

**РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ
В СЛОИСТО-ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ**

А.И. Федоров, М.И. Эпов

Институт геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия

Рассматривается аналитический метод получения приближения для интегральных функций, описывающих электромагнитное поле магнитных дипольных возбудителей в проводящей слоистой среде при малых значениях волновых чисел. Разработанный метод применен для аппроксимации сигнала трехкатушечного зонда в среде с одной границей.

Квазистационарное приближение, электромагнитное поле, слоистая среда, волновое число.

**APPROXIMATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD FROM A MAGNETIC DIPOLE
IN A LAYERED MEDIUM AT SMALL WAVE NUMBERS**

A.I. Fedorov and M.I. Epov

A new analytical solution for approximate integral functions that describe the electromagnetic field from dipole sources in layered conducting media at small wave numbers is applied to a three-coil loop in a medium with a single interface.

Quasi-steady-state approximation, electromagnetic field, layered medium, wave number

ВВЕДЕНИЕ

При интерпретации данных и разработке методов электромагнитной разведки большую роль играет аналитическое приближение электромагнитного поля при малых значениях волнового числа. В настоящей работе рассматривается способ построения такого приближения, а также его характерные особенности на примере квазистационарного поля магнитного диполя. В настоящее время существует несколько исследований, посвященных построению низкочастотных аппроксимаций для источников различного типа в проводящих средах. Наиболее полное описание существующих методов можно найти в [1]. Поскольку точное выражение для такого поля представляется только в интегральном виде, само разложение в области малых волновых чисел сопряжено с некоторыми трудностями аналитического характера. Это является одной из причин, по которой предыдущие исследователи в основном ограничивались аппроксимацией электромагнитного поля до слагаемого, пропорционального третьей степени волнового числа. Предлагаемый здесь способ построения разложения математически обоснован и пригоден для построения приближений с необходимой степенью точности. Показано, что в разложение входят не только слагаемые, пропорциональные степени волнового числа, но также пропорциональные логарифму волнового числа. На примере вертикального профилирования трехкатушечным зондом в среде с одной границей получено низкочастотное разложение отклика вплоть до четвертой степени волнового числа.

**МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В СЛОИСТО-ОДНОРОДНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ**

Как было отмечено выше, электромагнитное поле магнитного диполя в слоистой среде определяется сложными интегральными функциями. Для иллюстрации метода разложения подобных функций в ряд по малому параметру возьмем простейшую из них, но обладающую всеми свойствами реально возникающих при построении аналитического решения прямых задач. Рассматриваемая функция встречается в задаче нахождения магнитного поля произвольно ориентированного магнитного диполя в слоисто-однородных средах, тензор проводимости которых в главных осях имеет трансверсально-изотропный вид, и при этом одна из его горизонтальных осей образует малый угол с плоскостью раздела сред (слабонаклонная анизотропия).

Итак, необходимо получить разложение функции

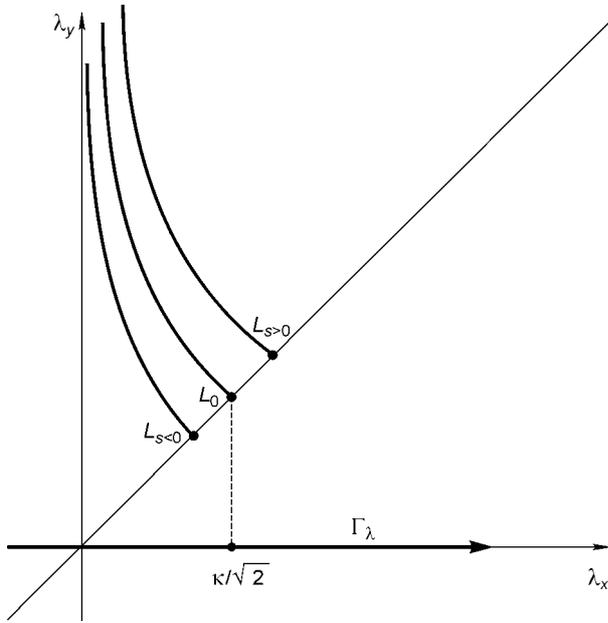


Рис. 1. Плоскость комплексной переменной λ с разрезами.

$$I(k_1, k_2) = \int_0^\infty \frac{\lambda \exp(-\sqrt{\lambda^2 + k_1^2}) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 + k_2^2}} \quad (1)$$

