

УДК 539.3:678.4

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ КОНСТАНТНЫХ ОБОБЩЕНИЙ ЗАКОНА ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. А. Адамов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

Для десяти моделей изотермического поведения материалов исследованы решения краевых задач для пяти экспериментально реализуемых видов однородного напряженно-деформированного состояния с неизменными направлениями главных осей. Выделены три модели, определяющие уравнения которых аналогичны закону Гука и справедливы в том же диапазоне отношения модулей сдвига и объемного сжатия. В этих моделях удельная энергия деформации может быть представлена в виде суммы энергий изменения формы и объема. Установлены области физически некорректного поведения трех других известных моделей.

**Введение.** Как известно, большими обратимыми деформациями в основном обладают эластомеры и аморфные полимеры в высокоэластичном состоянии. Экспериментальные данные по их механическому нагружению свидетельствуют о проявлении вязкоупругих и тиксотропных свойств. На практике этими эффектами часто можно пренебречь и в первом (равновесном) приближении использовать уравнения состояния упругого тела. Упругие модели также являются основой для построения более сложных определяющих уравнений.

Закон Гука для изотропного тела при малых изотермических деформациях содержит только две константы Ламе  $\mu$ ,  $\lambda$  ( $\mu$  — модуль сдвига) с областью допустимых значений  $\mu > 0$ ,  $3\lambda + 2\mu > 0$ . В [1] отмечается, что эти неравенства необходимы и достаточны для того, чтобы любая деформация сдвига приводила к напряжениям сдвига того же знака и объем локально увеличивался или уменьшался в соответствии с тем, положительно или отрицательно среднее напряжение. Они обеспечивают положительную работу при любой бесконечно малой деформации из естественной ненапряженной конфигурации, существование и единственность решения, а также достаточны для того, чтобы скорости распространения всех видов волн были действительными числами.

Многообразие мер конечных деформаций привело к появлению различных обобщений закона Гука для подмножеств указанной выше области изменения параметров Ламе (несжимаемые, слабосжимаемые и сжимаемые материалы). В настоящее время отсутствует полная система дополнительных неравенств [1–7], по строгости и достаточности аналогичная приведенным неравенствам для параметров Ламе. Например, используемые в теоретических приложениях модели полилинейного тела и линейного материала Мурнагана [3] удовлетворяют условиям Адамара [5, 6], но при растяжении образца из слабосжимаемого материала предсказывают физически неправдоподобное изменение объема [8].

Целью работы является определение простейших уравнений состояния, позволяющих удовлетворительно описать экспериментальные данные в широком диапазоне упругих постоянных при деформациях в интервале от  $-0,5$  до  $1$  при различных видах напряженно-деформированного состояния. В отличие от [9] особое внимание уделяется описанию объемных деформаций как одному из основных критериев при выборе уравнений состояния.

**Рассматриваемые виды напряженно-деформированного состояния.** Исследованы случаи однородного деформирования с неизменными направлениями главных осей деформации, соосных главным осям тензора напряжений Коши  $T$ . Примем декартову систему координат в качестве отсчетной для недеформированной конфигурации тела. Тогда идеализированный образец материала в виде куба с единичными длинами ребер и площадками, ориентированными по направлению главных осей тензора  $T$ , при деформировании преобразуется в параллелепипед с длинами ребер  $\lambda_i$  (здесь и ниже  $i = 1, 2, 3$ ), что полностью определяет его деформированное состояние.

Различают модели упругих и гиперупругих материалов [3]. Для упругих материалов напряженное состояние образца определяется непосредственно главными значениями  $t_i$  тензора напряжений Коши. Для несжимаемых гиперупругих материалов, определяемых заданием потенциала  $W$ , с точностью до неопределенного множителя Лагранжа  $p$  имеем [3, 6]

$$t_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + p = 2\lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2\lambda_i^{-2} \frac{\partial W}{\partial I_2} + p,$$

для сжимаемых гиперупругих материалов

$$t_i = \lambda_i I_3^{-1/2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i^2 I_3^{-1/2} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + (I_1 - \lambda_i^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) + 2I_3^{1/2} \frac{\partial W}{\partial I_3},$$

где  $I_i$  — главные инварианты меры деформации Коши — Грина, равные инвариантам меры деформаций Фингера:  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ ,  $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$ ,  $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2$ .

Как и в [9], рассматриваются пять видов напряженно-деформированного состояния:

1) гидростатическое напряженное состояние (ГНС):  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ,  $t_i = -q$  ( $q$  — гидростатическое давление);

2) одноосное деформированное состояние (ОДС):  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $t_1 = t_2$ ;

3) одноосное напряженное состояние (ОНС):  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $t_1 = t_2 = 0$ ;

4) симметричное двухосное напряженное состояние (СДНС):  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $t_1 = t_2$ ,  $t_3 = 0$ ;

5) несимметричное двухосное деформированное состояние (НДДС):  $\lambda_2 = 1$ ,  $t_3 = 0$  (в [9] вместо него анализируется симметричное двухосное деформированное состояние).

