

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТОЙ СДВИГОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Н. С. Еськов, А. С. Козловских, Д. В. Неуважаев

Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики, 456770 Снежинск

Представлены результаты численных расчетов по программному комплексу МАХ двумерной задачи о возникновении турбулентности на границе раздела двух потоков слабожимаемых газов. Анализируется связь между пространственной и временной задачами развития турбулентной зоны при сдвиговой неустойчивости. Вычислена константа, характеризующая степень сдвигового турбулентного перемешивания, и исследовано влияние перепада плотности смешиваемых жидкостей на интенсивность роста турбулентной зоны. Для всех рассмотренных значений перепада плотности вычислен коэффициент гетерогенности полученной смеси.

Постановка задачи. Когда два несжимаемых полубесконечных потока жидкости (или газа) движутся в одном направлении с разными скоростями U_1 и U_2 , на границе раздела между этими потоками возникает турбулентность. Такое движение является автомодельным, поэтому ширину области турбулентного перемешивания можно представить в виде

$$L = 0,5\alpha_u f(\rho_1/\rho_2)|U_1 - U_2|t, \quad (1)$$

где α_u — постоянная, определяемая в эксперименте; t — время взаимодействия потоков; $f(\rho_1/\rho_2)$ — безразмерная функция, зависящая от перепада плотности и нормированная как $f(1) = 1$. Разность $|U_1 - U_2|$ является инвариантом преобразования Галилея, причем картина течения не изменится, если поменять местами значения скорости потоков: $U_1 \leftrightarrow U_2$. Такая замена эквивалентна замене значений плотности $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$. Следовательно, функция $f(x)$ обладает свойством

$$f(x) = f(1/x). \quad (2)$$

Проведение опыта в такой временной постановке представляется затруднительным, поэтому экспериментальное исследование сдвиговой неустойчивости часто сводится к изучению следующей пространственной задачи. Рассматриваются две несжимаемые жидкости (или два газа) с плотностями ρ_1 и ρ_2 , которые движутся вдоль полуплоскости $y = 0$, $x < 0$, разделяющей эти жидкости, со скоростями U_1 и U_2 соответственно ($U_1 > U_2$) (рис. 1). Число Атвуда определим как $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$, в данном случае оно может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В точке $x = 0$ жидкости соприкасаются, а при $x > 0$ на границе раздела возникает турбулентность (область I на рис. 1).

Пространственную задачу можно заменить временной, используя соотношение $x = U_0 t$. Физический смысл скорости U_0 вытекает из следующих рассуждений. Если в момент времени $t = 0$ наблюдатель находится в точке $x = 0$, $y = 0$, а в дальнейшем двигается вдоль оси x со скоростью U_0 , то для него развитие области перемешивания происходит по закону (1). Поскольку в момент времени $t > 0$ наблюдатель находится в точке $x = U_0 t$, то ширину области перемешивания можно представить в виде

$$L = 0,5\alpha_u f(\rho_1/\rho_2)|U_1 - U_2|(x/U_0). \quad (3)$$

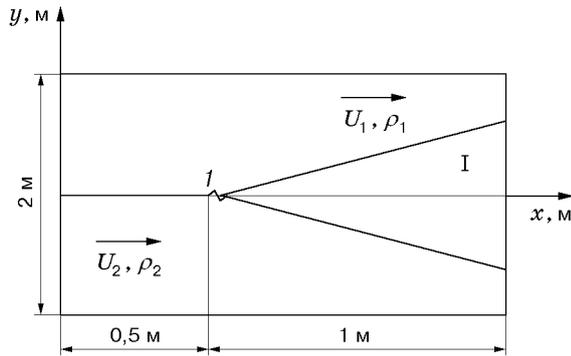


Рис. 1. Схема течения двух потоков жидкости, движущихся с разными скоростями

Различные способы определения эффективной скорости U_0 предложены в работе [1], где рассмотрены следующие выражения:

$$U_0 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2), \quad U_0 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \right)^2},$$

$$U_0 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \left(1 + \frac{8}{15\pi} \left(\frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \right)^2 \right).$$
(4)

Скорость U_0 получена как скорость линии тока с плотностью $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$.

