УДК 539.376

А.Ф. Никитенко, И.В. Сухоруков

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В настоящее время в машиностроении для получения изделий заданной формы все более широкое применение находит технология горячего формообразования в режимах ползучести и сверхпластичности. После изготовления в детали присутствуют остаточные напряжения, приводящие ее к короблению. Для снятия остаточных напряжений обычно отформованные изделия подвергают термофиксации — выдержке детали в заневоленном состоянии при определенной температуре. Термофиксация представляет собой не что иное, как процесс релаксации остаточных напряжений, сопровождающийся накоплением деформаций ползучести в материале. Поэтому очевидна необходимость развития инженерных методов расчета времени термофиксации и релаксации остаточных напряжений до безопасного уровня, не приводящего к короблению детали.

Ниже предложен приближенный метод расчета напряженно-деформированного состояния тела в процессе релаксации. При этом использована система уравнений, описывающая ползучесть материала с одновременным учетом накопления в нем повреждений.

Рассмотрим произвольное тело (элемент конструкции), ограниченное поверхностью S и отнесенное к прямоугольной декартовой системе координат $x_k (k = 1,2,3)$. Считаем, что часть поверхности свободна от внешних нагрузок T_i $(i = 1, 2, 3)$. Тогда

$$\sigma_{ij}\nu_j = 0. \tag{1}$$

На другой части поверхности S_u $(S = S_T + S_u)$ заданы постоянные смещения

$$u_i(x_k,t) = u_i^*(x_k) \tag{2}$$

и, следовательно, скорости $\dot{u}_i = 0$. Полагаем также, что массовые силы G_i равны нулю. Тогда

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0. \tag{3}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; u_i — компоненты вектора перемещения; точка обозначает производную по времени; ν_j — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

Задачи теории ползучести с условиями (1) — (3) будем называть согласно [1, 2] релаксационными задачами. При этом полагаем, что компоненты тензора полных скоростей деформаций $\dot{э}_{ij}$ представляют собой сумму компонент тензоров скоростей упругой деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и деформации ползучести $\dot{p}_{ij}$ и связаны с компонентами вектора скорости перемещений соотношениями Коши

$$2\dot{э}_{ij} = \partial\dot{u}_i/\partial x_j + \partial\dot{u}_j/\partial x_i, \tag{4}$$

причем для ε_{ij} выполняется закон Гука $(\varepsilon_{ij} = 3s_{ij}/2E)$, а для скоростей деформации ползучести справедлив закон [2, 3]

$$\dot{p}_{ij} = \frac{B_1 S_2^{(n+1)/2}}{(1-\omega)^m}\frac{s_{ij}}{2S_2}. \tag{5}$$

Здесь E — модуль упругости материала; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$; δ_{ij} — символ Кронекера; $S_2 = s_{ij}s_{ij}/2$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений; B_1, n, m — характеристики ползучести материала; ω — параметр повреждаемости материала, кинетическое уравнение для которого имеет вид [2, 3]

$$\dot{\omega} = B_2 S_2^{(g+1)/2}/(1 - \omega)^m, \; \omega(x_k, 0) = 0. \tag{6}$$

Из (6) следует

$$\mu(x_k, t) = [1 - \int_0^t (m + 1)B_2 S_2^{(g+1)/2} d\tau\,]^{1/(m+1)},$$

где $\mu(x_k, t) = 1 - \omega(x_k, t)$. Из условия $\omega = 1$ в некоторой точке с координатами x_k^* (или же целой области) определяется время t_* начала разрушения тела:

$$\int_0^{t_*} (m + 1)B_2 S_2^{(g+1)/2} d\tau = 1.$$

Таким образом, решение релаксационной задачи с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести сводится к определению функций σ_{ij}, $э_{ij}$, p_{ij}, u_i, ω, t_*, удовлетворяющих в любой момент времени вплоть до начала разрушения тела системе уравнений (3) — (6) с граничными условиями (1), (2). Непосредственное решение этой системы вследствие ее нелинейности и нестационарности затруднительно, поэтому и используют при решении релаксационных задач приближенные методы, в частности принцип минимума дополнительной мощности деформаций либо теорему энергии [1]. Ниже отдадим предпочтение теореме энергии. Она утверждает, что для всякого сплошного тела мощность внешних сил равна мощности внутренних сил, т.е.

$$\int_V (\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij}\dot{p}_{ij})dV = \int_V G_i\dot{u}_i dV + \int_S T_i\dot{u}_i dS. \tag{7}$$

Очевидно, что для релаксационных задач ($G_i = 0, \dot{u}_i = 0$ на $S_u, T_i = 0$ на S_T) правая часть соотношения (7) равна нулю.