**Обобщения закона Гука.** Рассмотрены модели несжимаемых материалов ( $I_3 \equiv 1$ ) со следующими потенциалами:

— потенциалом Трелоара (“неогуково тело”) [10]

$$W_1 = (1/2)\mu(I_1 - 3); \quad (1)$$

— потенциалом Бартенева — Хазановича [11]

$$W_2 = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) \quad (2)$$

и модель несжимаемого материала Генки [3] с равным нулю углом подобия девиаторов

$$T_3 = 2\mu N + pE, \quad (3)$$

где  $N$  — тензор логарифмической меры деформаций, определенный в базисе главных осей деформации;  $E$  — единичный тензор.

Рассмотрены модели следующих сжимаемых материалов:

— материала Генки [3] с равной нулю фазой подобия девиаторов, при  $I_3 = 1$  совпадающего с (3):

$$T_4 = 2\mu N + \lambda \ln(\sqrt{I_3})E; \quad (4)$$

— линейного материала Мурнагана, определяемого двумя первыми членами разложения  $W$  в ряд по степеням инвариантов тензора деформаций Коши — Грина [3]:

$$W_5 = (1/8)(\lambda + \mu)(I_1 - 3)^2 - (1/2)\mu(I_2 - 2I_1 + 3); \quad (5)$$

— полилинейного материала (гармонического материала, материала Джона) [3]

$$W_6 = (1/2)\lambda(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 + \mu(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \quad (6)$$

( $\delta_i = \lambda_i - 1$  — главные относительные удлинения);

— материала, описываемого упрощенным законом Синьорини [3]

$$W_7 = \sqrt{I_3}[(1/2)(\lambda + \mu)(j_1^\times)^2 + \mu(1 - j_1^\times)] - \mu \quad (7)$$

( $j_1^\times = A_1 + A_2 + A_3 = (3 - I_2/I_3)/2$  — первый инвариант тензора деформаций Альманси;  $A_i = (1 - \lambda_i^{-2})/2$  — его главные значения).

Для слабосжимаемых материалов рассмотрены варианты общих потенциалов, зависящие от двух констант:

— вариант потенциала Пенга — Ландела [12], при  $I_3 = 1$  совпадающий с (1):

$$W_8 = (1/2)\mu(I_1 I_3^{-1/3} - 3) + (1/2)B\Theta^2 \quad (8)$$

( $B = \lambda + 2\mu/3$  — параметр, соответствующий модулю объемного сжатия при малых деформациях;  $\Theta = \sqrt{I_3} - 1$  — относительное изменение объема);

— вариант потенциала Черных — Шубиной [7], при  $I_3 = 1$  совпадающий с (2):

$$W_9 = 2\mu[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)I_3^{-1/6} - 3] + (1/2)B\Theta^2; \quad (9)$$

— вариант потенциала Рогового [13], при  $I_3 = 1$  соответствующий несжимаемому материалу (1):

$$W_{10} = (1/2)\mu(I_1 - I_3 - 2) + (1/8)(\lambda + 2\mu)(I_3 - 1)^2. \quad (10)$$

Материалы, описываемые (1)–(10), относятся к классу простых материалов [1]. Входящие в них две постоянные, имеющие физический смысл констант закона Гука при соответствующем предельном переходе, можно определить из опытов при однородных видах напряженно-деформированного состояния.

По терминологии К. Ф. Черных [7], модели (1)–(7) можно классифицировать по обобщенным тензорам деформации с действительным порядком  $n$  меры деформаций: (1)–(3) — несжимаемые “стандартные” материалы второго, первого и нулевого порядка соответственно; (4)–(7) — сжимаемые “стандартные” материалы нулевого, второго, первого и минус второго порядка соответственно. Модели слабосжимаемых материалов (8), (9) являются частными простейшими случаями второго и первого порядка соответственно определяющего уравнения [14], в котором используется тензор формоизменения.

Применение мер деформаций с дробными показателями  $n$  при построении моделей для реальных материалов [15] иногда упрощает вид определяющих уравнений, но при таком подходе к обобщению закона Гука показатель  $n$  является дополнительным параметром уравнения состояния. В (1)–(10) используются лишь некоторые его целочисленные значения.

**Анализ результатов.** При решении краевых задач для ОНС, СДНС и НДДС удовлетворение естественным граничным условиям позволяет выразить измеряемые в опытах напряжения формулами, содержащими только параметр  $\mu$  и устойчивыми к ошибкам измерения компонент деформаций. Численное исследование решений соответствующих краевых задач проведено для различных значений отношения  $\mu/B$ . Максимальное рассмотренное значение  $\mu/B = 1$  характеризует условно-пористые материалы (в линейной теории коэффициент Пуассона  $\nu = (3B - 2\mu)/(6B + 2\mu) = 0,125$ ), минимальное значение  $\mu/B = 0,001$  ( $\nu = 0,4995$ ) — компактные (монокристаллические) материалы.

