Теплофизика и аэромеханика, 2018, том 25, № 4

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 532.5

Математическая модель осесимметричного стационарного течения в слоистых структурах с конечной и бесконечно большой объемной вязкостью

С.М. Аульченко[1,2], Е.С. Вячкин[3], Е.А. Вячкина[3], В.О. Каледин[3]

[1]*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

[2]*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет*

[3]*Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета*

E-mail: aulchsm@mail.ru

Предложена математическая модель течения вязкой несжимаемой среды, включающая малый параметр для регуляризации некорректной задачи. По аналогии с задачами деформирования осесимметричных слоистых структур, содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои и течения вязкой слоистой жидкости, разработан метод, позволяющий по единому алгоритму рассчитывать поля скоростей, напряжений и других характеристик формуемого слоистого композитного материала. Приведен пример расчета течения связующего при пултрузионном формовании.

Ключевые слова: пултрузионное формование, течение вязкой жидкости, математическое моделирование, композитные материалы.

Введение

В предыдущих работах авторов, посвященных исследованию волновых процессов в анизотропных оболочках вращения при их обтекании жидкостью, решались связанные задачи упругого деформирования стенок канала и оболочек тел вращения при их взаимодействии с потоком вязкой несжимаемой жидкости [1]. Одной из трудностей при решении этих задач было объединение в единый комплекс программ расчета течения жидкости и упругого деформирования, разработанных в разных средах программирования и использующих различные способы дискретизации задачи и алгоритмы получения решения. Этапом на пути решения этих проблем явились результаты, представленные в работе [2]. Здесь был реализован регуляризационный подход и построена математическая модель течения вязкой сжимаемой среды с обратимым реологическим уравнением, в предельном случае переходящим в реологическое уравнение несжимаемой ньютоновой жидкости. Такой подход дает возможность использования наиболее общей вариационной постановки задачи и построения конечно-элементной модели течения вязкой среды. В работе [3], являющейся развитием подхода [2], были представлены модель и алгоритм решения задачи статического деформирования осесимметричных слоистых структур, содержащих упругие ортотропные и упругие объемно-несжимаемые слои, и развит метод решения некорректной по Тихонову задачи. В качестве параметра регуляризации была выбрана величина, обратная модулю объемного сжатия. При устремлении к нулю этого параметра получим среду с бесконечным объемным модулем упругости, т.е. объемно-несжимаемую. Показано, что предельный переход обеспечивает получение решения исходной задачи. Однако подобный метод регуляризации применим не только для статического деформирования, но и для вязкого течения объемно-несжимаемой жидкости. Если в модели, предложенной в работе [3], заменить деформации на скорости деформаций, а перемещения на скорости, то в осесимметричной постановке задачи деформирования композитных структур и течения вязкой среды (в том числе и вязкой слоистой среды) аналогичны с математической точки зрения. В основе этого подхода лежит аналогия между гидродинамикой линейно-вязкой среды и теорией упругости. С макроскопической точки зрения тело рассматривается как сжимаемая среда с двумя коэффициентами вязкости — сдвиговой и объемной. При этом тензору деформации в теории упругости соответствует тензор скорости деформаций в теории вязкого течения, модулю сдвига соответствует коэффициент сдвиговой вязкости, а модулю всестороннего сжатия — коэффициент объемной вязкости. Примером такого течения может служить течение в фильере при пултрузионном формовании.

В настоящей работе демонстрируются возможности предложенной модели и метода на примере моделирования стационарного вязкого течения связующего в осесимметричных слоистых структурах, содержащих ортотропные слои с конечной и бесконечно большой объемной вязкостью.