в ряд в окрестности точки $k_{1,2} = 0$; здесь $k_{1,2} = \kappa_{1,2} e^{-i\pi/4}$, $\kappa_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Физически параметры $\kappa_{1,2}$ здесь — это отношение некоторого расстояния z к скин-слою δ проводящей среды. С частотой источника ω и проводимостью $\gamma_{1,2}$ полупространств эти параметры связаны следующим образом: $\kappa_{1,2} \sim \sqrt{\gamma_{1,2} \omega}$. Поэтому к нулевому значению они стремятся одновременно. Выразим κ_2 через κ_1 следующим образом:

$$\kappa_2^2 = \kappa^2(1 + s), \quad \kappa_1 = \kappa.$$

Параметр $s = (\gamma_2 - \gamma_1)/\gamma_1$ удовлетворяет неравенству $s \geq -1$. Физически он характеризует относительное различие проводимостей двух сред (в однородной среде $s = 0$). Рассмотрим разложение исследуемой функции в окрестности точки $\kappa = 0$. Перейдем в (1) к зависимости от переменной κ и параметра s :

$$I(\kappa, s) = \int_0^\infty \frac{\lambda \exp(-\sqrt{\lambda^2 - i\kappa^2}) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - i\kappa^2} + \sqrt{\lambda^2 - i\kappa^2(s+1)}}. \quad (2)$$

Подынтегральная функция в последнем выражении является аналитической в плоскости переменной λ с двумя разрезами [2] (у квадратного корня необходимо выбрать лист с положительной реальной частью):

$$L_0 : \Re(\sqrt{\lambda^2 - i\kappa^2}) = 0,$$

$$L_s : \Re(\sqrt{\lambda^2 - i\kappa^2(s+1)}) = 0.$$

Разрезы L_0 и L_s — отрезки гипербол; они описываются следующими выражениями:

$$L_0 : \{\lambda_x \lambda_y = \kappa^2/2, |\lambda_x| \leq \kappa/\sqrt{2}\},$$

$$L_s : \{\lambda_x \lambda_y = \kappa^2(s+1)/2, |\lambda_x| \leq \kappa \sqrt{s+1}/\sqrt{2}\}.$$

При $s = -1$ L_s — ось мнимых чисел.

Плоскость с такими разрезами показана на рис. 1. Путь интегрирования Γ_λ показан там же.

Для того чтобы привести интеграл к более удобному для разложения виду, произведем в нем замену переменной:

$$w \kappa \exp(-i\pi/4) = \sqrt{\lambda^2 - i\kappa^2}, \quad \lambda d\lambda = -i\kappa^2 w dw.$$

После такой замены (2) принимает вид

$$\begin{aligned} I &= \kappa e^{-i\pi/4} \int_{\Gamma_w} \frac{w \exp(-\kappa w e^{-i\pi/4})}{w + \sqrt{w^2 + s}} dw = \\ &= \frac{\kappa e^{-i\pi/4}}{s} \int_{\Gamma_w} w (\sqrt{w^2 + s} - w) \exp(-\kappa w e^{-i\pi/4}) dw. \end{aligned} \quad (3)$$

Разрезы в плоскости w принимают следующий вид:

$$L_0 : \Re(w e^{-i\pi/4}) = 0,$$

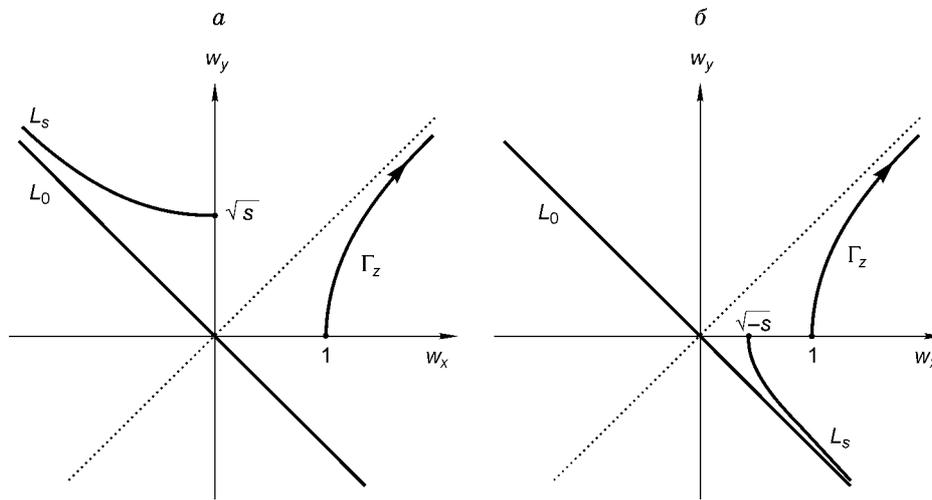


Рис. 2. Разрезы и путь интегрирования в плоскости переменной w .

a — при $s > 0$; b — при $s < 0$.

$$L_s : \Re (e^{-i\pi/4} \sqrt{w^2 + s}) = 0.$$

Листы выбираются таким образом, чтобы реальная часть этих выражений была положительная.

Путь интегрирования Γ_w описывается следующим выражением:

$$w = \frac{\sqrt{t^2 - i\kappa^2}}{\sqrt{-i\kappa^2}} = \sqrt{i\tau^2 + 1}, \quad \tau = t/\kappa = 0 \dots \infty.$$

Здесь квадратный корень имеет положительную реальную часть.