При построении модели (10) в [13] указана область ее корректного применения (только слабосжимаемые материалы). Из анализа численных результатов определения объемных

Таблица 1

Модель	$t_1 = t_2 = t_3$
Закон Гука	$3B\delta_1$
$T_4$	$3B \ln \lambda_1$
$W_5$	$3B(\lambda_1^2 - 1)\lambda_1^{-1}/2$
$W_6$	$3B(\lambda_1 - 1)\lambda_1^{-2}$
$W_7$	$3BA_1[1 - (3 + \mu/B)A_1/6]$
$W_8$	$B\Theta$
$W_9$	$B\Theta$
$W_{10}$	$B(I_3 - 1)\lambda_1^3/2 + \mu(3\lambda_1^{-1} - 5\lambda_1^3 + 2\lambda_1^9)/3$

изменений для всех рассмотренных видов напряженно-деформированного состояния при  $\mu/B = 1$  следует справедливость этого положения. Поэтому модель (10) исследуется только в диапазоне слабой сжимаемости ( $\mu/B \ll 1$ ).

*Гидростатическое напряженное состояние.* В табл. 1 для закона Гука и моделей (4)–(10) приведены зависимости главных значений тензора напряжений ( $t_1 = t_2 = t_3$ ) от констант моделей и главного относительного удлинения  $\lambda_1$ . Из приведенных результатов следует, что зависимости для моделей (8), (9) совпадают. Графики зависимостей для моделей (4) и (5), (6) и (7) практически совпадают в реальном диапазоне давлений для  $\mu/B = 1,0 \div 0,001$ . Модель (10), в отличие от других, в области сжатия дает “мягкую” (с отрицательной второй производной) зависимость  $t_1(\Theta)$ .

Зависимость  $t_1(\Theta)$  от параметра  $\mu$  для моделей (7), (10) существенна лишь при конечных деформациях, что позволяет непосредственно определить параметр  $B$  для моделей (4)–(10) по начальному участку кривой  $t_1(\Theta)$  независимо от  $\mu$ .

*Одноосное деформированное состояние.* В табл. 2 приведены зависимости  $t_1(\lambda_3) = t_2(\lambda_3)$  и  $t_3(\lambda_3)$ . Зависимости  $t_3(\lambda_3)$  для моделей (5), (10) совпадают, зависимости  $t_1(\lambda_3)$  различаются. Из сравнения зависимостей  $t_3/B \sim \Theta$  при ОДС с зависимостью  $t_1/B \sim \Theta$  при ГНС в одном и том же диапазоне напряжений следует, что степень нелинейности кривых  $t_3/B \sim \Theta$  больше.

При ОДС жесткость на сжатие для моделей (4)–(10) определяется параметрами  $\mu$  и  $B$  во всем диапазоне деформаций, поэтому для определения  $B$  по кривой сжатия необходимо

Таблица 2

Модель	$t_1 = t_2$	$t_3$
Закон Гука	$\lambda\delta_3$	$(\lambda + 2\mu)\delta_3$
$T_4$	$\lambda \ln \lambda_3$	$(\lambda + 2\mu) \ln \lambda_3$
$W_5$	$\lambda(\lambda_3^2 - 1)\lambda_3^{-1}/2$	$(\lambda + 2\mu)(\lambda_3^2 - 1)\lambda_3/2$
$W_6$	$\lambda(\lambda_3 - 1)\lambda_3^{-1}$	$(\lambda + 2\mu)(\lambda_3 - 1)$
$W_7$	$\lambda A_3 + (\lambda + \mu)A_3^2/2$	$(\lambda + 2\mu)A_3 - 3(\lambda + \mu)A_3^2/2$
$W_8$	$B\Theta + \mu I_3^{-5/6}(\lambda_3^2 - 1)/3$	$B\Theta + 2\mu I_3^{-5/6}(\lambda_3^2 - 1)/3$
$W_9$	$(B - 2\mu\lambda_3^{-4/3}/3)\Theta$	$(B + 4\mu\lambda_3^{-4/3}/3)\Theta$
$W_{10}$	$(\lambda + 2\mu)(I_3 - 1)\lambda_3/2 + \mu(\lambda_3^{-1} - \lambda_3)$	$(\lambda + 2\mu)(\lambda_3^2 - 1)\lambda_3/2$

