УДК 539.3

ЗАДАЧА ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОПЛАСТИН

С. А. Калоеров, А. А. Самодуров

Донецкий национальный университет, 83001 Донецк, Украина
E-mails: kaloerov@mail.ru, andrewsamodurov@gmail.com

Решена задача электромагнитовязкоупругости для кусочно-однородных пластин. Задача сведена к решению последовательности задач электромагнитоупругости с использованием комплексных потенциалов. Приведены общие представления функций приближений в случае многосвязных областей, граничные условия для их определения. Получены аналитическое решение задачи для пластины с одним включением и приближенное решение для пластины с конечным числом включений. Численно исследованы закономерности изменения электромагнитоупругого состояния в зависимости от времени, свойств материалов пластины и включений, расстояний между включениями.

Ключевые слова: вязкоупругость, упругое включение, пьезопластина, комплексные потенциалы, пьезоэффективность материала.

DOI: 10.15372/PMTF20160511

Пьезоматериалы широко используются в различных отраслях современной техники, поэтому возникла необходимость разработки методов определения их электромагнитоупругого состояния при воздействии различных механических сил и электромагнитных полей. В работах [1–3] предложены методы решения задач электромагнитоупругости, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние односвязных и многосвязных пластин. В [4] с помощью метода малого параметра задача вязкоупругости для таких пластин сведена к ряду задач электромагнитоупругости. В настоящей работе с использованием подхода [4] решена задача для пьезопластины с одним или несколькими включениями из других материалов и численно исследованы закономерности изменения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) в зависимости от времени, свойств материалов пластины и включений, расстояний между включениями.

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy конечную пьезопластину, занимающую многосвязную область S, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, L}$) и находящуюся в условиях обобщенного плоского ЭМУС. На контурах отверстий заданы внешние усилия или перемещения, а также индукции или потенциалы электромагнитного поля; во внутренних точках области $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные силы, электрические заряды и магнитные диполи. В некоторые отверстия без предварительного натяжения вставлены включения из других пьезоматериалов, находящиеся вместе с пластиной в условиях идеального механического и электромагнитного контактов. Случай, когда внешний контур L_0 уходит на бесконечность, соответствует задаче о бесконечной пластине с отверстиями и включениями. В этом случае будем полагать, что на бесконечности заданы напряжения σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞, угол жесткого поворота пластины как целого ω_3^∞, а также компоненты векторов индукций D_x^∞, D_y^∞, B_x^∞, B_y^∞ или напряженностей E_x^∞, E_y^∞, H_x^∞, H_y^∞ электромагнитного поля. Также будем полагать, что пластина и включения являются линейно-вязкоупругими, электромагнитные постоянные материала с течением времени не меняются.

2. Комплексные потенциалы задачи электромагнитовязкоупругости. Для определения вязкоупругого ЭМУС используем комплексные потенциалы электромагнитоупругости [1]. В этом случае задача линейной электромагнитовязкоупругости для пьезопластины решается с использованием метода малого параметра, в качестве которого выбирается величина

$$\lambda = \nu_{12} - \nu_{12}^0$$

(ν_{12}^0, ν_{12} — мгновенно-упругое и текущее значения коэффициента Пуассона), и сводится к нахождению из граничных условий функций приближений $\Phi_{jk}(z_k)$ обобщенных комплексных переменных [4]

$$z_k = x + \mu_k y. \tag{2.1}$$

Здесь μ_k — корни характеристического уравнения

$$l_{4s}(\mu)[l_{2\beta}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu)[l_{3g}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] -$$
$$- l_{3p}(\mu)[l_{3p}(\mu)\, l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu)l_{2\nu}(\mu)] = 0,$$
$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$
$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$
$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$
$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \qquad l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\,\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$
$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\,\chi_{12}\mu - \chi_{22},$$

s_{ij} — коэффициенты деформации материала; g_{ki}, p_{ki} — пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей соответственно; β_{kl}, χ_{kl}, ν_{kl} — коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости.

Функции $\Phi_{jk}(z_k)$ определены в областях S_k, получаемых из заданной области S и ограниченных контурами L_{kl}, соответствующими контурам L_l при аффинных преобразованиях (2.1), и в общем случае имеют вид [4]

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{L} A_{jkl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^{R} A_{jkr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{jk}^*(z_k). \tag{2.2}$$

Здесь Γ_{jk} — постоянные, в случае конечной области равные нулю, в случае бесконечной области определяемые из систем уравнений

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} \Big\{1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k}\Big[1 - \frac{\nu_k}{s_{22}}\Big(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2}\,\mu_k + \frac{g_{16}}{2}\,\mu_k^2\Big) -$$
$$-\frac{\rho_k}{s_{22}}\Big(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2}\,\mu_k + \frac{p_{16}}{2}\,\mu_k^2\Big)\Big], \nu_k, \mu_k\nu_k, \rho_k, \mu_k\rho_k\Big\}\Gamma_{0k} =$$
$$= \Big\{\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}}\,[2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + (s_{66} - 2\nu_{12}^0 s_{11})\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty],$$
$$- D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty\Big\},$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\Big\{1,\mu_k,\mu_k^2,\frac{1}{\mu_k}\Big[1-\frac{\nu_k}{s_{22}}\Big(g_{22}-\frac{2g_{12}+g_{26}}{2}\,\mu_k+\frac{g_{16}}{2}\,\mu_k^2\Big)-$$
$$-\frac{\rho_k}{s_{22}}\Big(p_{22}-\frac{2p_{12}+p_{26}}{2}\,\mu_k+\frac{p_{16}}{2}\,\mu_k^2\Big)\Big],\nu_k,\mu_k\nu_k,\rho_k,\mu_k\rho_k\Big\}\Gamma_{1k}=$$
$$=\Big\{0,0,0,-\frac{s_{11}}{2s_{22}}\,\tau_{xy}^{\infty},0,0,0,0\Big\},\qquad \Gamma_{jk}=0\quad(j\geqslant 2),\tag{2.3}$$

