ЛИТЕРАТУРА

1. **Войценя В. С.** О поступательном движении тела над поверхностью раздела двух жидкостей.— Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1963, № 2.
2. **Стурова И. В.** Волновые движения, возникающие в жидкости со ступенчатой стратификацией, при обтекании погруженного тела.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 6 (№ 3). Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1975.
3. **Стурова И. В., Сухарев В. А.** Плоская задача о волновых движениях, возникающих в непрерывно стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4.
4. **Драутон, Чен.** Обтекание тел в канале жидкостью с поперечным градиентом плотности.— Теор. основы инж. расчетов, 1972, № 1.
5. **Гураль Т. И., Ершов О. А., Сориц А. Г., Фоменко Б. А.** Исследование полей температуры и концентрации методом голографической интерферометрии.— В кн.: Тепломассообмен. Т. 10. Киев, Наукова думка, 1976.
6. **Некрасов В. Н., Трохан А. М., Чашечкин Ю. Д.** Генерация внутренних волн в плоскослоистой среде равномерно движущимся гидродинамическим источником (трехмерная задача).— В кн.: Теория дифракции и распространения волн. Краткие тезисы докл. Т. III. М., 1977.
7. **Кочин А. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М., Физматгиз, 1963.
8. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях. М., Мир, 1977.

УДК 532.5.013.2+532.51.511 : 519.34+532.531

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ю. И. Бадрухин, В. В. Кузнецов

(*Новосибирск*)

При исследовании нестационарных течений со свободной поверхностью известны [1] трудности, связанные с формулировкой задач в традиционных постановках Эйлера или Лагранжа.

Уравнения идеальной несжимаемой жидкости с использованием «потенциалов Клебша» χ, μ, λ можно записать в виде [2, 3]

$$\partial v_i/\partial x_i = 0; \tag{1}$$

$$\partial\mu/\partial t + v_i \partial\mu/\partial x_i = 0; \tag{2}$$

$$\partial\lambda/\partial t + v_i \partial\lambda/\partial x_i = 0, \tag{3}$$

где компоненты скорости v_i выражаются соотношениями

$$v_i = \partial\chi/\partial x_i + \lambda\partial\mu/\partial x_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем при написании формул используется правило суммирования по повторяющимся дважды («немым») индексам.

Для давления p существует выражение

$$p = -\rho\left(\frac{\partial\chi}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{1}{2}v_i^2\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{5}$$

где ρ — плотность жидкости. При этом поверхности $\lambda = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$ являются вихревыми поверхностями.

Перейдем к новым независимым переменным x_1, x_2, μ, приняв в качестве неизвестных χ, λ, x_3. После соответствующих преобразований из (4) получим следующие выражения для компонент скорости:

$$v_i = \partial\chi/\partial x_i - \alpha_i(\partial\chi/\partial\mu + \lambda)\ (i = 1,2),\ v_3 = \alpha_3(\partial\chi/\partial\mu + \lambda), \tag{6}$$

где $\alpha_i = \left(\dfrac{\partial x_3}{\partial x_i}\right)\Big/\left(\dfrac{\partial x_3}{\partial\mu}\right)$ $(i = 1, 2)$; $\alpha_3 = 1\Big/\left(\dfrac{\partial x_3}{\partial\mu}\right)$.

Вместо χ, λ введем новые функции γ, η

$$\chi = \gamma + \eta,\ \lambda = -\partial\eta/\partial\mu. \tag{7}$$

Тогда из (6) получим

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma + \eta) - \alpha_i\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}\quad (i = 1, 2),\quad v_3 = \alpha_3\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}. \tag{8}$$

Уравнения (1) — (3), (5) в новых переменных с учетом (7), (8) примут соответственно вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \alpha_i\frac{\partial v_i}{\partial\mu} + \alpha_3\frac{\partial v_3}{\partial\mu} = 0\quad (i = 1, 2); \tag{9}$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} + v_i\frac{\partial x_3}{\partial x_i} = v_3\quad (i = 1, 2); \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\right) + v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\right) = 0\quad (i = 1, 2); \tag{11}$$

$$p = -\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}(\gamma + \eta) - v_3\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{1}{2}v_i^2\right]\quad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Уравнение (10) (кинематическое условие) требует, чтобы частицы жидкости, первоначально лежавшие на вихревой поверхности $\mu = \text{const}$, оставались на ней в течение всего времени движения.

Уравнения (9) — (11), в которых v_i определяются соотношениями (8), представляют систему для определения γ, x_3, η. Комбинируя уравнения (9) — (11), можно получить систему разрешающих уравнений дивергентного вида, что оказывается полезным при численном решении задач [4, 5]. Умножая уравнение (9) на $\partial x_3/\partial\mu$, после подстановки значений α_i (6) получаем

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(v_3 - v_i\frac{\partial x_3}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\right) = 0\quad (i = 1, 2). \tag{13}$$

Подставляя (10) в (13), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\right) = 0\quad (i = 1, 2). \tag{14}$$

Уравнение (11) с учетом (8), (13) можно привести к форме

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_3 v_i\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\right) = 0\quad (i = 1, 2), \tag{15}$$

где p с учетом (10) определяется выражением

$$p = -\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}(\gamma + \eta) + \frac{1}{2}(v_i^2 - v_3^2) + v_3 v_i\frac{\partial x_3}{\partial x_i}\right]\quad (i = 1, 2). \tag{16}$$

Эквивалентность уравнений (11), (15) несложно проверить. Если исключить из (15) p с помощью выражения (16) и в получившемся уравнении выделить слагаемое

$$v_3\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(v_3-v_i\frac{\partial x_3}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i\frac{\partial x_3}{\partial\mu}\right)\right],$$

которое в силу (13) обращается в нуль, то после подстановки в оставшуюся часть уравнения выражений (8) получим (11). Таким образом, вместо (9) — (11) имеем систему разрешающих уравнений (13) — (15).