В работе [2] предложено соотношение

$$U_0 = (U_1\rho_1 + U_2\rho_2)/(\rho_1 + \rho_2).$$
(5)

В [3] указано, что при больших перепадах плотности смешиваемых веществ эффективная скорость определяется интегральным выражением

$$U_0 = \int_{y_1}^{y_2} \rho U dy / \int_{y_1}^{y_2} \rho dy,$$
(6)

где y_1, y_2 — границы зоны перемешивания.

Исследуем соотношения (4)–(6) для эффективной скорости U_0 , сравнивая результаты двух экспериментов, подобных представленному на рис. 1, когда число Атвуда принимает значения с противоположными знаками. Для этого нужно поменять местами значения плотности: $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$, причем рассматривать взаимодействие потоков различной плотности ($\rho_1 \neq \rho_2$). В данном случае выполняется свойство (2), следовательно, имеет место соотношение

$$\left(\frac{dL}{dx} \right)_1 / \left(\frac{dL}{dx} \right)_2 = \frac{U_{02}}{U_{01}}.$$
(7)

Если по результатам этих экспериментов найти выражение для U_0 , то для определения α_u будет достаточно проведения третьего эксперимента при $\rho_1 = \rho_2$, из которого получаем $\alpha_u = 2(dL/dx)_3 U_{03} / |U_1 - U_2|$. Располагая выражением для U_0 и значением α_u , по результатам описанных и дополнительных экспериментов с различными значениями перепада плотности ρ_1/ρ_2 можно определить вид функции $f(\rho_1/\rho_2)$.

Таким образом, можно получить основные характеристики сдвигового турбулентного перемешивания:

- характерную скорость U_0 , устанавливающую связь пространственной и временной задач;
- константу α_u , характеризующую степень турбулентного перемешивания;
- функцию $f(\rho_1/\rho_2)$, определяющую зависимость ширины зоны сдвигового турбулентного перемешивания от перепада плотности.

Таблица 1

Номер численного эксперимента	ρ_1 , кг/м ³	ρ_2 , кг/м ³	U_1 , м/с	U_2 , м/с	A
1	1,1	7,7	1,30	9,15	0,75
2	1,1	7,7	9,15	1,30	-0,75
3	1,1	1,1	1,30	9,15	0

Эксперименты проводились путем численного моделирования с использованием программного комплекса МАХ [4], позволяющего рассчитывать вихревые течения с большими деформациями границ раздела веществ.

Исходные данные. Результаты расчетов. В прямоугольной расчетной области, разделенной границей $y = 0$, задавалось плоское течение двух слабосжимаемых газов (см. рис. 1). Параметры потоков приведены в табл. 1. Вещества описывались уравнением состояния изотермического газа $P_i = C_0^2(\rho_i - \rho_{0i})$, где P_i — парциальное давление i -го компонента смеси; $C_0 = 310$ м/с — скорость звука; ρ_i, ρ_{0i} — плотности возмущенного и невозмущенного потоков; i — номер компонента смеси. Рассчитываемая область разбивалась на два яруса линией $y = 0$. Верхняя и нижняя границы системы являлись жесткими стенками, левая и правая — неподвижными эйлеровыми границами. На эйлеровом этапе расчета слева задавался постоянный приток вещества в каждом ярусе, справа происходил отток. На лагранжевом этапе расчета на левой границе каждого яруса задавалась постоянная нормальная скорость, на правой — нормальная скорость

$$U_n = c_1 U_1 + c_2 U_2, \quad (8)$$

где c_1, c_2 — массовые концентрации первого и второго вещества в приграничных расчетных ячейках; U_1, U_2 — скорости веществ на входе. Рассмотрено несколько типов граничных условий справа. Все они в той или иной степени влияют на развитие зоны турбулентного перемешивания вблизи правой границы расчетной области. Условие (8) выбрано как оказывающее наименьшее влияние.