Таблица 3

Модель	Зависимость $\lambda_1 \sim \lambda_3$	$t_3$
Закон Гука	$\delta_1 = -\nu\delta_3$	$E\delta_3$
$W_1$	$\lambda_1 = \lambda_3^{-1/2}$	$\mu(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)$
$W_2$	$\lambda_1 = \lambda_3^{-1/2}$	$2\mu(\lambda_3 - \lambda_1)$
$T_3$	$\lambda_1 = \lambda_3^{-1/2}$	$3\mu \ln \lambda_3 = E \ln \lambda_3$
$T_4$	$\ln \lambda_1 = -\nu \ln \lambda_3$	$E \ln \lambda_3$
$W_5$	$\lambda_1^2 - 1 = -\nu(\lambda_3^2 - 1)$	$\mu\lambda_1^{-2}\lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)$
$W_6$	$\lambda_1 - 1 = -\nu(\lambda_3 - 1)$	$2\mu\lambda_1^{-2}(\lambda_3 - \lambda_1)$
$W_7$	$\lambda_1 = (1 + 4\nu A_3 + A_3^2)^{-1/4}$	$2[\mu - (\lambda + \mu)j_1^*](A_3 - A_1)$
$W_8$	$B\Theta + \mu I_3^{-5/6}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)/3 = 0$	$\mu I_3^{-5/6}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)$
$W_9$	$B\Theta + 2\mu I_3^{-2/3}(\lambda_1 - \lambda_3)/3 = 0$	$2\mu I_3^{-2/3}(\lambda_3 - \lambda_1)$
$W_{10}$	$(\lambda + 2\mu)(I_3 - 1) + 2\mu(\lambda_1^{-2}\lambda_3^{-2} - 1) = 0$	$\mu I_3^{-1/2}(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)$

знать  $\mu$ . С уменьшением отношения  $\mu/B$  в реальном диапазоне деформаций напряженное состояние стремится к гидростатическому. При этом главные напряжения различаются на величину порядка  $2\mu/B$ . Поэтому из экспериментов для ОДС слабосжимаемых материалов можно определить параметр  $B$ .

*Одноосное напряженное состояние.* Зависимости между  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ , полученные из условия несжимаемости или из естественного граничного условия  $t_1 = 0$ , а также выражения для  $t_3$  приведены в табл. 3. На рис. 1 для  $\mu/B = 1$  (рис. 1,а) и  $\mu/B = 0,001$  (рис. 1,б,в) приведены кривые объемных изменений  $3B\Theta/E \sim \delta_3$  ( $E = 9\mu B/(\mu + 3B)$  — параметр, соответствующий модулю Юнга в линейной теории упругости). Номера кривых на рис. 1–3 соответствуют номеру модели. Характер кривых на рис. 1,в свидетельствует о том, что при  $\mu/B = 0,001$  модели (5)–(7) дают физически неверное описание объемных изменений.

*Исследование зависимостей  $\Theta(\delta_3)$  для моделей (5)–(7).* 1. Линейный материал Мурнагана (5). Кривая объемных изменений  $\Theta(\delta_3)$  в области растяжения имеет максимум (ниже для найденных выражений осевой деформации в скобках указаны соответствующие числовые значения  $\delta_3$  для  $\mu/B = 0,001$ ) при  $\lambda_3 = [1 - 2\mu/(3B)]^{-1/2}$  ( $\delta_3 = 3,335 \cdot 10^{-4}$ ), затем она меняет знак при  $\lambda_3 = [2,25 + 6\mu/(3B - 2\mu)]^{1/2} - 0,5$  ( $\delta_3 = 6,67 \cdot 10^{-4}$ ) и достигает предельного физически допустимого значения  $\Theta = -1$  при  $\lambda_3 = (1 + 1/\nu)^{1/2}$  ( $\delta_3 = 0,7326$ ), что соответствует нулевому объему образца и обращению в бесконечность “истинных” напряжений  $t_3$ . При  $\delta_3 > (1 + 1/\nu)^{1/2}$  площадь поперечного сечения образца и его объем становятся отрицательными.

2. Полилинейный материал (6). Кривая объемных изменений  $\Theta(\delta_3)$  в области растяжения имеет максимум при  $\delta_3 = (1 - 2\nu)/(3\nu)$  ( $\delta_3 = 6,673 \cdot 10^{-4}$ ), меняет знак при  $\delta_3 = 1,5 + (1 - 2\nu)/\nu - [2,25 + (1 - 2\nu)/\nu]^{1/2}$  ( $\delta_3 = 13,348 \cdot 10^{-4}$ ) и имеет минимум  $\Theta = -1$  (нулевой объем) при  $\delta_3 = 1/\nu$  ( $\delta_3 = 2,002$ ). Кривая “истинных” напряжений при этом также имеет разрыв второго рода, но при  $\delta_3 > 1/\nu$  площадь поперечного сечения и объем образца являются положительными величинами.