A_{jkl} — постоянные, определяемые из систем уравнений

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\Big[1,\mu_k,\mu_k^2\Big(1+\frac{\nu_k g_{11}+\rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}}\Big),\frac{1}{\mu_k}\Big(1-\frac{\nu_k g_{22}-\rho_k p_{22}}{s_{22}}\Big),\nu_k,r_k^0,\rho_k,h_k^0\Big]iA_{0kl}=$$
$$=\Big\{\frac{Y_l}{2\pi},-\frac{X_l}{2\pi},-\frac{s_{16}X_l-\nu_{12}^0 s_{11}Y_l+g_{21}Q_{el}+p_{21}Q_{ml}}{2\pi s_{11}},$$
$$\frac{-\nu_{12}^0 s_{11}X_l+s_{26}Y_l+g_{12}Q_{el}+p_{12}Q_{ml}}{2\pi s_{22}},-\frac{Q_{el}}{2\pi},0,-\frac{Q_{ml}}{2\pi},0\Big\},$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\Big[1,\mu_k,\mu_k^2\Big(1+\frac{\nu_k g_{11}+\rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}}\Big),\frac{1}{\mu_k}\Big(1-\frac{\nu_k g_{22}-\rho_k p_{22}}{s_{22}}\Big),\nu_k,r_k^0,\rho_k,h_k^0\Big]iA_{1kl}=$$
$$=\{0,0,-s_{11}Y_l,-s_{11}X_l,0,0,0,0\},\qquad A_{jkl}=0\quad(j\geqslant 2),\tag{2.4}$$
$$\nu_k=\frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k)-l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)-l_{2\nu}^2(\mu_k)},\qquad \rho_k=\frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k)-l_{2\beta}(\mu_k)l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)-l_{2\nu}^2(\mu_k)},$$
$$r_k^0=g_{11}\mu_k^2-g_{16}\mu_k+g_{12}-(\beta_{11}\mu_k-\beta_{12})\nu_k-(\nu_{11}\mu_k-\nu_{12})\rho_k,$$
$$h_k^0=p_{11}\mu_k^2-p_{16}\mu_k+p_{12}-(\nu_{11}\mu_k-\nu_{12})\nu_k-(\chi_{11}\mu_k-\chi_{12})\rho_k,$$

X_l, Y_l, Q_{el}, Q_{ml} — компоненты главного вектора внешних усилий и суммарные электрический и магнитный заряды, приложенные к контуру L_l; A_{jkr}^0 — постоянные, удовлетворяющие системам уравнений, получаемых из (2.4) при замене A_{jkl}, X_l, Y_l, Q_{el}, Q_{ml} на A_{jkr}^0, X_r^0, Y_r^0, Q_{er}^0, Q_{mr}^0; X_r^0, Y_r^0, Q_{er}^0, Q_{mr}^0 — компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенные электрические заряды и диполи в точке $z_r^0(x_r^0,y_r^0)$; $\Phi_{jk}^*(z_k)$ — функции, голоморфные в многосвязных областях S_k включая точки приложения сосредоточенных воздействий.

Комплексные потенциалы приближений $\Phi_{jk}(z_k)$ определяются из граничных условий на контурах L_l [4]. Для неподкрепленных контуров механические граничные условия имеют следующий вид:

— если на контуре L_l заданы усилия X_{ln}, Y_{ln}, —

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(1,\mu_k)\Phi_{jk}(t_k)=\delta_{j0}\Big(\mp\int_0^s Y_{ln}\,ds+c_{1l},\pm\int_0^s X_{ln}\,ds+c_{2l}\Big);$$

— если на контуре заданы перемещения u_{l*}, v_{l*}, —

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(p_{k0},q_{k0})\Phi_{jk}(t_k)=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(1-\delta_{j0})(p_{k1},q_{k1})\Phi_{j-1,k}(t_k)+$$
$$+\delta_{j0}(u_{l*}-u_0+\omega_{j3}y,v_{l*}-v_0-\omega_{j3}x).$$

Здесь

$$p_{k0} = (\mu_k^2 - \nu_{12}^0)s_{11} - s_{16}\mu_k + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k,$$

$$q_{k0} = -\mu_k\nu_{12}^0 s_{11} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + \Big(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\Big)\nu_k + \Big(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\Big)\rho_k,$$

$$p_{k1} = -s_{11}, \qquad q_{k1} = -s_{11}\mu_k,$$

$-\omega_{j3}y + u_0$, $\omega_{j3}x + v_0$ — перемещения точек, в случае если тело движется как жесткое целое; c_{1l}, c_{2l} — константы.