Граничным условием на линии раздела ярусов являются жесткая стенка в левой части (0,5 м) и контактная граница на оставшемся участке. Расчеты проводились на квадратной сетке с шагом $\Delta x = \Delta y = 0,01$ м. В начальный момент времени на границе раздела потоков задавались случайные возмущения с максимальной амплитудой $0,5\Delta y$, затем граница рассчитывалась как лагранжева линия до момента $t = 0,1$ с, когда ширина зоны возмущения увеличилась примерно до $2\Delta y$. С этого момента расчет проводился на неподвижной эйлеровой сетке с учетом перетекания веществ через границу стыковки ярусов. Развитие зоны смешения потоков рассчитывалось с использованием концентраций. Для расчета смеси веществ применялось условие механического равновесия компонентов. С момента $t = 0,1$ с на расстоянии 0,5 м от левого края расчетной области на границе, разделяющей газовые потоки, был установлен «вибратор» 1 (см. рис. 1), т. е. в этой точке вертикальная компонента скорости изменялась по закону $V = V_0 \sin(\omega t)$, где $V_0 = 2$ м/с; $\omega = 400$ рад/с. Расчет проводился до тех пор, пока не сформировалась развитая область турбулентного перемешивания, при этом общее время расчета составляло около 0,8 с.

На рис. 2 изображены мгновенные профили объемной концентрации легкого компонента смеси. Следуя [1], для определения величины автомодельного наклона $dL/dx = B_0$ проведено усреднение по четырем моментам времени с интервалом $\Delta t = 0,025$ с.

При обработке результатов численного эксперимента для каждого расчетного столбца ячеек определялась ширина зоны перемешивания исходя из условий $f_1(y_{\text{в}}) = 0,99$, $f_1(y_{\text{н}}) = 0,01$. Здесь f_1 — объемная концентрация первого вещества; $y_{\text{н}}, y_{\text{в}}$ — нижняя и верхняя границы зоны перемешивания. Полученные зависимости $y_{\text{н}}(x_i)$ и $y_{\text{в}}(x_i)$ (i —

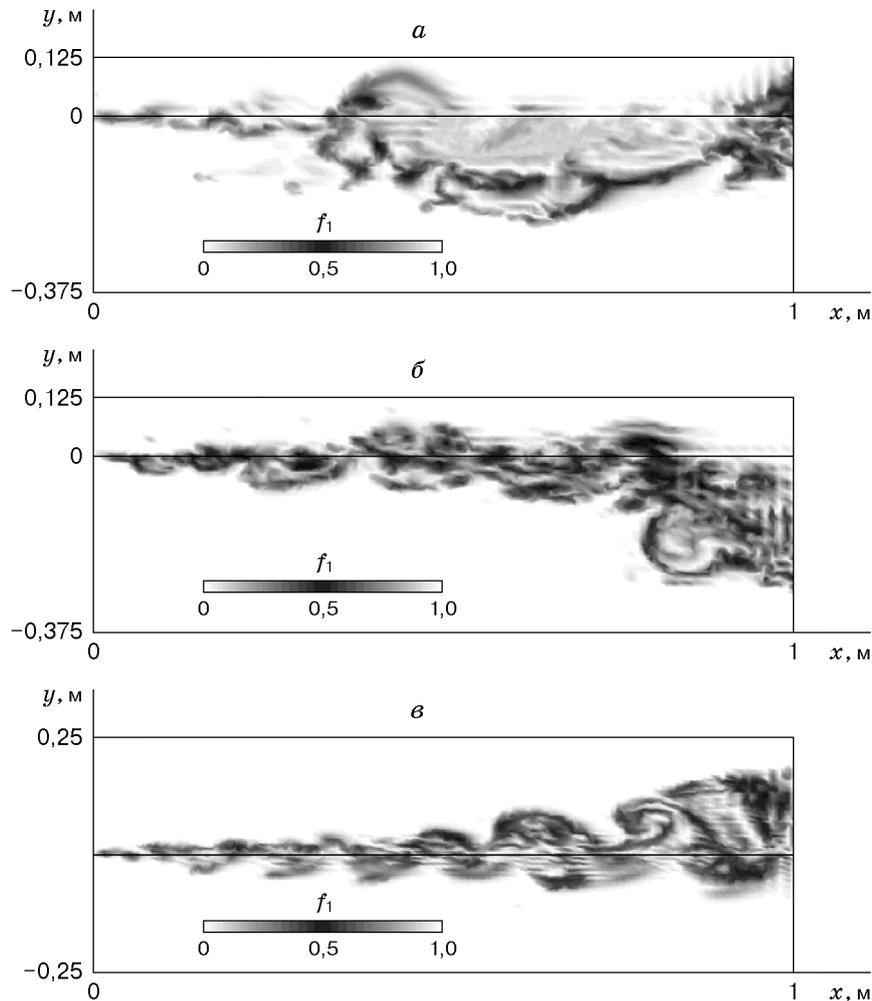


Рис. 2. Распределение объемной концентрации:

a — $t = 0,75$ с, $A = -0,75$; $б$ — $t = 0,75$ с, $A = 0$; $в$ — $t = 0,6$ с, $A = 0,75$

номер столбца) аппроксимировались прямыми, которые строились из условия минимума среднеквадратичного отклонения.

