при $r_{\text{в,к}} \geqslant 0.75 r_{\text{в}}$ и, таким образом, давление принимает максимальное значение на границе каверны. В случае применения классического критерия кумуляции нужно определить $\max p_0$, который имеет место при $r_{\max 0} = r_{\text{в}0}[4(1 - r_{\text{в,к}}/r_{\text{в}0})]^{1/3}$. В этой точке

$$\max p_0 = \frac{u_{\text{в}0}^2 r_{\text{в}0}^{4/3}}{V_0 (r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}})^{4/3} \cdot 2^{11/3}}.$$

Максимальное давление, которое достигается на границе в момент t, равно

$$p_{\text{в}} = \frac{u_{\text{в}0}^2 r_{\text{в}0}^4 r_{\text{в,к}}}{2V_0 (r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}}) r_{\text{в}}^4}. \qquad (40)$$

Отношение $p_{\text{в}}/\max p_0$ определяет K_p. В момент максимального сжатия газового пузырька

$$K_p = 2^{8/3} (r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}})^{1/3} r_{\text{в}0}^{8/3} r_{\text{в,к}}^{-3}.$$

Таким образом, имеет место ограниченная кумуляция.

Применим теперь для оценки кумуляции энергетический критерий. В соответствии с (6) E пропорционально p (39) и, следовательно, максимум E при $r_{\text{в,к}} > 0.75 r_{\text{в}}$ достигается на границе каверны. Среднее по массе M_0 значение E_m получается из (21) и (39) после умножения p на V_0/Γ:

$$E_m = \frac{4\pi u_{\text{в}0}^2 r_{\text{в}0}^4}{2\Gamma V_0 M_0 (r_{\text{в}0} - r_{\text{в,к}}) r_{\text{в}}^2} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2}\,(r_a^2 - r_{\text{в}}^2) + (r_{\text{в}} - r_{\text{в,к}}) r_{\text{в}}^2 \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{\text{в}}}\right)\right]. \qquad (41)$$

Подставив (40) и (41) в (20), получим выражение для K_E при $r_{\text{в}} \to r_{\text{в,к}}$:

$$K_E = \frac{V_0 M_0}{2\pi r_{\text{в,к}}} \times$$
$$\times \left[\left(r_{\text{в,к}}^3 + \frac{4V_0}{3\pi}\,M_0\right)^{2/3} - r_{\text{в,к}}^2\right]^{-1}. \qquad (42)$$

Из (42) видно, что согласно энергетическому критерию кумуляция ограничена. Различие результатов применения двух критериев заключается в том, что при уменьшении $r_{\text{в,к}}$ коэффициент кумуляции K_p растет как $r_{\text{в,к}}^{-3}$, а K_E — как $r_{\text{в,к}}^{-1}$.

ФОКУСИРОВКА ОБОЛОЧКИ

Следуя [1, 5], рассмотрим фокусировку ненагруженной оболочки, на внутренней и наружной границах которой давление равно нулю. Это значит, что окружающая среда не совершает над оболочкой никакой работы и все внутренние процессы в ней определяются исключительно начальной энергией и энерговыделением. В начальный момент времени t_0 радиус $r_{\text{в}0}$ и скорость внутренней границы $u_{\text{в}0} < 0$ заданы. В соответствии с (7) и (8) скорость в момент t_0 в оболочке зависит от радиуса:

$$u = u_{\text{в}0}(r_{\text{в}0}/r)^2. \qquad (43)$$

Все величины на наружной границе оболочки обозначим индексом a. Пусть масса оболочки задана и равна M_a. Координата наружной поверхности r_a связана с координатой внутренней поверхности $r_{\text{в}}$ уравнением

$$r_a = (r_{\text{в}}^3 + b)^{1/3}, \qquad (44)$$

где $b = [3V_0/(4\pi)]M_a$. Начальная скорость наружной границы определяется из (43) и (44):

$$u_{a0} = u_{\text{в}0}(r_{\text{в}0}/r_{a0})^2.$$

При $p_a = 0$, $p_{\text{в}} = 0$ уравнение (12) принимает вид

$$\frac{1}{r_{\text{в}}^2}\frac{df}{dr_{\text{в}}}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_{\text{в}}}\right) - \frac{f}{2}\left(\frac{1}{r_a^4} - \frac{1}{r_{\text{в}}^4}\right) = 0. \qquad (45)$$