Электромагнитные граничные условия получаем в виде:

— если на контуре L_l заданы электрическая и магнитная индукции D_{ln} и B_{ln}, —

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^4 (\nu_k, \rho_k)\Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}\Big(\pm\int_0^s D_{ln}\,ds + c_{3l}, \pm\int_0^s B_{ln}\,ds + c_{4l}\Big);$$

— если на контуре L_l заданы потенциалы поля φ_{l*}, ψ_{l*}, —

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^4 (r_k^0, h_k^0)\Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0}(\varphi_{l*} - \varphi_{0l}, \psi_{l*} - \psi_{0l}).$$

Здесь и далее верхние знаки в правых частях граничных условий соответствуют внешнему контуру области, нижние — контурам отверстий.

При идеальном механическом и электромагнитном контактах пластины с включением, занимающим область $S^{(l)}$, для функций приближений получаем граничные условия [4]

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^4 [g_{ki}\Phi_{jk}(t_k) - g_{ki}^{(l)}\Phi_{jk}^{(l)}(t_k^{(l)})] = \delta_{j0}\varepsilon_i,$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^4 \big[(p_{k0}, q_{k0})\Phi_{jk}(t_k) - (p_{k0}^{(l)}, q_{k0}^{(l)})\Phi_{jk}^{(l)}(t_k^{(l)})\big] =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0})\big[(p_{k1}, q_{k1})\Phi_{j-1,k}(t_k) - (p_{k1}^{(l)}, q_{k1}^{(l)})\Phi_{j-1,k}^{(l)}(t_k^{(l)})\big] +$$

$$+ \delta_{j0}[u_{l0} - u_{l*} + (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)})y,\ v_{l0} - v_{l*} - (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)})x], \qquad (2.5)$$

где

$$g_{ki} = (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0), \qquad g_{ki}^{(l)} = (1, \mu_k^{(l)}, \nu_k^{(l)}, \rho_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)}),$$

$$\varepsilon_i = (c_{1l}, c_{2l}, c_{3l}, c_{4l}, \varphi_0, \psi_0) \qquad (i = \overline{1, 6}\,),$$

$\Phi_{jk}^{(l)}(z_k^{(l)})$ — функции приближений для включений, представление которых аналогично (2.2), с учетом того что в силу их конечности $\Gamma_{jk}^{(l)} = 0$.

После определения функций $\Phi_{jk}(z_k)$ комплексные потенциалы для пластины-матрицы находим по формуле [4]

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}(z_k), \qquad (2.6)$$

где степени λ^j вычисляются с помощью операторных выражений

$$\lambda^j = \sum_{k=0}^{j} C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \, \frac{\text{Э}_\alpha^{*\,k}(-\beta_2^*) - \text{Э}_\alpha^{*\,j-k}(-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}; \tag{2.7}$$

$$D_1 = \frac{\delta_1^*}{4}\Big(\frac{E_1^0}{E_2^0}\,\frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{12}^0\Big), \qquad D_2 = \frac{\delta_2^*}{4}\,\frac{E_1^0}{E_2^0}\,\frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*},$$

E_i^0 $(i = 1, 2)$ — мгновенно-упругие значения модулей Юнга E_i для главных направлений анизотропии материала; δ_i^*, β_i^* — реологические постоянные материала, связанные с изменением E_i во времени; $\text{Э}_\alpha^*(-\tau)$ — дробно-экспоненциальное ядро Работнова резольвентного оператора [5, 6]:

$$\text{Э}_\alpha^*(-\tau)\cdot 1 = t^{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tau)^n t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)+1]},$$

или

$$\text{Э}_\alpha^*(-\tau)\cdot 1 = \frac{1}{\tau}\big[1 - \mathrm{e}^{-\tau[(1-\alpha)t]^{1-\alpha}}\,\big]$$

(α, τ — реологические постоянные материала).

После определения функций $\Phi_k(z_k)$ основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, потенциалы, индукции и напряженности поля) вычисляются по формулам [1]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k})\Phi_k'(z_k),$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(p_k, q_k, r_k^0, h_k^0)\Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0),$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k})\Phi_k'(z_k), \tag{2.8}$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0)\Phi_k'(z_k),$$

где

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \qquad \lambda_{2k} = 1, \qquad \lambda_{6k} = -\mu_k,$$

$$\lambda_{7k} = \nu_k\mu_k, \quad \lambda_{8k} = -\nu_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k\mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k,$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k,$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \Big(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\Big)\nu_k + \Big(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\Big)\rho_k.$$

По аналогичным формулам вычисляются основные характеристики для включений, при этом для функций приближений находим

$$\Phi_k^{(l)}(z_k) = \sum_{j=0}\lambda^j\Phi_{jk}^{(l)}(z_k). \tag{2.9}$$

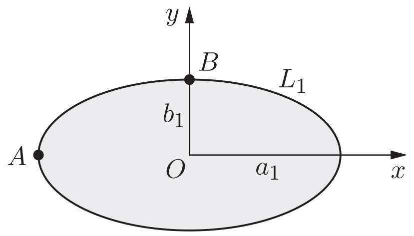

Рис. 1. Геометрия эллиптического включения

3. Пластина с включением эллиптической формы. Пусть бесконечная пластина ослаблена отверстием эллиптической формы, подкрепленным включением. Обозначим через L_1 контур отверстия, через a_1, b_1 — малую и большую полуоси (рис. 1). Рассмотрим три случая нагружения на бесконечности.