3. Упрощенный материал Синьорини (7). Кривая объемных изменений немонотонна в двух диапазонах  $\mu/B$ :  $\nu > (177^{1/2} - 1)/32 \simeq 0,3845$  ( $\mu/B < 0,2503$ );  $\nu < -(177^{1/2} + 1)/32 \simeq -0,4470$  ( $\mu/B > 5,1375$ ). Практическое значение имеет первый диапазон, в котором кривая  $\Theta(\delta_3)$  с увеличением степени сжатия имеет минимум при  $A_3 = [1 - 8\nu + (64\nu^2 + 8\nu - 11)^{1/2}]/6$

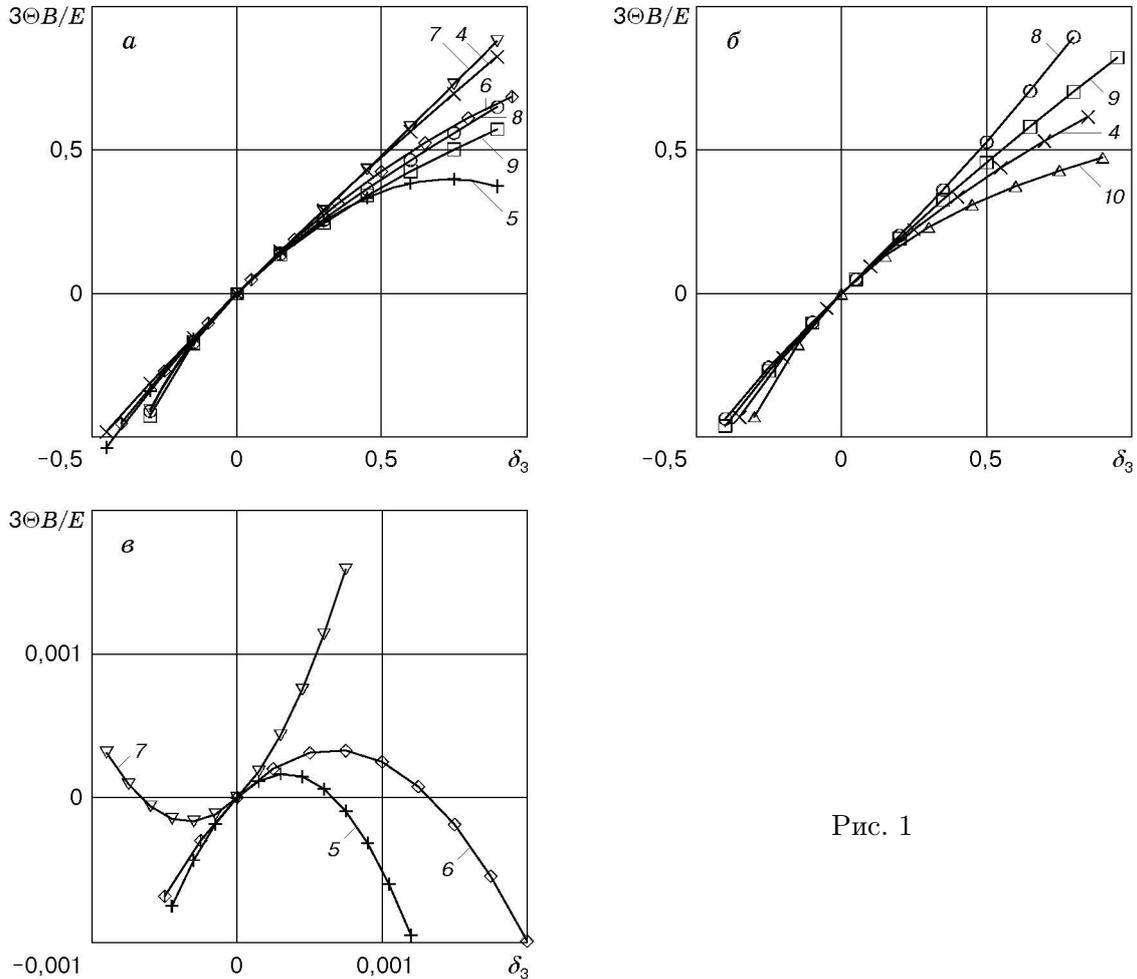


Рис. 1

( $\delta_3 = -3,333 \cdot 10^{-4}$ ), а затем возрастает до максимума при  $A_3 = [1 - 8\nu - (64\nu^2 + 8\nu - 11)^{1/2}] / 6$  ( $\delta_3 = -0,4223$ ).

На рис. 2,а для  $\mu/B = 0,001$  показаны безразмерные зависимости  $t_3^*/E \sim \delta_3$ , где  $t_3^* = t_3 \lambda_1^2$  — компонента “условного” напряжения ( $t_i^* = t_i I_3^{1/2} / \lambda_i$ ), отнесенного к площади поперечного сечения в недеформированной конфигурации, не зависящая от описания объемных изменений.

Две зависимости, приведенные в табл. 3 для каждого материала, позволяют формально определить оба независимых параметра любой представленной модели. Для несжимаемых материалов они позволяют оценить точность выполнения условия  $\lambda_1^2 \lambda_3 = 1$  и определить  $\mu$  при аппроксимации кривой  $t_3(\lambda_3)$ .