Разложим далее разность четвертых степеней на разность первых степеней и неполный куб суммы. В результате выражение (45) преобразуется к виду

$$\frac{df}{dr_{\text{в}}} = \frac{f}{2}\left(\frac{r_{\text{в}}^2}{r_a^3} + \frac{r_{\text{в}}}{r_a^2} + \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_{\text{в}}}\right).$$

Рассмотрим решение этого уравнения

$$\ln f = \ln\Omega + \frac{1}{2}\,(J_1 + J_2 + J_3 + J_4),$$

где

$$J_1 = \int \frac{r_{\text{в}}^2 dr_{\text{в}}}{r_{\text{в}}^3 + b}, \quad J_2 = \int \frac{r_{\text{в}} dr_{\text{в}}}{(r_{\text{в}}^3 + b)^{2/3}},$$

$$J_3 = \int \frac{dr_{\text{в}}}{(r_{\text{в}}^3 + b)^{1/3}}, \quad J_4 = \int \frac{dr_{\text{в}}}{r_{\text{в}}}.$$

Интегралы J_1 и J_4 являются табличными, а J_2 и J_3 — биномными. После проведения интегрирования получаем зависимость

$$f = \Omega(r_{\text{в}}^3 + b)^{1/6} r_{\text{в}}^{1/2}[(r_{\text{в}}^3 + b)^{1/3} - r_{\text{в}}]^{-1/2}. \qquad (46)$$

Постоянная интегрирования Ω находится при $t = t_0$, где $f_0 = u_{\text{в}0} r_{\text{в}0}^2$, $r_{\text{в}} = r_{\text{в}0}$:

$$\Omega = u_{\text{в}0} r_{\text{в}0}^{3/2}[(r_{\text{в}0}^3 + b)^{1/3} - r_{\text{в}0}]^{1/2}(r_{\text{в}0}^3 + b)^{-1/6}.$$

Для функции $f(r_{\text{в}}(t))$ определим производную

$$\frac{df}{dr_{\text{в}}} = \frac{\Omega[(r_{\text{в}}^3 + b)^{4/3} - r_{\text{в}}^4]}{2r_{\text{в}}^{1/2}[(r_{\text{в}}^3 + b)^{1/3} - r_{\text{в}}]^{3/2}(r_{\text{в}}^3 + b)^{5/6}}. \qquad (47)$$

Запишем (46) и (47) в следующем виде:

$$f = r_{\text{в}}^{1/2} F_3(r_{\text{в}}, r_a), \quad \frac{df}{dr_{\text{в}}} = r_{\text{в}}^{-1/2} F_4(r_{\text{в}}, r_a), \qquad (48)$$

где

$$F_3 = \Omega r_a^{1/2}(r_a - r_{\text{в}})^{-1/2},$$
$$F_4 = \frac{1}{2}\Omega r_a^{1/2} D (r_a - r_{\text{в}})^{-1/2}, \qquad (49)$$

$$D = 1 + \frac{r_{\text{в}}}{r_a} + \left(\frac{r_{\text{в}}}{r_a}\right)^2 + \left(\frac{r_{\text{в}}}{r_a}\right)^3. \qquad (50)$$

Определяемая уравнением (12) зависимость $p(r)$ в оболочке при $p_{\text{в}} = 0$, f (46) и $\dfrac{df}{dr_{\text{в}}}$ (47) имеет максимум на линии

$$r_{\max} = 2^{2/3} r_{\text{в}} D^{-1/3}. \qquad (51)$$

После подстановки $r_{\max}$ вместе с D, F_3, F_4, f, b, $\dfrac{df}{dr_{\text{в}}}$ из (48)–(50) в (12) получаем

$$\max p = r_{\text{в}}^{-3}\frac{F_3}{V_0}\left[F_4(2^{-2/3}D^{1/3} - 1) - \frac{1}{2}F_3(2^{8/3}D^{4/3} - 1)\right]. \qquad (52)$$

В начальный момент времени $t = t_0$ максимум p_0 определяется выражением

$$\max p_0 = r_{\text{в}0}^{-3}\frac{F_{30}}{V_0}\left[F_{40}(2^{-2/3}D_0^{1/3} - 1) - \frac{1}{2}F_{30}(2^{8/3}D_0^{4/3} - 1)\right].$$

При $r_в \to 0$ величины F_3, F_4 и D ограничены и, таким образом,

$$K_p \approx G_4\left(\frac{r_{в0}}{r_в}\right)^3, \qquad (53)$$

где $G_4 = \text{const}$ при $r_в = 0$. Происходит кумуляция энергии, так как коэффициент кумуляции K_p стремится к бесконечности с показателем 3. Этот результат совпадает с результатом в [1, 5, 7, 8], хотя и получен другим методом.