Запишем разрезы и путь интегрирования как функции реальной (w_x) и мнимой (w_y) частей переменной w :

$$L_0 : (w_x + w_y) = 0,$$

$$L_s : \begin{cases} w_y^2 = w_x^2 + s, w_x w_y < 0, s > 0 \\ w_x^2 = w_y^2 + |s|, w_x w_y < 0, s < 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_w : w_x^2 = w_y^2 + 1, w_y = 0 \dots \infty.$$

На рис. 2 показаны два разных варианта расположения разрезов в плоскости w , в зависимости от значения параметра s .

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{\gamma} w (\sqrt{w^2 + s} - w) \exp(-w\kappa e^{-i\pi/4}) dw.$$

Контур интегрирования (рис. 3) можно разбить на три части: $\gamma = C_R + \Gamma_{w1} + \Gamma'_{w1}$. Здесь C_R — дуга окружности радиуса R , Γ_{w1} — отрезок гиперболы Γ_w , которая проходит в обратном направлении, и Γ'_{w1} — отрезок вещественной оси от 1 до R . Поскольку контур γ нигде не пересекает разрезов и внутри него нет полюсов, то по теореме Коши интеграл по нему равен нулю. Покажем,

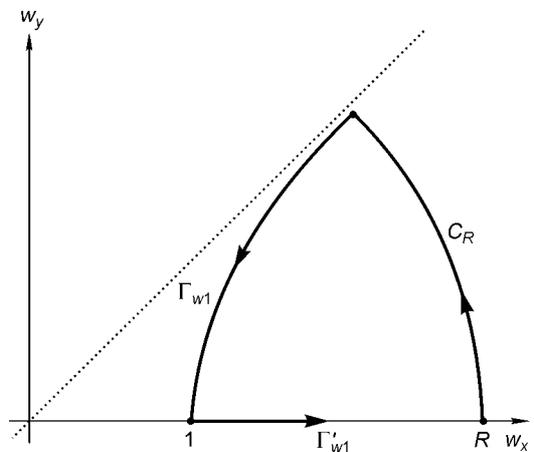


Рис. 3. Контур интегрирования γ в плоскости переменной w .

что интеграл по дуге C_R исчезает при стремлении радиуса R в бесконечность. Тем самым будет доказано, что интеграл (3) по комплексному пути Γ_w можно заменить интегралом по вещественной полуоси Γ'_w .

Итак, оценим интеграл по дуге окружности, полагая $w = Re^{i\varphi}$, $\varphi = 0, \dots, \varphi_0$, где $\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi_0 = \pi/4$:

$$\left| \int_{C_R} w (\sqrt{w^2 + s} - w) e^{-w\kappa} \exp(-i\pi/4) dw \right| \leq \int_0^{\varphi_0} R \left| \sqrt{R^2 e^{2i\varphi} + s} - Re^{i\varphi} \right| \exp(-R\kappa \cos(\varphi - \frac{\pi}{4})) R d\varphi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_0^{\pi/4} R^3 \frac{1}{2} \frac{s}{R^2} \exp(-\kappa R \cos(\varphi - \frac{\pi}{4})) d\varphi = \frac{s}{2} R \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-\kappa R \sin \varphi} d\varphi \leq \frac{s}{2} R \int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-\kappa R \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{s\pi}{4\kappa} (e^{-\kappa R/2} - e^{-\kappa R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Таким образом, интеграл (2) с комплексными параметрами можно привести к интегралу по вещественной полуоси с вещественными параметрами (экспоненту в подынтегральной функции можно разложить на реальную и мнимую части):

$$I = \frac{\kappa e^{-i\pi/4}}{s} \int_1^{\infty} w (\sqrt{w^2 + s} - w) e^{-\kappa w} \exp(-i\pi/4) dw. \quad (4)$$

Далее опишем один из способов разложения этой функции в ряд. Перепишем подынтегральную функцию из (4) в таком виде:

$$f(w, \kappa, s) = w^2 (\sqrt{1 + s/w^2} - 1) \exp(-\kappa w e^{-i\pi/4}).$$

Выражение в скобках можно разложить в ряд по параметру s/w^2 :

$$\sqrt{1 + s/w^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \left(\frac{s}{w^2}\right)^n, \quad c_n = \frac{\Gamma(n-1/2)}{n! \Gamma(-1/2)}. \quad (5)$$

Радиус сходимости ряда (5) выражается следующим неравенством:

$$\left| \frac{s}{w^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow w \geq \sqrt{|s|}.$$

Поскольку в интеграле выполнено $w \geq 1$, то при $|s| \leq 1$ этот ряд абсолютно сходится всюду в области изменения w , а при $s > 1$ можно разбить интервал интегрирования на две части:

$$\int_1^{\infty} = \int_1^{\sqrt{s}} + \int_{\sqrt{s}}^{\infty}.$$

Интеграл по конечному промежутку можно разложить в ряд Тейлора по степеням κ , а во втором интеграле разложить подынтегральное выражение в ряд описанным способом. Поскольку полученный функциональный ряд сходится абсолютно во всей области изменения переменной w , можно переставить местами интегрирование и суммирование.