Для слабосжимаемых материалов определение параметров  $B, \lambda, \nu$  при ОНС требует высокой точности измерения поперечных и продольных удлинений (для точного определения малых объемных изменений). Поэтому обычно  $\lambda_1(\lambda_3)$  вычисляют приближенно из условия несжимаемости. При известной зависимости  $\lambda_1(\lambda_3)$  параметр  $\mu$  (или параметр  $E = 3\mu$  для принятой гипотезы несжимаемости) в (4), (8)–(10) определяется так же, как для несжимаемых материалов. Следствием такого подхода являются относительные ошибки порядка  $2\mu/B$  при аппроксимации  $t_3(\lambda_3)$ . Аналогично можно определить параметры модели при СДНС и НДДС. Однако эксперименты, в которых реализуются эти напряженные состояния, проводятся редко.

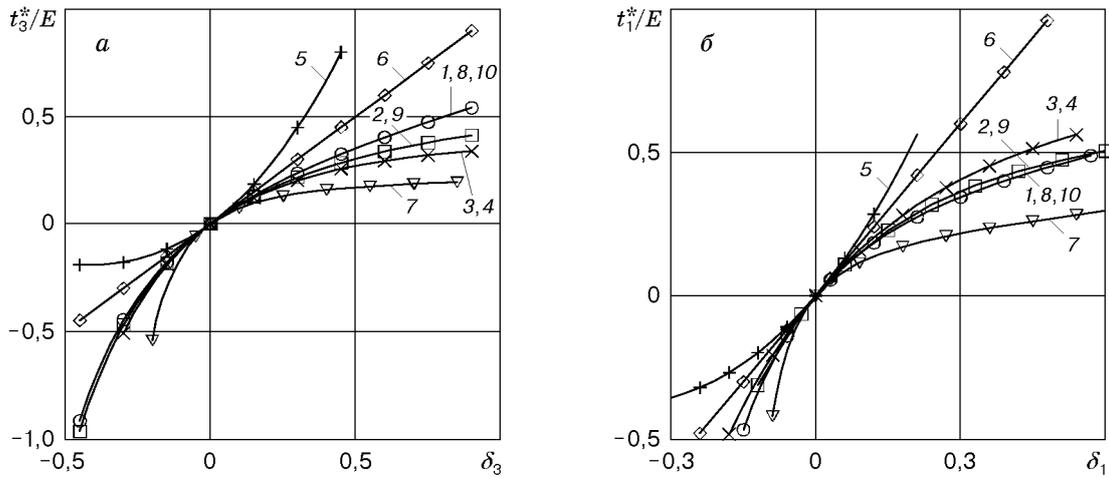


Рис. 2

Таблица 4

Модель	Зависимость $\lambda_3 \sim \lambda_1$	$t_1 = t_2$
Закон Гука	$\delta_3 = -2\lambda\delta_1/(\lambda + 2\mu)$	$6\mu B\delta_1/(\lambda + 2\mu)$
$W_1$	$\lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$	$\mu(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)$
$W_2$	$\lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$	$2\mu(\lambda_1 - \lambda_3)$
$T_3$	$\lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$	$2\mu \ln(\lambda_1/\lambda_3)$
$T_4$	$\ln \lambda_3 = \ln \lambda_1(4\mu - 6B)/(4\mu + 3B)$	$2\mu \ln(\lambda_1/\lambda_3)$
$W_5$	$\lambda_3^2 - 1 = -2\lambda(\lambda_1^2 - 1)/(\lambda + 2\mu)$	$\mu\lambda_3^{-1}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)$
$W_6$	$\lambda_3 - 1 = -2\lambda(\lambda_1 - 1)/(\lambda + 2\mu)$	$2\mu\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}(\lambda_1 - \lambda_3)$
$W_7$	$[2\lambda/(\lambda + \mu)]j_1^x + (j_1^x)^2 + 4[\mu/(\lambda + \mu) - j_1^x]A_3 = 0$	$2[\mu - (\lambda + \mu)j_1^x](A_1 - A_3)$
$W_8$	$B\Theta + 2\mu I_3^{-5/6}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)/3 = 0$	$\mu I_3^{-5/6}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)$
$W_9$	$B\Theta + 4\mu I_3^{-2/3}(\lambda_1 - \lambda_3)/3 = 0$	$2\mu I_3^{-2/3}(\lambda_1 - \lambda_3)$
$W_{10}$	$(\lambda + 2\mu)(I_3 - 1) + 2\mu(\lambda_1^{-4} - 1) = 0$	$\mu I_3^{-1/2}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)$

*Симметричное двухосное напряженное состояние.* Зависимости между  $\lambda_3$  и  $\lambda_1$  и формулы для напряжений  $t_1 = t_2$  приведены в табл. 4. Результаты численного анализа при  $\mu/B = 0,001$  аналогичны результатам, полученным при исследовании ОНС: для модели (5) не обнаружены действительные корни  $\delta_3$  в области  $\delta_1 > 0,24$ ; кривые объемных изменений  $3B\Theta/E \sim \delta_1$  для моделей (5)–(7) аналогичны соответствующим кривым  $3B\Theta/E \sim \delta_3$  для ОНС. На рис. 2,б для  $\mu/B = 0,001$  приведены зависимости  $t_1^*/E \sim \delta_1$ , из которых следует существенное различие нелинейного поведения при ОНС и СДНС (в линейной модели эти зависимости различаются только масштабным коэффициентом).