Значения величины автомодельного наклона $dL/dx = B_0$ и среднеквадратичного отклонения ΔB_0 приведены в табл. 2. Для того чтобы исключить влияние неавтомодельных участков зоны перемешивания вблизи «вибратора» и около правой границы, при обработке результатов необходимо отбросить у границ некоторое количество расчетных столбцов. Смещение левой Δ_L и правой Δ_R границ составляет 20 и 10 точек соответственно. Значения Δ_L , Δ_R выбирались из условия минимума отношения среднеквадратичного отклонения к среднему значению B_0 . Для того чтобы проверить влияние начальных условий и шагов сетки Δx , Δy на величину автомодельного наклона B_0 , был проведен дополнительный четвертый расчет с $A = 0,75$, в котором ширина турбулентной зоны минимальна и начальные условия могли бы оказывать наибольшее влияние на результат. При уменьшении шага сетки и амплитуды «вибратора» в 2 раза изменение величины автомодельного наклона не превышает погрешности обработки результатов расчетов (см. табл. 2).

В соответствии с (7) отношение эффективных скоростей в случае, когда число Атвуда A принимает значения с противоположными знаками, составляет

$$U_{01}/U_{02} = B_{02}/B_{01} = 1,9 \pm 0,2, \quad B_{01} = 0,20 \pm 0,02.$$

Таблица 2

Номер численного эксперимента	B_0	ΔB_0	B_0 [1]	A
1	0,19	0,02	0,22	0,75
2	0,37	0,04	0,41	-0,75
3	0,31	0,02	0,29	0
4	0,21	0,02	0,22	0,75

Исследуем соотношения (4)–(6) для эффективной скорости U_0 с точки зрения соответствия численным результатам. Формулы (4) не содержат зависимости от перепада плотности, поэтому $U_{01}/U_{02} = 1$. Из (5) следует $U_{01}/U_{02} = 3,58$. Исходя из зависимости $U_0 = U_0((\rho_1 + \rho_2)/2)$ получим $U_{01}/U_{02} = 3,7$. Из (6) следует $U_{01}/U_{02} = 1,9$, что удовлетворительно согласуется с результатами численных расчетов.

Для расчета интегральной скорости и скорости средней линии тока использовались профили избыточных скорости $\Delta U(\xi) = (U(\xi) - U_2)/(U_1 - U_2)$ и плотности $\Delta \rho(\xi) = (\rho(\xi) - \rho(0))/(\rho(1) - \rho(0))$, где $\xi = (y - y_b)/(y_n - y_b)$. Исходные профили скорости и плотности пересчитывались в зависимости от координаты ξ для всех значений x на автомодельном участке, а затем усреднялись по координате x . Полученные в результате профили $\Delta U(\xi)$ и $\Delta \rho(\xi)$ удовлетворительно согласуются с теорией Прандтля [3, 5], что показано на рис. 3. Теоретический профиль $\Delta U(\xi)$ приведен в координатах ξ' : $\Delta U(-1) = 0$, $\Delta U(1) = 1$. Во всех случаях турбулентное число Шмидта принято $Sc = 0,5$. Особенностью приведенных зависимостей является то, что профиль $\Delta U(\xi)$ сжат и сдвинут относительно профиля $\Delta \rho(\xi)$ с коэффициентом сжатия $S \simeq 0,64 \div 0,70$, значение которого не зависит от перепада плотности. Этот вывод согласуется с аналогичной зависимостью $S = (2/3)^{2-2Sc}$ по теории Прандтля.