1. Пластина растягивается усилиями $\sigma_y^\infty = p$, электромагнитные индукции равны нулю:

$$\sigma_y^\infty = p, \qquad \sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0. \tag{3.1}$$

При этом для остальных величин получаем

$$E_x^\infty = -g_{12}p, \qquad E_y^\infty = -g_{22}p, \qquad H_x^\infty = -p_{12}p, \qquad H_y^\infty = -p_{22}p.$$

2. На пластину действует поле с вектором электрической напряженности $E_y^\infty = \varepsilon$, остальные компоненты напряженности, напряжения и угол жесткого поворота равны нулю:

$$E_y^\infty = \varepsilon, \qquad \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = E_x^\infty = H_x^\infty = H_y^\infty = 0. \tag{3.2}$$

Для остальных величин имеем

$$D_x^\infty = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad D_y^\infty = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad B_x^\infty = -\frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad B_y^\infty = \frac{\Delta_4}{\Delta}, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta_1 = \varepsilon \begin{vmatrix} \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \varepsilon \begin{vmatrix} \beta_{11} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{11} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ \nu_{12} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \varepsilon \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{12} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{12} \\ \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \varepsilon \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} \\ \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{12} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{vmatrix}.$$

3. На пластину действует поле с вектором магнитной напряженности $H_y^\infty = \mu$, остальные компоненты напряженности, напряжения и угол жесткого поворота равны нулю:

$$H_y^\infty = \mu, \qquad \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = E_x^\infty = E_y^\infty = H_x^\infty = 0. \tag{3.4}$$

Для остальных величин получаем выражения (3.3), в которых принимаем

$$\Delta_1 = \mu \begin{vmatrix} \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ \beta_{12} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \mu \begin{vmatrix} \beta_{11} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ \beta_{12} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ \nu_{11} & \chi_{11} & \chi_{12} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \mu \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{12} & \nu_{22} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{12} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_4 = \mu \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} \\ \beta_{12} & \beta_{12} & \nu_{12} \\ \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} \end{vmatrix}.$$

В рассматриваемой задаче комплексные потенциалы для пластины и включения принимают вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{0k} z_k + \Phi^*_{jk1}(z_k), \qquad \Phi^{(1)}_{jk}(z^{(1)}_k) = \Phi^{*(1)}_{jk}(z^{(1)}_k),$$

где Γ_{0k} — величины, определяемые из первой системы уравнений (2.3) с учетом (3.1), (3.2), (3.4); $\Phi^*_{jk1}(z_k)$ — функции, голоморфные вне эллипсов L_{k1}, соответствующих L_1 при аффинных преобразованиях (2.1); $\Phi^{*(1)}_{jk}(z^{(1)}_k)$ — функции, голоморфные внутри эллипсов $L^{(1)}_k$. Для построения этих функций используем конформные отображения. Функции

$$z_k = R_{k1}(\zeta_{k1} + m_{k1}/\zeta_{k1}), \qquad z^{(1)}_k = R^{(1)}_k(\zeta^{(1)}_k + m^{(1)}_k/\zeta^{(1)}_k),$$

где

$$R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{a_1 - i\mu_k b_1}, \quad R^{(1)}_k = \frac{a_1 - i\mu^{(1)}_k b_1}{2}, \quad m^{(1)}_k = \frac{a_1 + i\mu^{(1)}_k b_1}{a_1 - i\mu^{(1)}_k b_1},$$

конформно отображают внешности единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geqslant 1$ и $|\zeta^{(1)}_k| \geqslant 1$ на внешности эллипсов L_{k1} и $L^{(1)}_k$. Тогда функции $\Phi_{jk1}(z_k)$, голоморфные вне эллипсов L_{k1}, являются голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geqslant 1$ включая бесконечно удаленную точку, и их можно представить в виде рядов Лорана по отрицательным степеням ζ_{k1}, а функции $\Phi^{*(1)}_{jk}(z^{(1)}_k)$, голоморфные в эллипсах $L^{(1)}_k$, можно представить в виде рядов по полиномам Фабера [7]. Учитывая эти представления и удовлетворяя граничным условиям (2.5) на контуре контакта пластины и включения, получаем систему для определения коэффициентов рядов. Окончательно комплексные потенциалы получаем в виде

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{0k} z_k + \frac{a_{jk11}}{\zeta_{k1}}, \qquad \Phi^{(1)}_{jk}(z^{(1)}_k) = a^{(1)}_{jk1} \frac{z^{(1)}_k}{R^{(1)}_k}, \tag{3.5}$$

где a_{jk11}, $a^{(1)}_{jk1}$ — постоянные, определяемые из решения системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{4} (g_{ki} a_{jk11} - g^{(l)}_{ki} a^{(1)}_{k1} m^{(1)}_k - \bar{g}^{(l)}_{ki} \bar{a}^{(1)}_{k1}) = -\sum_{k=1}^{4} \delta^0_j (g_{ki} \Gamma_{0k} R_{k1} m_{k1} + \bar{g}_{ki} \bar{\Gamma}_{0k} \bar{R}_{k1}),$$