*Несимметричное двухосное деформированное состояние.* Для несжимаемых материалов НДС отождествляется с состоянием чистого сдвига [10]. Зависимости между  $\lambda_3$  и  $\lambda_1$  и формулы для  $t_1$  и  $t_2$  приведены в табл. 5. В этом случае при  $\mu/B = 0,001$ , так же как и при ОНС, для модели (5) отсутствуют действительные корни  $\delta_3$  в области  $\delta_1 > 0,42$ ; кривые  $\Theta(\delta_1)$  для моделей (5)–(7) аналогичны.

Информативность НДС для выбора моделей существенно повышается, если в экспериментах измерять обе ненулевые компоненты напряжения, поскольку помимо сильной

Таблица 5

Модель	Зависимость $\lambda_3 \sim \lambda_1$	$t_1/t_2$
Закон Гука	$\delta_3 = -\lambda\delta_1/(\lambda + 2\mu)$	$\frac{4\mu\delta_1(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)}{2\mu\delta_1\lambda/(\lambda + 2\mu)}$
$W_1$	$\lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$	$\mu(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)/[\mu(1 - \lambda_3^2)]$
$W_2$	$\lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$	$2\mu(\lambda_1 - \lambda_3)/[2\mu(1 - \lambda_3)]$
$T_3$	$\lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$	$4\mu \ln \lambda_1/(2\mu \ln \lambda_1)$
$T_4$	$\ln \lambda_3 = \ln \lambda_1(2\mu - 3B)/(4\mu + 3B)$	$2\mu \ln (\lambda_1/\lambda_3)/[2\mu \ln (1/\lambda_3)]$
$W_5$	$\lambda_3^2 - 1 = -\lambda(\lambda_1^2 - 1)/(\lambda + 2\mu)$	$\mu\lambda_1\lambda_3^{-1}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)/[\mu\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}(1 - \lambda_3^2)]$
$W_6$	$\lambda_3 - 1 = -\lambda(\lambda_1 - 1)/(\lambda + 2\mu)$	$2\mu\lambda_3^{-1}(\lambda_1 - \lambda_3)/[2\mu\lambda_1^{-1}\lambda_3^{-1}(1 - \lambda_3)]$
$W_7$	$\frac{2\lambda}{\lambda + \mu} j_1^\times + (j_1^\times)^2 + 4\left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} - j_1^\times\right) A_3 = 0$	$\frac{2[\mu - (\lambda + \mu)j_1^\times](A_1 - A_3)}{-2[\mu - (\lambda + \mu)j_1^\times]A_3}$
$W_8$	$B\Theta + \mu I_3^{-5/6}(2\lambda_3^2 - \lambda_1^2 - 1)/3 = 0$	$\mu I_3^{-5/6}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)/[\mu I_3^{-5/6}(1 - \lambda_3^2)]$
$W_9$	$B\Theta + 2\mu I_3^{-2/3}(2\lambda_3 - \lambda_1 - 1)/3 = 0$	$2\mu I_3^{-2/3}(\lambda_1 - \lambda_3)/[2\mu I_3^{-2/3}(1 - \lambda_3)]$
$W_{10}$	$(\lambda + 2\mu)(I_3 - 1) + 2\mu(\lambda_1^{-2} - 1) = 0$	$\mu I_3^{-1/2}(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)/[\mu I_3^{-1/2}(1 - \lambda_3^2)]$

зависимости  $t_1^*/t_2^*$  от  $\mu/B$  и  $\delta_1$  имеется существенная зависимость от используемой меры деформации. На рис. 3 для различных моделей приведены зависимости  $t_1^*/t_2^* \sim \delta_1$  для  $\mu/B = 1$  (рис. 3,а) и  $\mu/B = 0,001$  (рис. 3,б). Кривые для моделей (5)–(7) на рис. 3,б не приведены по указанным выше причинам.

Для рассмотренных несжимаемых материалов (и других “стандартных” несжимаемых материалов [7]) порядок  $n$  можно определить как

$$n = \left. \frac{d(t_1/t_2)}{d\delta_1} \right|_{\delta_1=0}$$

Для моделей (4), (8)–(10) при  $\mu/B \ll 1$  эта формула может быть использована с погрешностью, пропорциональной  $\mu/B$ . В [7] величину  $n$  предлагается определять как параметр аппроксимации экспериментальных данных с использованием методики “спрямляющих координат”.