В качестве примера разберем здесь случай, когда $|s| \leq 1$. Физически это соответствует двум случаям: 1) проводимость нижнего полупространства меньше проводимости верхнего ($-1 \leq s < 0$), 2) проводимость верхнего полупространства слабо отличается от проводимости нижнего ($0 \leq s \leq 1$). Для разложения этого интеграла удобнее использовать следующее его представление:

$$I = \frac{e^{-i\pi/4}}{s\kappa^2} \int_{\kappa}^{\infty} w (\sqrt{w^2 - s\kappa^2} - w) e^{-w} \exp(-\frac{i\pi}{4}) dw = \frac{e^{-i\pi/4}}{s\kappa^2} \int_{\kappa}^{\infty} w^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \left(\frac{s\kappa^2}{w^2}\right)^n \right] e^{-w} \exp(-\frac{i\pi}{4}) dw =$$

$$= \frac{e^{-i\pi/4}}{s\kappa^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n (s\kappa^2)^n \int_{\kappa}^{\infty} w^{2-2n} e^{-w} \exp(-\frac{i\pi}{4}) dw =$$

$$= \frac{e^{-i\pi/4}}{2s\kappa^2} s\kappa^2 \int_{\kappa}^{\infty} e^{-w} \exp(-\frac{i\pi}{4}) dw + e^{-i\pi/4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{n+1} s^n \kappa^{2n} \int_{\kappa}^{\infty} \frac{e^{-w} \exp(-\frac{i\pi}{4})}{w^{2n}} dw.$$

Причем

$$\int_{\kappa}^{\infty} \exp(-w \exp(-\frac{i\pi}{4})) dw = \exp(-\frac{i\pi}{4} - \kappa \exp(-\frac{i\pi}{4})),$$

а интеграл в последней сумме выражается через интегральную экспоненту и степенные функции следующим образом [3]:

$$\int_{\kappa}^{\infty} \frac{e^{-w \exp(-\frac{i\pi}{4})}}{w^{2n}} dw = \left(e^{-\frac{i\pi}{4}} \right)^{2n-1} \left[\frac{Ei(-\kappa e^{-\frac{i\pi}{4}})}{(2n-1)!} + e^{-\kappa \exp(-\frac{i\pi}{4})} \sum_{m=1}^{2n-1} a_{2n-1,m} (\kappa e^{-\frac{i\pi}{4}})^{-m} \right],$$

$$a_{2n-1,m} = \frac{(-1)^{m+1} (m-1)!}{(2n-1)!}.$$

В конечном итоге разложение исследуемой функции в ряд выглядит следующим образом:

$$I = \frac{1}{2} e^{-k} + Ei(-k) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{n+1} \frac{(sk^2)^n}{(2n-1)!} + k e^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{n+1} s^n \sum_{m=1}^{2n-1} a_{2n-1,m} k^{2n-m-1}.$$

Здесь мы использовали введенное ранее равенство $k = \kappa e^{-i\pi/4}$. Учитывая, что в разложении интегральной экспоненты $Ei(-k)$ присутствует логарифм, можно утверждать, что в разложении квазистационарного магнитного поля в области малых частот присутствуют слагаемые, пропорциональные логарифму волнового числа. Кроме того, можно заметить, что перед логарифмом стоит четная степень волнового числа.

Выпишем здесь первые три члена разложения данной функции:

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} k \frac{(\sqrt{s+1})^3 - 1}{s} - \frac{1}{8} sk^2 \ln(k) + O(k^2). \quad (6)$$

Можно показать, что выражение (6) верно и в случае $s > 1$. На рис. 4 и 5 изображены графики реальной и мнимой частей функции $I(k, s) - 1/2$ при различных значениях параметра s , а также приближения, учитывающие разное число слагаемых. Видно, что учет слагаемого $k^2 \ln(k)$ дает лучшее приближение по