1. Постановка задачи

Рассмотрим течение объемно-несжимаемой вязкой среды, которое происходит в зазоре между двумя соосными поверхностями вращения (рис. 1). Определяющее соотношение течения несжимаемой жидкости имеет вид [4]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu^* \dot{e}_{ij}, \tag{1}$$

где $p = \sigma_{ii}/3$ — гидростатическое давление, μ^* — коэффициент сдвиговой вязкости, $\dot{e}_{ij}$ — тензор скоростей деформации. Соотношение (1) не обращается, вследствие чего задача некорректна по Тихонову. Для её регуляризации заменим (1) уравнением течения сжимаемой жидкости

$$\sigma_{ij} = \xi\delta_{ij}\dot{e}_{kk} + 2\mu^* \dot{e}_{ij}, \tag{2}$$

где дополнительно к коэффициенту μ^* введена постоянная Ламе ξ. При переходе от сжимаемой среды к несжимаемой жидкости параметр ξ стремится к бесконечности, дивергенция векторного поля скоростей стремится к нулю, а давление определяется, исходя из предела шаровой части тензора напряжений. Коэффициент ξ, характеризующий объемную вязкость, является регуляризующим параметром. Благодаря его введению, соотношение (2) обратимо и позволяет выразить скорости деформаций через напряжения в виде линейного выражения с симметричной положительно определенной матрицей коэффициентов. Тензор скоростей определяется соотношением

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}). \tag{3}$$

В силу (2) соотношение между скоростями деформаций и напряжениями в декартовой системе координат записывается следующим образом:

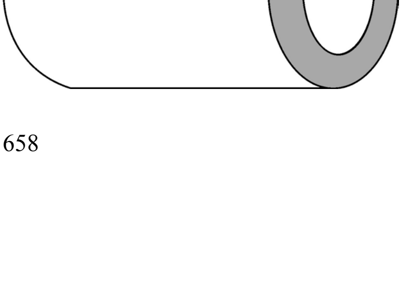

Рис. 1. Расчетная область.

$$\begin{cases} (\xi + 2\mu)\dot{e}_{xx} + \xi\dot{e}_{yy} + \xi\dot{e}_{zz} = \sigma_{xx}, \\ \xi\dot{e}_{xx} + (\xi + 2\mu)\dot{e}_{yy} + \xi\dot{e}_{zz} = \sigma_{yy}, \\ \xi\dot{e}_{xx} + \xi\dot{e}_{yy} + (\xi + 2\mu)\dot{e}_{zz} = \sigma_{zz}, \\ \tau_{ij} = 2\mu\dot{e}_{ij}. \end{cases} \quad (4)$$

На левой и правой границах расчетной области заданы однонаправленные вдоль оси симметрии силы. На боковых границах ставятся условия прилипания, а кроме того, на правой границе задается условие постоянства скорости.

Для регуляризации модели вязкой несжимаемой жидкости запишем соотношение (3) в матричном виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\xi,\, \mu^*)\dot{\mathbf{e}}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{e}}$ — матрицы-столбцы:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{xz} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_x & \dot{e}_y & \dot{e}_z & \dot{e}_{xy} & \dot{e}_{yz} & \dot{e}_{xz} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Тогда матрица **F** имеет вид

$$\mathbf{F}(\xi, \mu^*) = \begin{bmatrix} \xi + 2\mu^* & \xi & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi + 2\mu^* & \xi & 0 & 0 & 0 \\ \xi & \xi & \xi + 2\mu^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^* \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При стремлении ξ к бесконечности будем считать сдвиговой модуль μ^* постоянной величиной, а ξ — варьируемой от начального значения ξ_0 до бесконечности. Введем малый параметр β, стремящийся к нулю при бесконечно большом значении ξ. Тогда, согласно (6), имеем $\mathbf{F}(\xi, \mu^*) = \mathbf{F}(\xi_0, \mu^*) + \mathbf{J}/\beta$, где $\mathbf{J} = \mathbf{F}(\xi_0,\, 0)$, $1/\beta = \xi - \xi_0$. Предельный переход, как показано в работе [3], обеспечивает получение решения задачи для среды с бесконечным параметром ξ, т.е. для объемно-несжимаемой среды. На основе (5) формируется функционал Лагранжа

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \dot{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{F}(\xi_0,\, \mu^*) + \frac{1}{\beta}\mathbf{J} \right)^{\mathrm{T}} \dot{\mathbf{e}}\, dV - \int_S (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\, d\mathbf{s}, \quad (7)$$

где V и S — объем и площадь поверхности расчетной области. Заметим, что использование такой вариационной постановки позволяет разделить граничные условия на главные (кинематические) и естественные (в напряжениях). Минимизация функционала (7) в рамках метода конечных элементов позволяет перейти к системе алгебраических уравнений, решение которой находится итерационным методом.