За время полета оболочки от момента t_0 до момента $t_ф$ ее тепловая энергия возросла. Проинтегрировав E по M от $M = 0$ до $M_0 = M_a$, получим выражение для внутренней энергии оболочки

$$Q = F_5 r_в^{-2}, \qquad (54)$$

где

$$F_5 = \frac{\pi\Omega^2 r_a}{3V_0\Gamma(r_a - r_в)}\left[r_a^2\left(D + 8\frac{r_в^3}{r_a^3}\right) - r_в^2(D+8)\right].$$

При $r_в \to 0$ величина F_5 стремится к постоянному значению:

$$\lim_{r_в \to 0} F_5 = \frac{\pi\Omega^2 r_a^2}{3V_0\Gamma}.$$

Следовательно, при $r_в \to 0$ будет $Q \to \infty$, так что

$$\frac{Q}{Q_0} \approx F_6\left(\frac{r_{в0}}{r_в}\right)^2, \qquad (55)$$

где $F_6 = \text{const}$. Иными словами, чтобы обеспечить в течении условие $V = \text{const}$, нужно затратить большую энергию. Поскольку оболочка является механически изолированной системой, возникает вопрос о технической реализации профилированного ввода энергии в оболочку. Способы ввода энергии в систему выходят за рамки данной работы. Важно, что с течением времени количество введенной в оболочку энергии возрастает и стремится к бесконечности в соответствии с (55). Так как внутренняя энергия является тепловой, то при ее увеличении температура также возрастает, и с некоторого момента становится существенным излучение. Любые попытки дальнейшего увеличения энергии оболочки будут сопровождаться ее уменьшением за счет излучения из оболочки наружу.

Формально же, применив энергетический критерий, приходим к заключению, что теоретически кумуляция есть, хотя и не с таким порядком, как в [1, 5, 7, 8].

Среднее значение E_m определяем путем деления Q (54) на массу оболочки M_a. Подставив $\max p$ из (52) в (33), а затем $\max E$ и E_m в (20), получим

$$K_E \approx G_5\left(\frac{r_{в0}}{r_в}\right),$$

где $G_5 = \text{const}$. Этот коэффициент кумуляции на два порядка отличается от K_p (53), полученного классическим способом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Модель несжимаемой вязкой жидкости была создана Навье и Стоксом в период 1820–1850 гг. Для сферически-симметричных движений без вязкости она сводится к уравнениям (2) и (9). Модель не содержала ни уравнения энергии, ни уравнения состояния, которые появились много лет спустя. Возможность строить аналитические решения сделала модель широко распространенной среди механиков и математиков вплоть до настоящего времени.

2. Полная модель механики сплошной среды (уравнения Эйлера — Гельмгольца (1)–(3)) позволяет строить решения, в которых плотность постоянна. Для поддержания постоянной плотности в жидкости нужно вкладывать энергию. До последнего времени этот факт не учитывался.

3. Предлагаемое в работе новое определение кумуляции, учитывающее дополнительные энергетические затраты, показывает, что в ряде течений кумуляция резко снижается, а в некоторых даже исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Забабахин Е. И.** Кумуляция энергии и ее границы // Успехи физ. наук. — 1965. — Т. 85, вып. 4. — С. 721–726.
2. **Hunter G.** On the collaps of an empty cavity in water // J. Fluid Mech. — 1960. — V. 8, N 2. — P. 241–263.
3. **Брушлинский К. В., Каждан Я. М.** Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи мат. наук. — 1963. — Т. 18, вып. 2 (110). — С. 3–23.
4. **Забабахин Е. И.** Явления неограниченной кумуляции // Механика в СССР за 50 лет. Т. 2: Механика жидкости и газа. — М.: Наука, Физматлит, 1970. — С. 313–342.

5. **Забабахин Е. И., Забабахин И. Е.** Явления неограниченной кумуляции. — М.: Наука, 1988.
6. **Куропатенко В. Ф.** Уравнения состояния компонентов плотной низкотемпературной плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Сер. Б. Т. VII-1. Ч. 2. — М.: Янус-К, 2008. — С. 436–450.
7. **Забабахин Е. И.** Некоторые вопросы газодинамики взрыва. — Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1997.
8. **Забабахин Е. И.** Кумуляция и неустойчивость. — Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1998.

Поступила в редакцию 20/V 2014 г.