В начальный момент времени $t = 0$ имеем упругое распределение напряжений σ_{ij}^e в теле. Вследствие ползучести с течением времени напряжения уменьшаются, стремясь к нулю. При решении релаксационных задач без учета повреждаемости материала в процессе ползучести приближенное решение обычно ищут в форме [1, 2]

$$\sigma_{ij}^0(x_k, t) = \sigma_{ij}^e(x_k)\rho(t), \tag{8}$$

где множитель релаксации после стандартных процедур принимает вид

$$\rho(t) = [1 + (n - 1)B_1 Et \int_V (S_2^e)^{(n+1)/2} dV/3 \int_V S_2^e dV\,]^{-1/(n-1)}. \tag{9}$$

Учет процесса накопления повреждений в материале значительно усложняет картину. Действительно, накопленные повреждения влияют на скорость ползучести (этот факт отражен в законе ползучести (5)) и постоянно способствуют перераспределению напряжений [2]. Забегая вперед, отметим, что результаты решения конкретных релаксационных задач (например, [4]) свидетельствуют о незначительной величине накопленных повреждений в материале и постоянном снижении интенсивности процесса этого накопления. Казалось бы, что с учетом этого замечания можно пренебречь параметром повреждаемости в определяющих уравнениях. И тем не менее делать это представляется нецелесообразным. Действительно, параметр повреждаемости является своего рода "индикатором", величина которого в любой момент времени характеризует с феноменологических позиций "структурное состояние" материала. Чем меньше эта величина, тем, естественно, больше остаточный ресурс материала или же его остаточная долговечность. Очевидно, что в задачах аналогичного типа возникает еще и проблема определения внешних температурно-силовых воздействий таких, чтобы в материале в процессе предварительного деформирования (формообразование, формообразование с последующей термофиксацией) накопилось бы как можно меньше повреждений.

Предлагается приближенное решение релаксационной задачи с учетом процесса накопления повреждений в материале искать, как и при решении основной задачи [5], в виде

$$\sigma_{ij}(x_k,t) = \sigma^0_{ij} f(x_k,t) + C(x_k,t)\delta_{ij}. \tag{10}$$

Здесь C — гидростатическая составляющая, определяемая с использованием известного приема [5, 6] из системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial C}{\partial x_j}\delta_{ij} = -\frac{\partial f}{\partial x_j}\sigma^0_{ij} \tag{11}$$

с граничным условием $C = 0$ на части поверхности S_T. Как и при решении основной задачи [5], функция

$$f(x_k,t) = [\mu(x_k,t)]^{m/n}/X(t). \tag{12}$$

Подставляя (10) в (7) и (6) с учетом (8), (9), (12) и закона Гука получаем после простейших преобразований систему уравнений для определения неизвестных функций $X(t)$ и $\mu(x_k,t)$:

$$\frac{3}{2E}\int_V S^e_2 \frac{d}{dt}[\mu^{m/n}\rho X^{-1}]^2 dV + (\rho X^{-1})^{n+1}\int_V B_1(S^e_2)^{(n+1)/2}\mu^{m/n} dV = 0; \tag{13}$$

$$\mu^{m/n} = \left[1 - \frac{\nu}{t^e_*}\int_0^t (\rho X^{-1})^{g+1} d\tau\right]^{\beta}. \tag{14}$$

Здесь

$$\beta = \frac{m}{n + m(n-g-1)};\ \nu = \frac{n + m(n-g-1)}{n(m+1)};$$

$$t^e_* = [(m+1)B_2(S^e_2)^{(g+1)/2}]^{-1};\ S^e_2 = S^e_2(x_k).$$

В общем случае система уравнений (13), (14) допускает лишь численное решение. Укажем один из возможных и простейших путей решения этой системы. Подставим (14) в (13). Получим дифференциальное уравнение относительно функции $X(t)$, решение которого будем искать в виде ряда

$$X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k.$$

Нетрудно показать, что сумму этого ряда можно приближенно аппроксимировать выражением

$$X(t) \approx \left(1 - \frac{1}{\bar{t}^e_*}\int_0^t \rho^{g+1} d\tau\right)^{\gamma}, \tag{15}$$

где $\gamma = \beta\nu$; $\bar{t}^e_* = t^e_*(\bar{x}_k)$; координаты $\bar{x}_k$ "средней" по объему точки находятся из соотношения

$$[S^e_2(\bar{x}_k)]^{(n-1)/2} = \int_V (S^e_2)^{(n+1)/2} dV \Big/ \int_V S^e_2 dV. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (14) и выполняя интегрирование, получаем приближенное выражение для $\mu(x_k,t)$.