$$\sum_{k=1}^{4} \left[(p_{k0}, q_{k0}) a_{jk11} - (p^{(1)}_{k0}, q^{(1)}_{k0}) a^{(1)}_{jk1} m^{(1)}_k - (\bar{p}^{(1)}_{k0}, \bar{q}^{(1)}_{k0}) \bar{a}^{(1)}_{jk1}\right] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{4} \delta^0_j \left[(p_{k0}, q_{k0}) \Gamma_{0k} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k0}, \bar{q}_{k0}) \bar{\Gamma}_{0k} \bar{R}_{k1}\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{4} \delta^1_j \left[(p_{k1}, q_{k1}) \Gamma_{0k} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k1}, \bar{q}_{k1}) \bar{\Gamma}_{0k} \bar{R}_{k1}\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{4} (1 - \delta^0_j) \left[(p_{k1}, q_{k1}) a_{j-1k11} - (p^{(1)}_{k1}, q^{(1)}_{k1}) a^{(1)}_{j-1k1} m^{(1)}_k - (\bar{p}^{(1)}_{k1}, \bar{q}^{(1)}_{k1}) \bar{a}^{(1)}_{j-1k1}\right].$$

Вычисляя по формуле (2.7) степени малого параметра λ^j и умножая их на функции приближений (3.5), получаем комплексные потенциалы (2.6), (2.9) и их производные, а по ним — основные характеристики (2.8) в любой момент времени.

Таблица 1

Характеристики материалов

Характеристика	Материал		
	M1	M2	M3
s_{11}/s_0	7,165	22,260	10,745
s_{22}/s_0	6,797	14,984	7,398
s_{66}/s_0	19,912	47,481	7,637
s_{12}/s_0	−2,337	−6,437	−2,542
g_{16}/g_0	2,028	109,220	2,054
g_{21}/g_0	−0,496	−4,333	−1,159
g_{22}/g_0	1,157	8,016	2,458
p_{16}/p_0	1,850	268,318	98,843
p_{21}/p_0	0,576	17,778	12,102
p_{22}/p_0	1,186	31,206	22,268
β_{11}/β_0	0,156	19,612	0,106
β_{22}/β_0	0,137	10,612	0,090
ν_{11}/ν_0	−0,190	213,404	−14,931
ν_{22}/ν_0	−0,185	−5,534	−3,740
$\chi_{11}/\chi_0 = \chi_{33}\chi_0$	0,336	0,590	0,805
χ_{22}/χ_0	0,119	0,575	0,704
α^*	0,500	0,220	0,250
β_1^*	0,001 10	0,014 00	0,000 39
β_2^*	0,000 95	0,000 78	0,000 15
δ_1^*	0,0069	0,0095	0,0061
δ_2^*	0,0065	0,0064	0,0066

Численно исследуем изменения во времени основных характеристик в пластине для следующих материалов: композита на основе $BaTiO_3$ — $CoFe_2O_4$ (материал M1) [8]; композита, упругие и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия CdSe, а пьезомагнитные и магнитные — $BaTiO_3$ [9] (материал M2); композита, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют материалу PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные — $CoFe_2O_4$ [9] (материал M3). Характеристики материалов, вычисленные при $s_0 = 10^{-6}$ МПа$^{-1}$, $g_0 = 10^{-2}$ м^2/МКл, $p_0 = 10^{-5}$ МТл$^{-1}$, $\beta_0 = 10^3$ МН$\cdot$м^2/МКл^2, $\nu_0 = 10^{-1}$ МКл$\cdot$м/МА, $\chi_0 = 10^{-1}$ МПа/МТл$^{-2}$, приведены в табл. 1. Характеристики материалов включений полагаются связанными с соответствующими характеристиками материала пластины следующим образом:

$$s_{ij}^{(1)} = \lambda_s^{(1)} s_{ij}, \qquad g_{ki}^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} g_{ki}, \qquad p_{ki}^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} p_{ki},$$

$$\beta_{kl}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{pe}^{(1)}}\,\beta_{kl}, \qquad \chi_{kl}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{pe}^{(1)}}\,\chi_{kl}, \qquad \nu_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{pe}^{(1)}}\,\nu_{ij}$$

($\lambda_s^{(1)}$, $\lambda_{pe}^{(1)}$ — параметры относительной жесткости и пьезоэффективности материала ядра $S^{(1)}$). Реологические постоянные материалов выбирались на основе анализа известных реологических постоянных [6, 10]. При проведении расчетов количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока максимальные значения основных характеристик ЭМУС на двух последовательных приближениях различались не более чем на 0,01 % (в рассмотренных случаях необходимо 5–10 приближений (степеней малого параметра λ)).

На рис. 2 для случая растяжения усилиями $\sigma_y^\infty = p$ пластины из материалов M1 и M2 соответственно с круговым включением радиусом a приведены распределения напряже-