Предложенная запись представляется удобной при рассмотрении течений со свободной поверхностью как потенциальных, так и вихревых, ограниченных вихревыми поверхностями при $\mu=\mu_1=\mathrm{const}$ и $\mu=\mu_2=\mathrm{const}$. Введение внешних сил, имеющих потенциал, не представляет труда. Преимущество данной формулировки состоит в том, что решение системы (13) — (15) разыскивается в фиксированной области изменения переменных x_1, x_2, μ. Физическая же область течения определяется уравнением (14). Исходная система (1) — (3) этого уравнения в явном виде не содержит.

Следует отметить, что с помощью подстановки (7) повышен порядок представления (6). Поскольку $\lambda=\partial\eta/\partial\mu$, при заданных λ, χ функции γ, η могут быть определены с точностью до произвольной функции $c_1(x_1, x_2, t)$. Следовательно, для однозначного решения задачи произвол в определении γ, η значения не имеет. Поэтому одну из этих функций на какой-либо границе ($\mu=\mu_1$ или $\mu=\mu_2$) можно задать произвольно, например $\gamma=0$.

Для случая течения жидкости со свободной поверхностью по неподвижному дну граничные условия на свободной поверхности ($p=0$ при $\mu=\mu_2$) и у дна ($x_3=f(x_1, x_2)$ при $\mu=\mu_1$) в принятых переменных можно записать в виде

$$x_3=f(x_1,\ x_2); \tag{17}$$

$$v_i\partial x_3/\partial x_i-v_3=0\ \ (i=1{,}2)\ \text{при}\ \mu=\mu_1; \tag{18}$$

$$\gamma=0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(v_i^2-v_3^2\right)+v_3v_i\frac{\partial x_3}{\partial x_i}=0\quad(i=1,2)\ \text{при}\ \mu=\mu_2. \tag{20}$$

При записи условия $p=0$ (20) учтено условие (19).

Отметим, что формально система (13) — (15) не эквивалентна системе (9) — (11). Действительно, переходя от уравнений (13), (14) обратно к (9), (10), вместо (10) получаем условие

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}+v_i\frac{\partial x_3}{\partial x_i}-v_3\right)=0,$$

откуда следует

$$\frac{\partial x_3}{\partial t}+v_i\frac{\partial x_3}{\partial x_i}-v_3=c_2(x_1,x_2,t).$$

Таким образом, для эквивалентности систем необходимо $c_2\equiv 0$. При интегрировании системы (13) — (15) это требование автоматически выполняется при задании соотношения (10) на одной из границ $\mu=\mathrm{const}$. В рассмотренном выше случае граничных условий это соотношение приобретает вид (18).

Укажем, что система (13) — (15) может быть непосредственно получена из уравнений Лагранжа [2, 3] путем замены двух переменных Лагранжа переменными Эйлера x_1, x_2 с последующим использованием подстановки (8). При этом оказывается, что оставшаяся переменная Лагранжа по смыслу совпадает с присутствующей в наших уравнениях переменной μ.

Эту систему можно также получить из вариационного принципа, приведенного в работе [2]. Преобразованный к переменным x_1, x_2, μ, он принимает вид

$$\delta M = 0,$$

где

$$M = \int\limits_{t}\int\limits_{x_1}\int\limits_{x_2}\int\limits_{\mu_1}^{\mu_2} L \frac{\partial x_3}{\partial \mu} d\mu dx_1 dx_2 dt; \tag{21}$$

$$L = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma + \eta) - v_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{1}{2} v_i^2 \quad (i = 1, 2, 3);$$

v_i определены соотношениями (8). Варьируя функционал (21) по γ, η, x_3, получаем соответственно уравнения (13), (14), (15). При этом на граничных поверхностях $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ естественные граничные условия определяются следующим образом:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\gamma + \eta) + \frac{1}{2}\left(v_i^2 - v_3^2\right) + v_3 v_i \frac{\partial x_3}{\partial x_i}\right] \delta x_3 = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial t} + v_i \frac{\partial x_3}{\partial x_i} - v_3\right) \delta\gamma = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Условия (17) — (20) являются, как видно, частным случаем этих условий.

Авторы выражают благодарность В. В. Пухначеву за полезное обсуждение затронутой проблемы.

Поступила 22 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Richtmyer R. D., Morton K. W.** Difference methods for initial - value problems. N. Y., John Wiley & Sons, 1967. Рус. пер. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач. М., Мир, 1972.
2. **Seliger R. L., Whitham G. B.** Variational principles in continuum mechanics.— Proc. Roy. Soc., ser. A, 1968, vol. 305, p. 1—25. Рус. пер. Сб. Механика , 1969, № 5 (117).
3. **Serrin J.** Mathematical principles of classical fluid mechanics.— In: Handb. Phys., 1959, vol. 8/1. Рус. пер. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
4. **Марчук Г. И.** Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеоиздат, 1967.
5. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.

УДК 532.526

ОБ АСИМПТОТИКЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

В. А. Батищев

(*Ростов-на-Дону*)

Для уравнений Навье — Стокса при исчезающей вязкости рассматривается плоская нелинейная задача о движении несжимаемой жидкости в области D, ограниченной свободной поверхностью Γ и непроницаемой стенкой S, под действием заданных начальных возмущений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \tag{1}$$

$$\mathbf{v}|_S = 0; \tag{2}$$