Таким образом, зная $X(t)$, $\mu(x_k,t)$, определяем из (12) функцию $f(x_k,t)$. С использованием $f(x_k,t)$, (8) и (9) находим из (10) с точностью до гидростатической составляющей $C(x_k,t)$ напряженное состояние. Вычисляется гидростатическая составляющая, как отмечалось выше, из системы дифференциальных уравнений в частных производных (11) с граничным условием $C = 0$ на части поверхности S_T. Вопрос о совместности этой системы рассматривается в каждой конкретной задаче. Если система несовместна, то гидростатическую составляющую определяем, минимизируя невязку в уравнениях совместности в среднем квадратичном.

По известному полю напряжений σ_{ij} находим из (6) распределение накопленных повреждений в теле в любой момент времени, а из (5) и закона Гука $\dot{p}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, и, следовательно, поле полных скоростей деформаций $\dot{Э}_{ij} = \dot{p}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij}$. По известным скоростям деформации определяем из (4) компоненты вектора скорости перемещений $\dot{u}_i$. Для интегрируемости системы (4) необходимо выполнение шести условий неразрывности скоростей деформации (условий сплошности Сен-Венана). Очевидно, что эти условия выполнены лишь приближенно, как и в аналогичных задачах без учета процесса накопления повреждений в материале [1]. Составляющие вектора перемещений определяются следующим образом:

$$u_i(x_k,t) = u_i(x_k,0) + \int_0^t \dot{u}_i(x_k,\tau)d\tau.$$

В качестве примера рассмотрим задачу правки тонкостенного постоянной толщины диска газотурбинного двигателя. После механической обработки диск, как правило, имеет начальный прогиб w_0, который с течением времени возрастает из-за релаксации остаточных самоуравновешенных напряжений, т.е. происходит коробление диска. Геометрические размеры рассматриваемого диска следующие: внутренний радиус $r_1 = 100$ мм, внешний $r_2 = 300$ мм, толщина диска $h = 3$ мм. По существующим нормам допускаемый прогиб срединной плоскости диска не должен превышать 3 мм ($[w] = 3$ мм). Анализ замеров начального прогиба коробленых дисков свидетельствует о том, что он, как правило, является функцией только радиуса r диска и значительно превышает допускаемое значение, т.е. $\max\limits_r w_0 > [w]$. Аппроксимация начального прогиба в зависимости от радиуса имеет вид

$$w_0 = w_{\max}\cos\frac{\pi r}{2r_2},$$

причем $w_{\max} \geqslant 3$ мм. В дальнейшем полагаем $w_{\max} = 5$ мм.

Для устранения коробления на практике поступают обычно следующим образом. Выдержанный во времени после изготовления диск помещают в матрицу и нагружают пуансоном так, что начальный прогиб при $t = 0$ становится равным нулю при любых r в интервале $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, т.е. $w_0(r,0) = 0$. Нагруженный таким образом диск помещают в нагревательную печь и выдерживают его в заневоленном состоянии определенное время t_1. При этом всегда $w(r,t) = 0$, а начальные напряжения σ_r^e, σ_φ^e, представляющие собой сумму остаточных самоуравновешенных напряжений σ_r', σ_φ' и напряжений σ_r'', σ_φ'', возникших вследствие нагружения диска пуансоном при $t = 0$, релаксируют. После истечения времени термофиксации t_1 диск разгружают, замеряют остаточный прогиб, если он имеется, и сопоставляют с допускаемым. Очевидно, что для успешной правки диска необходимо знать оптимальное время и температуру термофиксации, для чего и следует решить релаксационную задачу.