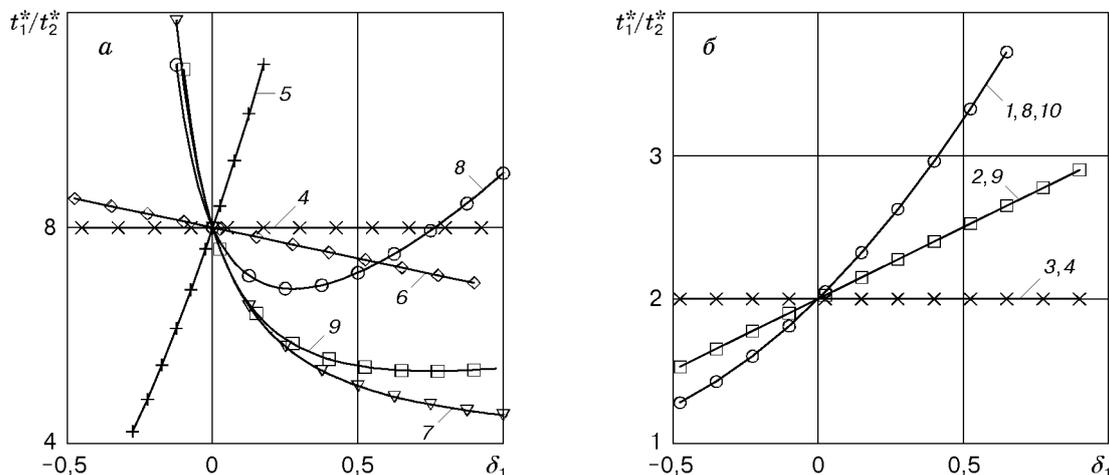


Рис. 3

Анализ аналитических зависимостей  $\Theta(\delta_1)$  для моделей (5)–(7) при СДНС и НДДС имеет особенности, но его результаты аналогичны результатам анализа при ОНС.

**Выводы.** Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Лучшими обобщениями закона Гука на область конечных деформаций во всем исследованном диапазоне  $\mu/B$  являются модели (4), (8), (9). Преимущество модели (8) по сравнению с моделями (4), (9) заключается в том, что в ней не требуется приведения к главным осям деформации при решении краевых задач с произвольным видом напряженно-деформированного состояния. При  $\mu/B \rightarrow 0$  модели (4), (8), (9) переходят соответственно в модели (3), (1), (2).

2. Модели сжимаемых материалов (5)–(7) применимы в ограниченном диапазоне параметра  $\mu/B$ . При конечных деформациях эти модели непригодны для описания поведения монолитных резиноподобных материалов ( $\mu/B \ll 1$ ) из-за физически неверного описания объемных изменений.

3. Общим свойством моделей (5)–(7), (10), применимых в ограниченном диапазоне параметра  $\mu/B$ , является невозможность разделения удельной потенциальной энергии деформации на энергию изменения формы и энергию изменения объема (или пренебрежение последней в моделях несжимаемых материалов).

4. При выборе модели экспериментально измеренное при НДДС отношение приложенного напряжения к удерживающему  $t_1^*/t_2^*$  позволяет оценить порядок наилучшей обобщенной меры деформации для построения простейшей модели поведения несжимаемых и слабосжимаемых материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Труделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
2. **Хилл Р.** Об определяющих неравенствах для простых материалов // Механика. 1969. № 4. С. 94–118.
3. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
4. **Черных К. Ф.** Определяющие неравенства упругих тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили). М.: Наука, 1972. С. 623–633.
5. **Гурвич Е. Л.** Условие Адамара в нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 1. С. 45–51.
6. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
7. **Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.** Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.
8. **Адамов А. А.** Описание вязкоупругого поведения несжимаемых и слабосжимаемых материалов при конечных деформациях: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1979.
9. **Levinson M., Burgess I. W.** A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials // Intern. J. Mech. Sci. 1971. V. 13. P. 563–572.
10. **Трелоар Л.** Физика упругости каучука. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
11. **Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н.** О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекуляр. соединения. 1960. Т. 2, № 1. С. 20–28.
12. **Peng S. T. J., Landel R. F.** Stored energy function and compressibility of compressible rubber-like materials under large strain // J. Appl. Phys. 1975. V. 46, N 6. P. 2599–2604.

13. **Роговой А. А.** Уравнение состояния и функционал для слабосжимаемых и несжимаемых материалов при конечных деформациях // Механика эластомеров: Сб. науч. тр. Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1988. С. 72–88.
14. **Пальмов В. А.** Колебания упругопластических тел. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1976.
15. **Ogden R.W.** Large deformation of isotropic elasticity — on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids // Rubber Chem. Technol. 1973. V. 46, N 2. P. 398–416.

*Поступила в редакцию 21/III 2001 г.*

---