Эффективную скорость (6) можно записать в виде

$$U_0 = U_2 + (U_1 - U_2) \left(\int \Delta U d\xi + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \int \Delta U \Delta \rho d\xi \right) / \left(1 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \int \Delta \rho d\xi \right).$$

В предельных случаях при стремлении отношения ρ_1/ρ_2 к нулю или к бесконечности функция $U_0 \rightarrow (U_1\rho_1 + U_2\rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ и принимает соответственно значения U_2 и U_1 . В табл. 3 приведены расчетные значения U_0/U_{\min} . При расчете U_0/U_{\min} для $A = 0,75$ в

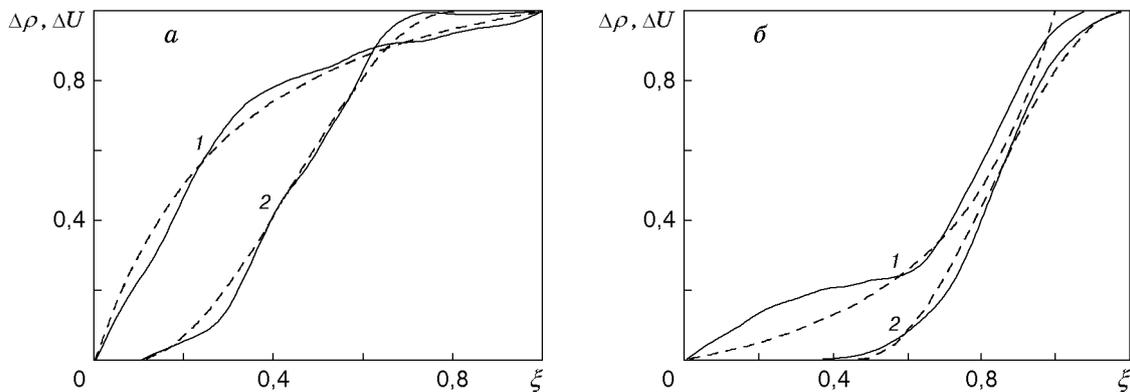


Рис. 3. Профили избыточных плотности ($\Delta \rho$) и скорости (ΔU):

а — $A = -0,75$, б — $A = 0,75$; сплошные линии — численные результаты настоящей работы, штриховые — расчет по теории Прандтля [3, 5]; 1 — плотность, 2 — скорость

Таблица 3

A	$\int \Delta U d\xi$	$\int \Delta \rho d\xi$	$\int \Delta U \Delta \rho d\xi$	U_0/U_{\min}
-0,75	0,55	0,72	0,49	3,0
0	0,50	—	—	4,0
0,75	0,20	0,34	0,14	5,8

качестве U_0 принималось значение на краю зоны турбулентного перемешивания, равное $U_2 + 0,9(U_1 - U_2)$.

Согласно (3) имеем $\alpha_u f(\rho_1/\rho_2) = 2B_0 U_0 / |U_1 - U_2|$. При $A = -0,75; 0; 0,75$ $\alpha_u f(\rho_1/\rho_2) = 0,37; 0,41; 0,39$, т. е. с точностью до погрешности расчетов $\alpha_u f(A) = \text{const} = \alpha_u$. Другими словами, в диапазоне чисел Атвуда $A = -0,75 \dots 0,75$ влияние перепада плотности на интенсивность роста зоны турбулентного перемешивания не проявляется.

Таким образом, результаты проведенных численных экспериментов удовлетворительно описываются зависимостью $L = (\alpha_u/2)|U_1 - U_2|(x/U_0)$, где $\alpha_u = 0,39 \pm 0,04$; $U_0 = \int_0^L \rho U dy / \int_0^L \rho dy$. Полученное значение константы α_u , характеризующей степень турбулентного перемешивания, согласуется с величиной $\alpha_u = 0,38$, полученной в работе [1] при обработке наблюдаемых в эксперименте картин течения.

Коэффициент гетерогенности в зоне турбулентного сдвигового перемешивания. В работах [6, 7] численно определяется коэффициент гомогенности смеси в зоне турбулентного перемешивания, возникающей в результате неустойчивости Рэлея — Тейлора, $\theta(\xi) = \langle f_1 f_2 \rangle / (\langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle) = 1 - k_r$, а также его среднее значение по зоне перемешивания

$$\Theta = \int_0^L \langle f_1 f_2 \rangle dy / \int_0^L \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle dy = 1 - \int_0^L k_r \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle dy / \int_0^L \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle dy.$$

Здесь f_1, f_2 — объемные концентрации веществ; $k_r = \langle f_1' f_1' \rangle / (\langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle)$ — значение коэффициента гетерогенности в точке; угловые скобки обозначают усреднение в плоскости, перпендикулярной направлению вектора ускорения; штрих — отклонение величины от среднего значения (пульсация).