Изложим результаты решения такой задачи. Рассматриваемый здесь диск изготавливают из титанового сплава ВТ9. Проведенные эксперименты по упругопластическому деформированию и деформированию в процессе ползучести позволили определить соответствующие характеристики материала в температурном диапазоне от 400 до 650 °C. Например, зависимость модуля упругости от температуры имеет вид

$$E = (\,-0{,}01\,T + 12{,}30) \cdot 10^3,$$

где E, кг/мм²; T, °C.

Температура термофиксации согласована с заводом-изготовителем и установлена равной 550 °C. При этой температуре характеристики ползучести применительно к системе уравнений (5) следующие:

$$B_1 = 5{,}87 \cdot 10^{-9}(\text{кгс/мм}^2)^{-n} \cdot \text{ч}^{-1},\ n = g = 4,\ m = 11,$$

$$B_z = 0{,}255 \cdot 10^{-9}(\text{кгс/мм}^2)^{-(\zeta+1)} \cdot \text{ч}^{-1}.$$

Упругое поле напряжений σ^e_r, σ^e_φ при $t = 0$ определяли, как отмечалось выше, в виде

$$\sigma^e_r = \sigma'_r + \sigma''_r,\ \sigma^e_\varphi = \sigma'_\varphi + \sigma''_\varphi.$$

Поле остаточных самоуравновешенных напряжений предполагали равномерно распределенным по толщине диска, причем для радиального напряжения σ_r' использовали аппроксимацию

$$\sigma_r' = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi(r - r_1)}{r_2 - r_1}\right],$$

а тангенциальное напряжение σ_φ' определяли из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r'}{dr} + \frac{\sigma_r' - \sigma_\varphi'}{r} = 0.$$

Значения остаточных напряжений, вычисленные с помощью указанной выше аппроксимации, согласуются с контрольными замерами.

Считали, что при нагружении диска в начальный момент времени $t = 0$ выполняется гипотеза плоских сечений Кирхгофа — Лява и деформации ε_r, ε_φ определяются выражениями

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + \frac{d^2w}{dr^2}z,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}z,$$

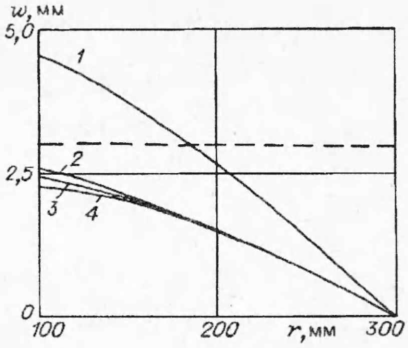
где $u(r)$ — перемещение вдоль оси r диска в срединной плоскости; ось z направлена перпендикулярно срединной плоскости. Нагружение диска при $t = 0$ имитировали воздействием равномерно распределенной нагрузки $q(r)$. Краевые условия при этом можно записать как $\sigma_r'' = 0$ при $r = r_1$, $u = 0$ при $r = r_2$. Считаем справедливыми уравнения Кармана для осесимметричных пластин [7]:

$$D\frac{d}{dr}(\nabla^2 w) = \psi - \frac{h}{r}\frac{d\Phi}{dr}\frac{dw}{dr},$$

$$\frac{d}{dr}(\nabla^2\Phi) = \frac{E}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2.$$

Здесь цилиндрическая жесткость пластины $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ ($\nu = 1/2$); Φ — функция напряжений Эри; ψ — функция нагрузки; оператор $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$.

Окончательно выписанная система уравнений Кармана совместно с гипотезой плоских сечений Кирхгофа — Лява и указанными краевыми условиями позволяет определить напряженно-деформированное состояние диска на момент времени $t = 0$. Отметим, что здесь и ниже при численном расчете краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка сводили к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую решали методом ортогональной прогонки Годунова [8]. Интегрирование при этом осуществляли методом Рунге — Кутта четвертого порядка. Определенные таким образом напряжения σ_r'', σ_φ'' суммировали (алгебраически) с остаточными напряжениями σ_r', σ_φ' и получали на начальный момент времени упругое поле напряжений σ_r^e, σ_φ^e.



При $t \geqslant 0$ имеем $w(x_k,t) = 0$, а σ_r^e и σ_φ^e релаксируют. Напряжения в любой момент времени вычисляем по (10). Сначала с использованием σ_r^e и σ_φ^e определяем из (9) множитель релаксации $\rho(t)$, а из (8) — поле напряжений σ_r^0 и σ_φ^0. Из (15) и (16) находим $X(t)$. Подставляя $X, \sigma_r^0, \sigma_\varphi^0$ в (14) и выполняя интегрирование, определяем $\mu(r,t)$. Из (12) по известным X и μ находим $f(r,t)$. Зная $f(r,t)$, σ_r^0, σ_φ^0, вычисляем из (10) $\sigma_r(r,t)$ и $\sigma_\varphi(r,t)$. Гидростатическая составляющая в (10) равна нулю, так как для рассматриваемого диска реализуется плоское напряженное состояние.