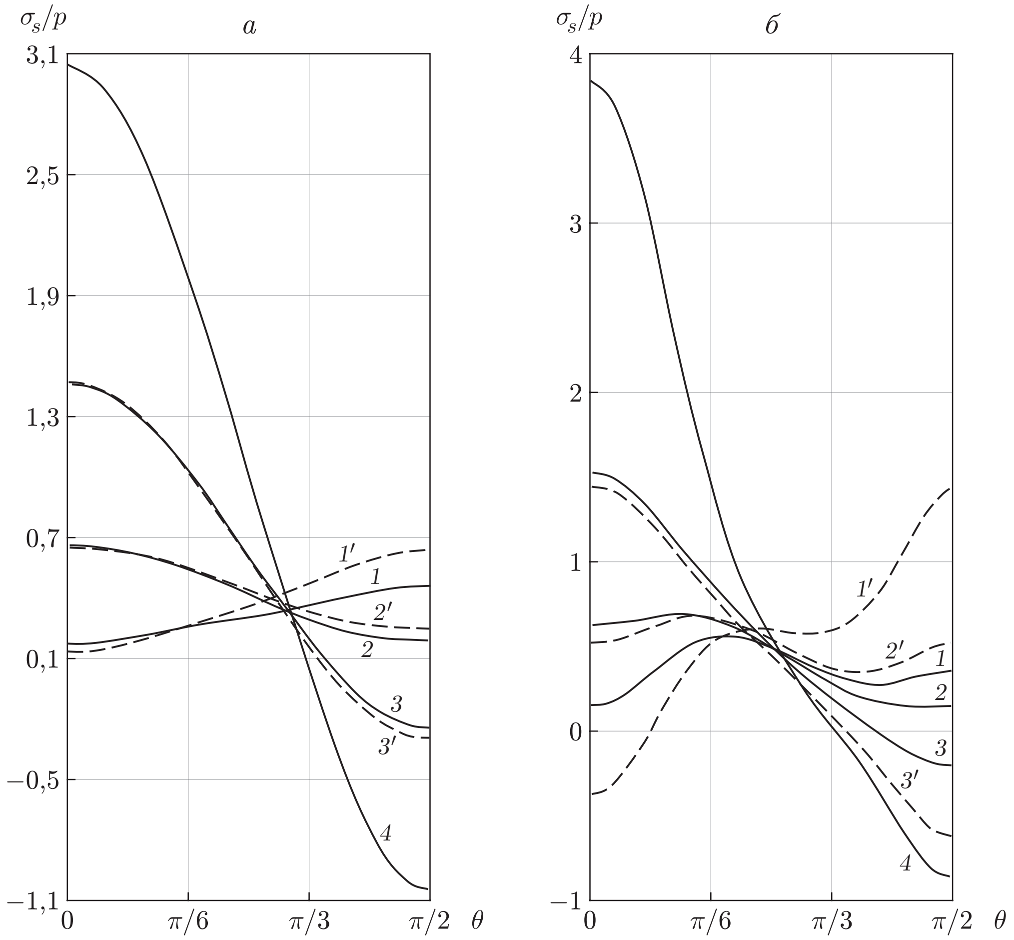

Рис. 2. Распределение напряжений σ_s по контуру при растяжении усилиями $\sigma_y^\infty = p$ пластин из материалов M1 (*а*) и M2 (*б*) при $\lambda_{pe}^{(1)} = 1$ и различных значениях параметра $\lambda_s^{(1)}$:

сплошные линии — начальное состояние, штриховые — стационарное состояние; *1*, *1′* — $\lambda_s^{(1)} = 0$, *2*, *2′* — $\lambda_s^{(1)} = 0{,}5$, *3*, *3′* — $\lambda_s^{(1)} = 2{,}0$, *4* — $\lambda_s^{(1)} = \infty$

ний σ_s по контуру для начального и стационарного состояний при $\lambda_{pe}^{(1)} = 1$ и различных значениях параметра $\lambda_s^{(1)}$ (θ — центральный угол отверстия, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки). Установлено, что стационарное состояние в пластинах из этих материалов достигается приблизительно через 200 ч. Видно, что при переходе в стационарное состояние напряжения изменяются значительно, особенно при увеличении жесткости включения (уменьшении параметра $\lambda_s^{(1)}$). При переходе в стационарное состояние значения напряжений в точке A при $\lambda_s^{(1)} < 1$ уменьшаются, при $\lambda_s^{(1)} > 1$ — увеличиваются. В точке B при переходе в стационарное состояние значения напряжений увеличиваются при любых значениях $\lambda_s^{(1)}$. При уменьшении относительной жесткости включения (увеличении $\lambda_s^{(1)}$) концентрация напряжений в окрестности точек A и B (см. рис. 1) увеличивается, при этом зависимость напряжений от времени уменьшается как в случае абсолютно мягкого включения ($\lambda_s^{(1)} = \infty$), так и в задачах вязкоупругости для анизотропных пластин [11], значения напряжений со временем не меняются. При $\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$ включение