2. Результаты расчетов

Для реализации предложенного подхода был разработан программный комплекс в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» [5]. Ниже приведен пример решения задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя соосными цилиндрами, длиной 0,01 м. Радиус внутренней трубы составляет 0,01 м, радиус внешней трубы — 0,012 м. Между двух вложенных труб происходит течение вязкой несжимаемой жидкости с динамической вязкостью 18 Па·с.

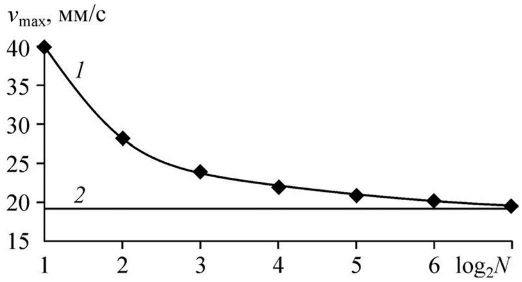

Рис. 2. Максимальные значения осевой скорости.
1 — расчет, *2* — аналитическое решение.

По результатам расчетов исследована сходимость решения задачи течения вязкой несжимаемой жидкости. На рис. 2 приведена зависимость значения максимальной осевой скорости от числа конечных элементов (N) по толщине разбиения цилиндра для значений силы,

Рис. 3. Поле меридиональных напряжений.

приложенной на левой $(F_1 = 1\ \text{Н})$ и правой $(F_2 = 0\ \text{Н})$ границах. Приведено также значение максимальной осевой скорости, полученное из аналитического решения. При сгущении сетки наблюдается сходимость решения для скорости к предельному значению, которое отличается от аналитического не более чем на 0,5 %.

На рис. 3 приведено поле меридиональных напряжений, виден фронт смены знака напряжений. Зона положительных напряжений, отмеченная штриховкой, опасна возможностью образования каверн, что неизбежно ухудшает качество формуемого изделия.

Анализ показал, что управление с помощью сил, приложенных на левой и правой границах, позволяет снизить растягивающие напряжения. Предложенная математическая модель позволяет для заданной скорости пултрузии определить давление на входе в канал, обеспечивающее отсутствие кавитационных зон.

Выводы

Предложен подход, который позволяет с помощью единого алгоритма решать задачи, математические модели которых содержат особенности. К ним относятся задачи расчета напряженно-деформированного состояния изделий из объемно-несжимаемого материала, для которого коэффициент Пуассона равен 0,5, и задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости, для которой модуль объемной вязкости стремится к бесконечности. Представленные модели необходимы для описания деформируемых слоистых структур из полимерных композиционных материалов, широко распространенных в технике в качестве элементов силовых конструкций. Использование разработанных моделей позволит обеспечить прочность таких силовых элементов в эксплуатации и устранение дефектов при их изготовлении.

Список литературы

1. **Аульченко С.М., Каледин В.О., Шпакова Ю.В.** Вынужденные колебаний оболочек тел вращения, обтекаемых вязкой жидкостью // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, вып. 3. С. 33–39.
2. **Аульченко С.М., Васильева Е.И., Каледин В.О.** Моделирование ламинарного течения вязкой сжимаемой жидкости при малых скоростях // Вест. Кемеров. гос. ун-та. Серия: Физика. 2013. Т. 54, вып. 2, С. 170–174.
3. **Вячкин Е.С., Каледин В.О., Аульченко С.М., Бондаренко А.С., Вячкина Е.А.** Численное решение задачи о деформировании слоистой структуры с объемно-несжимаемыми слоями // Научно-технический вестник Поволжья. 2016. № 6. С. 117–119.
4. **Мейз Дж.** Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 319 с.
5. **Каледин В.О.** Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Среда функционально-объектного программирования «Алгозит» // Зарег. в Реестре прогр. для ЭВМ, 06 марта 2017. № 2017612895.

Статья поступила в редакцию 15 марта 2018 г.