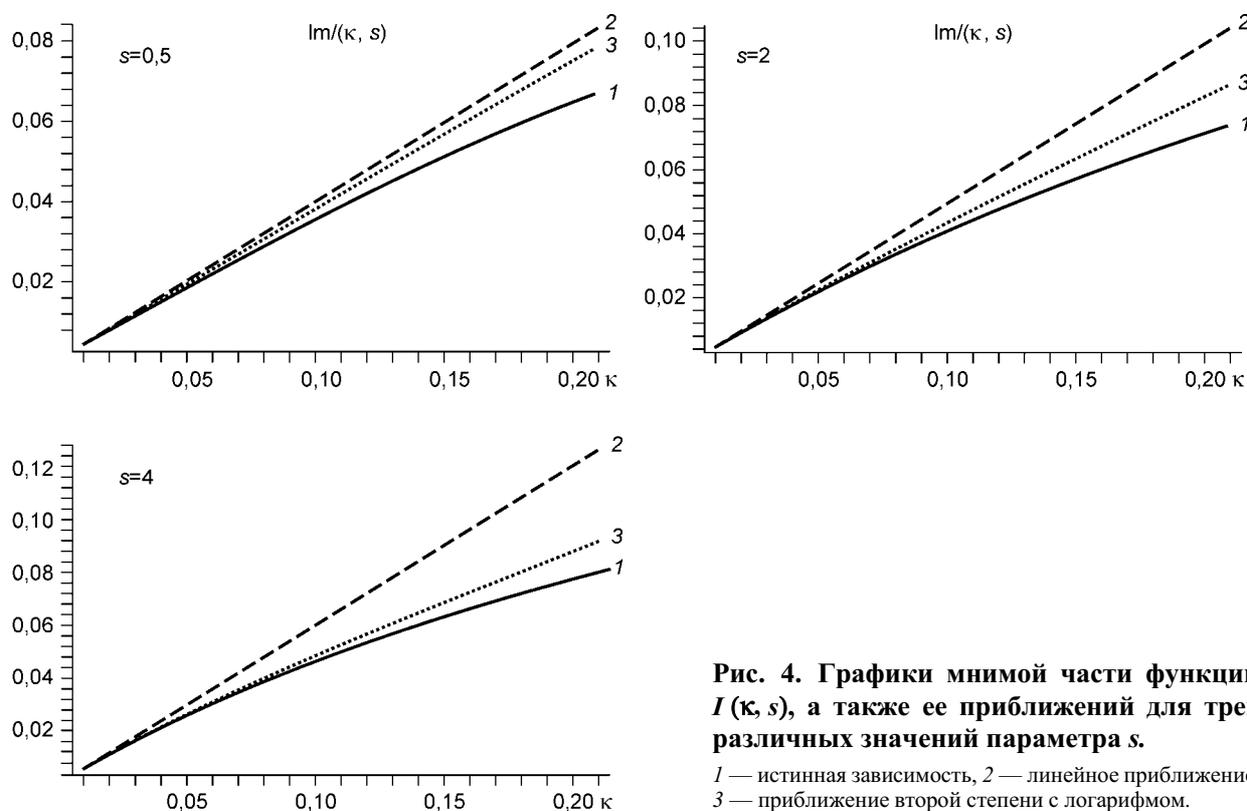


Рис. 4. Графики мнимой части функции $I(\kappa, s)$, а также ее приближений для трех различных значений параметра s .

1 — истинная зависимость, 2 — линейное приближение, 3 — приближение второй степени с логарифмом.