По аналогии с [6] для профилей объемной концентрации рассчитан коэффициент гетерогенности в зоне турбулентного сдвигового перемешивания. Усреднение пульсаций объемной концентрации проводилось так же, как и при вычислении автомодельных профилей избыточных плотности и скорости. Значения объемной концентрации пересчитывались в зависимости от автомодельной координаты $\xi = y/L(x)$ и усреднялись вдоль текущего значения ξ .

Значения коэффициента гетерогенности составили $\bar{k}_r = 0,33; 0,23; 0,30$ при $A = -0,75; 0; 0,75$ соответственно. Значение коэффициента гетерогенности, рассчитанное по экспериментально измеренным в работе [8] пульсациям объемной концентрации, $\bar{k}_r = 0,3$ для $A = -0,75$. Следует отметить удовлетворительное согласие результатов двумерных расчетов с результатами трехмерных экспериментов [8] по определению степени гетерогенности турбулентной смеси.

В [6, 7] показано, что для гравитационного перемешивания автомодельный коэффициент гетерогенности составляет $k_r \approx 0,2$ при $\rho_1/\rho_2 = 1 \div 20$. Увеличение степени гетерогенности в случае сдвигового перемешивания обусловлено, по-видимому, более выраженной

вихревой структурой (см. рис. 2). Возникновение отчетливой вихревой структуры при сдвиговом перемешивании отмечалось также в [1, 8].

Заклучение. Предложена серия экспериментов, по результатам которых можно определить основные характеристики сдвигового турбулентного перемешивания.

Представлены результаты численного эксперимента по расчету интенсивности роста турбулентной зоны dL/dx при перепадах скорости $U_1/U_2 = 7$ и плотности $\rho_1/\rho_2 = 1/7$; 1; 7. Результаты двумерных расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [1, 8]. Получены автомодельные профили избыточной скорости $\Delta U = (U - U_2)/(U_1 - U_2)$ и плотности $\Delta\rho = (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2)$, которые описываются теорией Прандтля [3, 5].

Показано, что выражение для эффективной скорости $U_0 = \int_L \rho U dy / \int_L \rho dy$, предложенное в [3], соответствует численным результатам.

Определена константа α_u , характеризующая степень турбулентного перемешивания, значение которой составило $\alpha_u = 0,39 \pm 0,04$.

Установлено, что в диапазоне изменений числа Атвуда $A = -0,75 \dots 0,75$ скорость роста турбулентной зоны не зависит от перепада плотности. Для указанного диапазона $f(\rho_1/\rho_2) = 1$.

Во всех рассмотренных задачах вычислен коэффициент гетерогенности для полученной смеси. Для автомодельных задач сдвиговой и гравитационной турбулентности величина среднего по зоне перемешивания коэффициента гетерогенности в случае сдвиговой неустойчивости несколько больше, чем для гравитационной [6–8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brown G. L., Roshko A.** On density effects and large structure in turbulent mixing layers // J. Fluid Mech. 1974. V. 64. P. 775–816.
2. **Яковлевский О. В.** К вопросу о толщине зоны турбулентного перемешивания на границе двух потоков газа разной скорости и плотности // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 10. С. 153–155.
3. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960.
4. **Анучина Н. Н., Анучин М. Г., Волков В. И. и др.** Развитие Рэлей — Тейлоровской неустойчивости в системах с различной сжимаемостью среды // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 4. С. 3–17.
5. **Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. И.** Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука, 1974.
6. **Youngs D. L.** Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh — Taylor instability // Phys. Fluids. 1991. V. A3, N 5. P. 1312–1319.
7. **Linden P. F., Redondo J. M., Youngs D. L.** Molecular mixing in Rayleigh — Taylor instability // J. Fluid Mech. 1994. V. 265. P. 97–121.
8. **Bernal L., Roshko A.** Streamwise vortex structure in plane mixing layers // J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 499–525.

*Поступила в редакцию 8/IV 1998 г.,
в окончательном варианте — 6/XI 1998 г.*