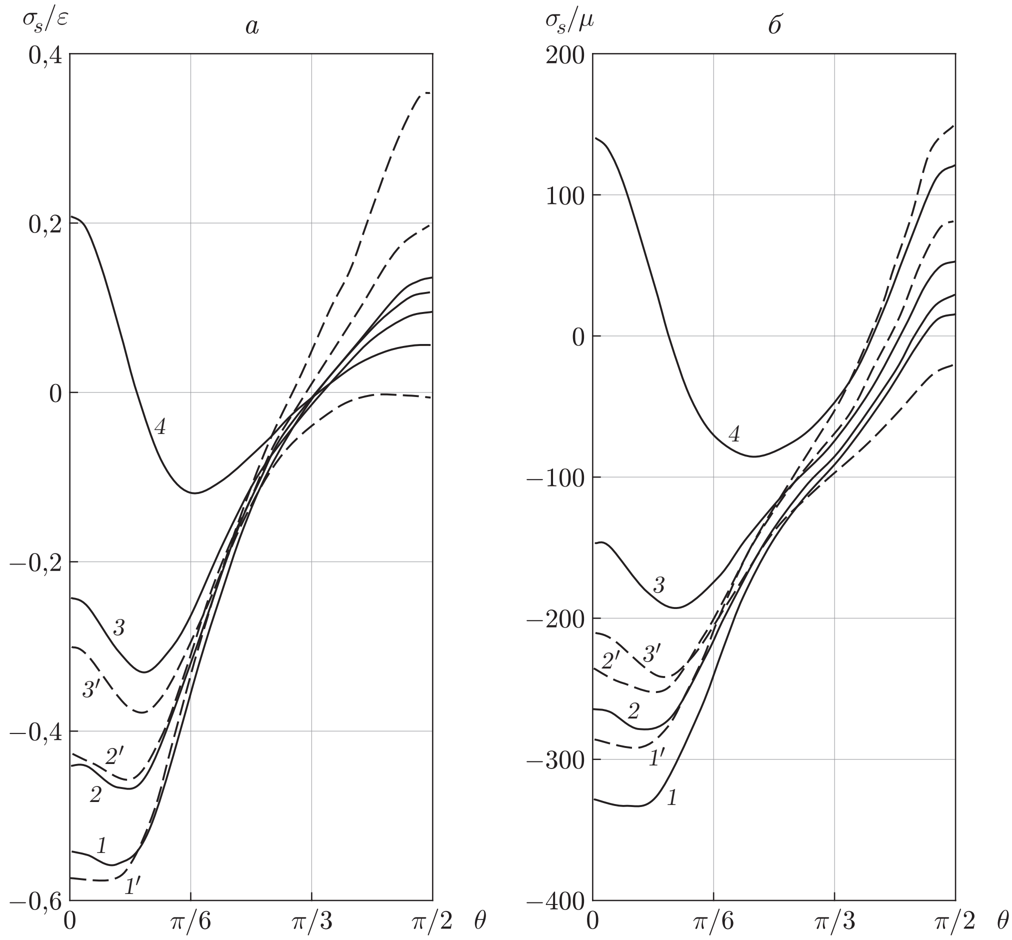

Рис. 3. Распределение напряжений σ_s по контуру при воздействии электрического поля E_y^∞ (a) и магнитного поля H_y^∞ ($б$) на пластину из материала М2 при $\lambda_{pe}^{(1)} = 0{,}5$ и различных значениях параметра $\lambda_s^{(1)}$ (обозначения те же, что на рис. 2)

можно считать абсолютно жестким, при $\lambda_s^{(1)} > 10^2$ — абсолютно мягким. При переходе в стационарное состояние пластины из "сильно анизотропного" материала М2 напряжения меняются существеннее, чем при переходе пластины из "слабо анизотропного" материала М1. Так, при $\lambda_s^{(1)} = 0$ значения σ_s в точке B для пластины из материала М1 изменяются на 39 %, тогда как для пластины из материала М2 — более чем на 250 %. С увеличением параметра пьезоэффективности $\lambda_{pe}^{(1)}$ напряжения при переходе в стационарное состояние также изменяются существеннее.

На рис. 3,a для пластины из материала М2 при действии на бесконечности электрического поля с напряженностью $E_y^\infty = \varepsilon$ с точностью до ε приведены распределения напряжений σ_s по контуру для начального и стационарного состояний при $\lambda_{pe}^{(1)} = 0{,}5$ и различных значениях параметра $\lambda_s^{(1)}$. На рис. 3,$б$ приведены распределения напряжений для случая действия на бесконечности магнитного поля $H_y^\infty = \mu$. Из рис. 3 следует, что закономерности влияния жесткости включения при действии электрического или магнитного поля такие же, как и в случае растяжения. Так, изменение напряжений при переходе в стационарное состояние значительно и увеличивается с уменьшением параметра $\lambda_s^{(1)}$. При действии на бесконечности магнитного поля H_y^∞ значения напряжений и их изменения во времени наиболее велики. Заметим, что для рассматриваемых механических и электромагнитных воздействий исследовались также изменения со временем значений векторов индукций и напряженностей электромагнитного поля. Установлено, что по сравнению с изменениями напряжений и компонент векторов напряженностей поля изменения значения компонент векторов индукций D_x^∞, D_y^∞, B_x^∞, B_y^∞ пренебрежимо малы.

4. Пластина с конечным числом включений. Пусть бесконечная пьезопластина имеет ряд эллиптических включений из других пьезоматериалов. Как и в случае электромагнитоупругости [1], для комплексных потенциалов приближений получаем

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty} a_{jkln}\varphi_{kln}(z_k), \qquad \Phi_{jk}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn}^{(l)}\psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}),$$

где Γ_{jk} — постоянные, определяемые из систем уравнений (2.3),

$$\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \qquad \psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \frac{(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n}{(R_k^{(l)})^n},$$

a_{jkln}, $a_{jkn}^{(l)}$ — постоянные, определяемые из граничных условий; ζ_{kl} — переменная, определяемая из конформных отображений [12]

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl}(\zeta_{kl} + m_{kl}/\zeta_{kl}), \qquad z_{0kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$
$$R_{kl} = [a_l(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l) + ib_l(\sin\varphi_l - \mu_k\cos\varphi_l)]/2,$$
$$m_{kl} = [a_l(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l) - ib_l(\sin\varphi_l - \mu_k\cos\varphi_l)]/(2R_{kl}),$$
$$R_k^{(l)} = [a_l(\cos\varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin\varphi_l) + ib_l(\sin\varphi_l - \mu_k^{(l)}\cos\varphi_l)]/2,$$
$$z_{k0}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l},$$

x_{0l}, y_{0l} — координаты центра эллипса L_l в выбранной системе координат Oxy; φ_l — угол между осью Ox и полуосью a_l эллипса L_l, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