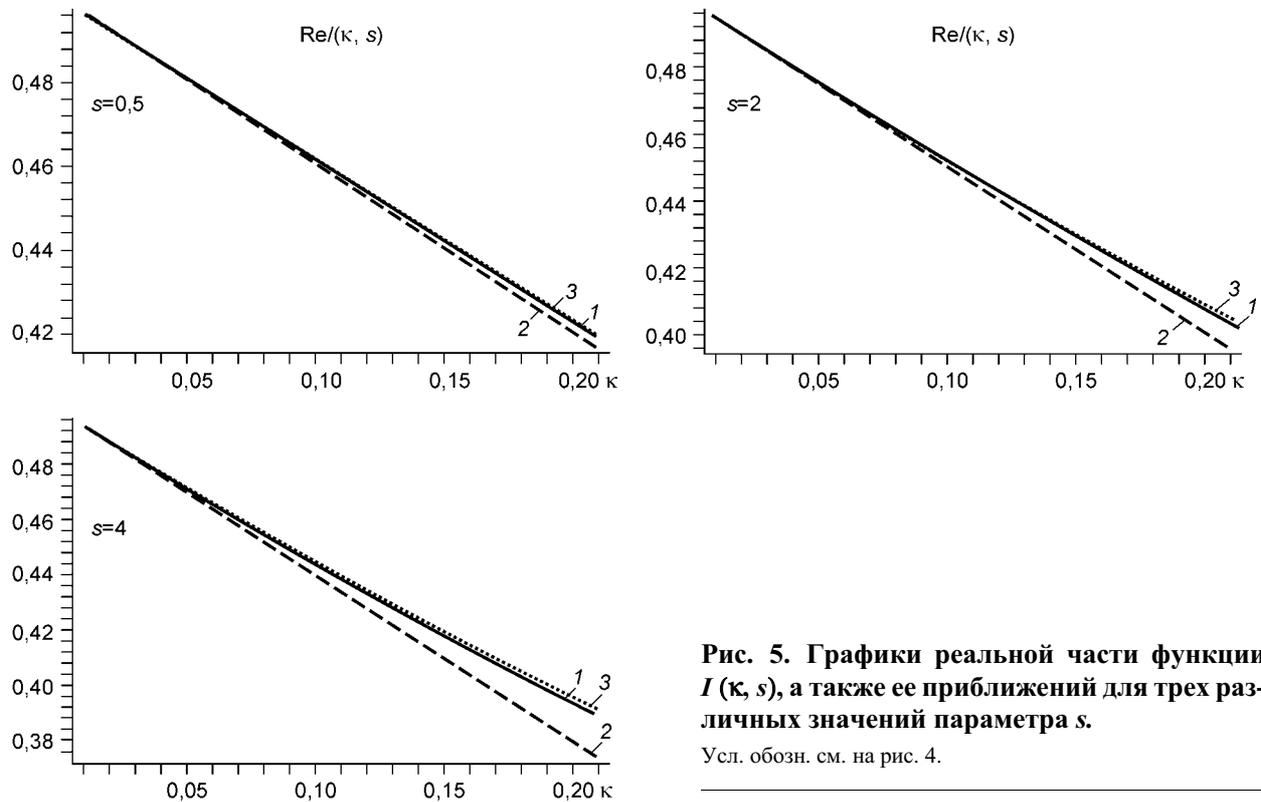


Рис. 5. Графики реальной части функции $I(\kappa, s)$, а также ее приближений для трех различных значений параметра s .

Усл. обозн. см. на рис. 4.

сравнению с линейным. Далее рассмотрим применение описанного способа разложения на примере разложения магнитного поля вертикального магнитного диполя в изотропной среде с одной границей.

НИЗКОЧАСТОТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ СИГНАЛА ТРЕХКАТУШЕЧНОГО ЗОНДА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ ПРОФИЛИРОВАНИИ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Пусть источник — вертикальный магнитный диполь с моментом $M = M_z e^{i\omega t}$ (с круговой частотой ω) — расположен на высоте z_0 над границей двух сред с разными проводимостями (γ_1 — проводимость верхней и γ_2 — нижней). Приемник расположен в точке с координатой z (ось Oz направлена вниз в отличие от оси Oz_0). Вертикальное магнитное поле H_z в среде с одной плоской границей можно представить в следующем виде:

$$h_{z11} = \left[\frac{(1 + k_1|z + z_0|)}{(z + z_0)^3} \exp(-k_1|z + z_0|) - \frac{(1 + k_1(z_0 - z))}{(z_0 - z)^3} \exp(-k_1(z_0 - z)) \right] + \int_0^\infty \frac{\lambda^3 \exp(-(z_0 - z)\sqrt{\lambda^2 + k_2^2}) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 + k_2^2}}, \quad (7)$$

$$h_{z12} = \int_0^\infty \frac{\lambda^3 \exp(-z\sqrt{\lambda^2 + k_2^2} - z_0\sqrt{\lambda^2 + k_2^2}) d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k_1^2} + \sqrt{\lambda^2 + k_2^2}}. \quad (8)$$

Здесь $h_{zij} = 2\pi H_{zij}/M_z$, $k_{1,2} = \sqrt{\mu_0\omega\gamma_{1,2}} e^{-i\pi/4} = \kappa_{1,2} e^{-i\pi/4}$ — волновое число. Здесь и далее первый индекс соответствует положению источника, второй — положению приемника; индекс 1 соответствует верхней среде ($z < 0$), а индекс 2 — нижней ($s > 0$). Магнитное поле h_{z22} получается из выражения (7), в котором необходимо поменять местами k_1 и k_2 , изменить направления осей z и z_0 и знак магнитного момента диполя.

Описанным выше методом получено низкочастотное разложение магнитного поля в рассматриваемом случае до четвертой степени волнового числа включительно. После приведения всех слагаемых получены следующие приближенные выражения:

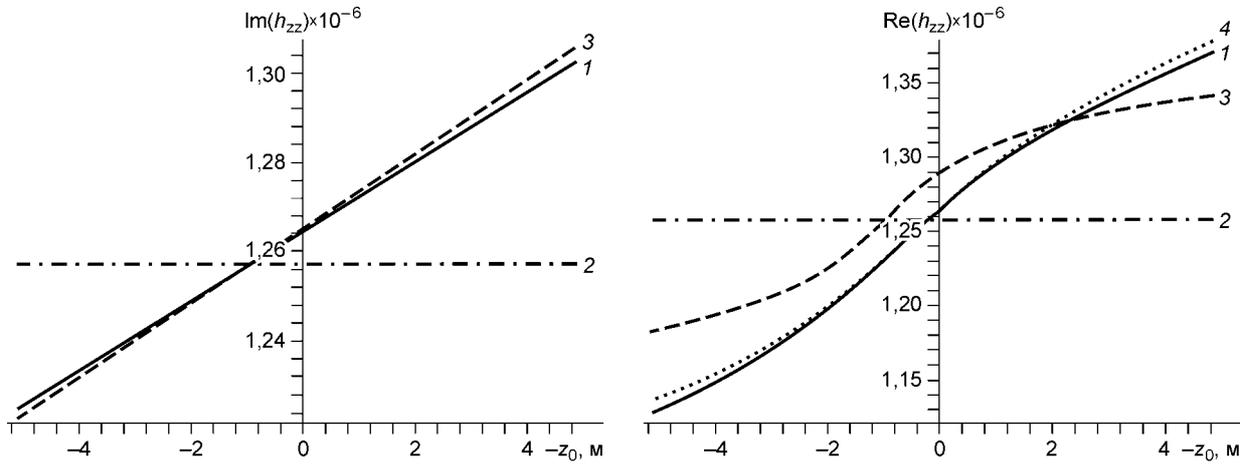


Рис. 6. Расчетная кривая профилирования трехкатушечного зонда в среде с одной плоской границей (мнимая и реальная части сигнала) для случая $\kappa_1 = 0,02 \text{ м}^{-1}$, $\kappa_2 = 0,024 \text{ м}^{-1}$, а также ее приближения.