Остановимся на вычислении остаточного прогиба после окончания процесса термофиксации диска и его упругого распружинивания (разгрузки). На момент времени $t = t_1$ по известному полю напряжений $\sigma_r(r,t_1)$, $\sigma_\varphi(r,t_1)$ находим распределение изгибающих моментов $M_r(r,t_1)$ и $M_\varphi(r,t_1)$ из соотношений

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, \quad M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi z dz.$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = Q$$

имеем закон распределения перерезывающей силы $Q(r,t_1)$. В момент времени $t = t_1$ осуществляем упругую разгрузку диска, для чего необходимо в каждой точке диска "снять" нагрузку $Q(r,t_1)$. Остаточный прогиб находим из решения дифференциального уравнения

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) = - Q(r,t_1)$$

с краевыми условиями, учитывающими освобождение контуров диска $M_r = -M_r(r_1,t_1)$, $M_r = -M_r(r_2,t_1)$, $w(r_2,t_1) = 0$. В качестве иллюстрации на рисунке изображены прогибы после разгрузки для различных значений времени фиксации полотна диска ($t_1 = 0$; 0,5; 2; 5ч — линии *1* — *4*). Штриховой линией показан максимально допустимый прогиб диска $[w] = 3$ мм. Из рисунка видно, что время термофиксации $t_1 = 0{,}5$ч для данных начальных прогибов w_0 уже достаточно для того, чтобы после освобождения диска остаточные прогибы были в пределах допустимых значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966.
3. Никитенко А.Ф. О длительности до разрушения при статических и циклических нагрузках // Пробл. прочности. — 1976. — № 7. — С. 44—46.
4. Никитенко А.Ф., Сухоруков И.В. Приближенный метод решения релаксационных задач с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Надежность и прочность машиностроительных конструкций: Сб. науч. тр. / КПтИ. — Куйбышев, 1988. — С. 49—55.
5. Никитенко А.Ф., Заев В.А. Расчет напряженно-деформированного состояния и времени начала разрушения элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Пробл. прочности. — 1983. — № 1. — С. 56—61.
6. Алексеев А.Е. Двумерные задачи идеальной жесткопластической среды: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1980.
7. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. — М.: Гостехиздат, 1956.
8. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, вып. 3(99). — С. 171—174.

г. Новосибирск *Поступила 31/V 1993 г., в окончательном варианте — 6/XII 1993 г.*

УДК 539.3+519.6

В.А. Ковтуненко

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

Рассматривается классическое вариационное неравенство, описывающее задачу о контакте упругой пластины с жестким препятствием, изложены итерационные методы аппроксимации данного неравенства с использованием оператора штрафа, и доказаны результаты о сходимости решений. Для предлагаемой линейной итерационной схемы построен метод конечных элементов и показана его сходимость, приводится пример численного решения задачи по указанному методу.

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Функции $\varphi \in C^2(\Omega)$ (φ на $\partial\Omega$ меньше нуля) и $f \in L^2(\Omega)$ заданы. Требуется найти функцию $w \in K_\varphi$, где

$$K_\varphi = \{w \in H_0^2(\Omega) / w \geqslant \varphi \text{ в } \Omega\},$$

удовлетворяющую неравенству [1, 2]

$$(\Delta w, \Delta v - \Delta w) \geqslant (f, v - w) \ \forall\, v \in K_\varphi. \tag{1}$$

Здесь скобки $(.,.)$ обозначают скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Данная модель описывает задачу нахождения функции w поперечного прогиба пластины, лежащей в области Ω и защемленной по краям, под действием жесткого препятствия φ и внешней нагрузки f.

Введем оператор штрафа

$$\beta(w) = \begin{cases} 0, & w \geqslant \varphi, \\ w - \varphi, & w < \varphi \end{cases}$$

и определим штрафованную задачу с параметром $\varepsilon > 0$ в виде

$$\Delta^2 w^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\beta(w^\varepsilon) = f; \tag{2a}$$