Здесь из магнитного поля во всех приближениях вычтено слагаемое, пропорциональное k^2 . 1 — истинная зависимость, 2 — кубическое приближение, 3 — приближение четвертой степени с логарифмом, 4 — приближение четвертой степени.

$$\begin{aligned}
 h_{z11} &\approx \frac{1}{(z+z_0)^3} + k_1^2 \left[-\frac{1}{2(z+z_0)} + \frac{(1+\Lambda_{21}^2)}{8(z_0-z)} \right] + \frac{2}{15} k_1^3 \frac{1-\Lambda_{21}^5}{1-\Lambda_{21}^2} - \\
 &\quad - \frac{\Lambda_{21}^4-1}{16} k_1^4 (z_0-z) \left\{ \ln \left(\frac{(k_1+k_2)(z_0-z)}{2} \right) + C \right\} - \\
 &\quad - \frac{k_1^4}{4} \left\{ z + (z_0-z) \left(\frac{5}{48} \Lambda_{21}^4 + \frac{11}{12} \Lambda_{21}^2 - \frac{1}{48} \right) \right\} - \frac{k_1^4(z_0-z)}{16} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\Lambda_{21}^3-1}{\Lambda_{21}^2-1} - \frac{\Lambda_{21}-1}{\Lambda_{21}^2-1} - \frac{\Lambda_{21}^5-1}{\Lambda_{21}^2-1} \right\}, \\
 h_{z12} &\approx \frac{1}{(z+z_0)^3} + k_1^2 \left[-\frac{\Lambda_{21}^2}{2(z+z_0)} + \frac{(z+3z_0)(\Lambda_{21}^2-1)}{8(z_0+z)^2} \right] + \frac{2}{15} k_1^3 \frac{1-\Lambda_{21}^5}{1-\Lambda_{21}^2} - \\
 &\quad - \frac{\Lambda_{21}^4-1}{16} k_1^4 (z_0-z) \left\{ \ln \left(\frac{(k_1+k_2)(z_0-z)}{2} \right) + C \right\} - \\
 &\quad - \frac{k_1^4}{4} \left\{ \Lambda_{21}^2 z + (z-z_0) \left(\frac{5}{48} - \frac{1}{12} \Lambda_{21}^2 - \frac{1}{48} \Lambda_{21}^4 \right) \right\} - \frac{k_1^4(z-z_0)}{16} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\Lambda_{12}^3-1}{\Lambda_{12}^2-1} - \frac{\Lambda_{12}-1}{\Lambda_{12}^2-1} - \frac{\Lambda_{12}^5-1}{\Lambda_{12}^2-1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения: $\Lambda_{ij} = \gamma_i / \gamma_j$, C — постоянная Эйлера.

Воспользуемся полученным приближением для построения кривых вертикального профилирования трехкатушечным зондом в среде с одной границей. Пусть параметры зонда таковы: $L_1 = 1,0 \text{ м}$, $L_2 = 1,6 \text{ м}$, $M_z / 2\pi = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. На рис. 6 и 7 приведены зависимости мнимой и реальной частей магнитного поля (точного решения и различных его приближений) от положения источника в среде для двух разных случаев (в первом $\kappa_1 = 0,02 \text{ м}^{-1}$, $\kappa_2 = 0,024 \text{ м}^{-1}$, во втором $\kappa_1 = 0,05 \text{ м}^{-1}$, $\kappa_2 = 0,035 \text{ м}^{-1}$). При этом, для того чтобы можно было визуально определить степень аппроксимации мнимой части полученным приближением, из всех приближений магнитного поля было вычтено слагаемое, пропорциональное квадрату волнового числа. Таким образом, иллюстрации приведены для функции $h_{zij} - A_{ij} k^2$, где A_{ij} — коэффициент разложения магнитного поля при слагаемом, содержащем k^2 , и ее приближений.

Необходимо отметить следующие особенности, характерные для полученного приближения.

— В мнимой компоненте магнитного поля нет слагаемого, пропорционального логарифму, поскольку k^4 — вещественное число, а для комплексного логарифма верно следующее равенство: $\ln k = \ln|k| + i \arg(k) = \ln \kappa - i\pi/4$. Таким образом, слагаемое, пропорциональное $k^4 \ln k$, в мнимую часть дает вклад, пропорциональный k^4 ; логарифм волнового числа в разложении мнимой компоненты поля появляется позже (начиная с $k^6 \ln k$), кроме того, слагаемое, пропорциональное k^4 , вклада в мнимую часть не дает.

— В приближенном выражении перед логарифмом стоит разность четвертых степеней волнового числа, поэтому это слагаемое будет мало в слабоконтрастных средах.

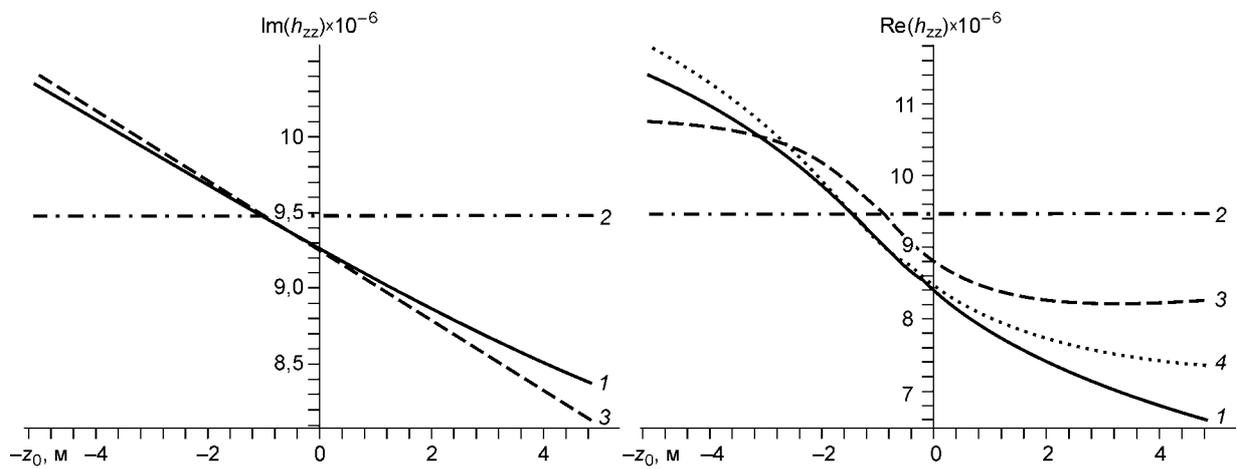


Рис. 7. Расчетная кривая профилирования трехкатушечного зонда в среде с одной плоской границей (мнимая и реальная части сигнала) для случая $\kappa_1 = 0,05 \text{ м}^{-1}$, $\kappa_2 = 0,035 \text{ м}^{-1}$, а также ее приближения.

Здесь из магнитного поля во всех приближениях вычтено слагаемое, пропорциональное k^2 . Усл. обозн. см. на рис. 6.

— Приближение работает лучше вблизи границы между средами. Это связано с выполнением условия $|kL_t| \ll 1$, где L_t — максимальное расстояние в задаче (размер зонда, удаление источника или приемника от границы и т. п.).

Необходимо отметить еще один характерный для приближения момент. Допустим, мы оборвали аппроксимирующий ряд на слагаемом, пропорциональном $k^4 \ln(k)$. Поскольку выполнено равенство

$$k^4 \ln(Ck) + O(k^4) = k^4 \ln k + k^4 \ln C + O(k^4) = k^4 \ln k + O(k^4),$$

то от добавления под логарифм любой вещественной константы порядок аппроксимации не меняется. При этом в приближающем ряду возникает неоднозначность. Очевидно, эта неоднозначность исчезает, если ряд оборвать на следующем слагаемом. При построении рис. 6 и 7 использовались константы, указанные в приближенных формулах. Необходимо заметить, что приближения более высокой степени будут иметь такой же характер. Таким образом, в области малых волновых чисел гармоническое магнитное поле приближается парами слагаемых $A_n k^n + B_n k^n \ln k$, где коэффициент B_n равен нулю, если степень волнового числа нечетна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был предложен новый аналитический метод построения приближений магнитного поля магнитных дипольных возбудителей. Предложенный подход был проиллюстрирован на примере разложения одной из интегральных функций, возникающих при решении прямой задачи электромагнитных зондирований в анизотропной проводящей среде. При помощи разработанного метода были построены приближения магнитного поля вертикального магнитного диполя различной степени точности. Показано, что в разложение магнитного поля в слоистой среде, начиная с четвертой степени волнового числа, входят слагаемые, содержащие логарифм волнового числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кауфман А.А.** Введение в теорию геофизических методов, Ч. 2. Электромагнитные поля. М., Недра, 2000, 483 с.
2. **Табаровский Л.А.** Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. М., Наука, 1975, 140 с.
3. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1975, 1108 с.
4. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции. М., Физматгиз, 1963, 357 с.

Рекомендована к печати 9 августа 2004 г.
С.В. Гольдиным

Поступила в редакцию 4 февраля 2004 г.,
после доработки — 6 июля 2004 г.