В случае многосвязной области удобнее удовлетворять граничным условиям в дифференциальной форме. Продифференцировав уравнения (2.5) по дуге контура, находим

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}[g_{ki}\delta_k\Phi'_{jk}(t_k) - g_{ki}^{(l)}\delta_k^{(l)}\Phi'^{(l)}_{jk}(t_k^{(l)})] = 0 \qquad (i = \overline{1,6}\,),$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}[(p_{k0}, q_{k0})\delta_k\Phi'_{jk}(t_k) - (p_{k0}^{(l)}, q_{k0}^{(l)})\delta_k^{(l)}\Phi'^{(l)}_{jk}(t_k^{(l)})] =$$
$$= -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(1-\delta_j^0)[(p_{k1}, q_{k1})\delta_k^{(l)}\Phi'_{j-1,k}(t_k) - (p_{k1}^{(l)}, q_{k1}^{(l)})\delta_k^{(l)}\Phi'^{(l)}_{j-1,k}(t_k^{(l)})] +$$
$$+ \delta_j^0\Big(\frac{du^*}{ds} - (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)})\,\frac{dy}{ds}, \frac{dv^*}{ds} + (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)})\,\frac{dx}{ds}\Big), \qquad (4.1)$$

где $\delta_k = dz_k/ds$,

$$\Phi'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} + \sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty} a_{jkln}\varphi'_{kln}(z_k), \qquad \Phi'^{(l)}_{jk}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkn}^{(l)}\psi'^{(l)}_{kn}(z_k^{(l)}); \qquad (4.2)$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl}\zeta_{kl}^{n-1}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \qquad \psi'^{(l)}_{kn}(z_k^{(l)}) = \frac{n(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1}}{(R_k^{(l)})^n}.$$

Выберем на контурах контактов пластины-матрицы и включений систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$; $l = \overline{1, L}$), в которых удовлетворяются граничные условия (4.1). Подставляя функции (4.2) в эти граничные условия в точках $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$, получаем

$$\sum_{k=1}^{4}\Big(\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}(g_{ki}\delta_k a_{jkln}\varphi'_{kln}(t_{klm}) + \bar g_{ki}\bar\delta_k\bar a_{jkln}\overline{\varphi'_{kln}(t_{klm})}\,) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}(g_{ki}^{(l)}\delta_k^{(l)}a_{jkn}^{(l)}\psi'^{(l)}_{kn}(t_{km}^{(l)}) + \bar g_{ki}^{(l)}\bar\delta_k^{(l)}\bar a_{jkn}^{(l)}\overline{\psi'^{(l)}_{kn}(t_{km}^{(l)})}\,)\Big) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{4}\delta_j^0(g_{ki}\delta_k\Gamma_{jk} + \bar g_{ki}\bar\delta_k\bar\Gamma_{jk}) \qquad (i = \overline{1, 6}\,),$$

$$\sum_{k=1}^{4}\Big(\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\big((p_{k0}, q_{k0})\delta_k a_{jkln}\varphi'_{kln}(t_{klm}) + (\bar p_{k0}, \bar q_{k0})\bar\delta_k\bar a_{jkln}\overline{\varphi'_{kln}(t_{klm})}\,\big) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}\big((p_{k0}^{(l)}, q_{k0}^{(l)})\delta_k^{(l)}a_{jkn}^{(l)}\psi'^{(l)}_{kn}(t_{km}^{(l)}) + (\bar p_{k0}^{(l)}, \bar q_{k0}^{(l)})\bar\delta_k^{(l)}\bar a_{jkn}^{(l)}\overline{\psi'^{(l)}_{kn}(t_{km}^{(l)})}\,\big)\Big) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{4}\delta_j^0[(p_{k0}, q_{k0})\delta_k\Gamma_{jk} + (\bar p_{k0}, \bar q_{k0})\bar\delta_k\bar\Gamma_{jk}] -$$
$$- \sum_{k=1}^{4}(1 - \delta_j^0)\Big(\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\big((p_{k1}, q_{k1})\delta_k a_{j-1,kln}\varphi'_{kln}(t_{klm}) + (\bar p_{k1}, \bar q_{k1})\bar\delta_k\bar a_{j-1,kln}\overline{\varphi'_{kln}(t_{klm})}\,\big) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}\big((p_{k1}^{(l)}, q_{k1}^{(l)})\delta_k^{(l)}a_{j-1,kn}^{(l)}\psi'^{(l)}_{kn}(t_{km}^{(l)}) + (\bar p_{k1}^{(l)}, \bar q_{k1}^{(l)})\bar\delta_k^{(l)}\bar a_{j-1,kn}^{(l)}\overline{\psi'^{(l)}_{kn}(t_{km}^{(l)})}\,\big)\Big) \quad (i = 1, 2), \qquad (4.3)$$

где $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$; $t_{km}^{(l)} = x_{lm} + \mu_k^{(l)} y_{lm}$.

Система (4.3) состоит из $8M_L$ линейных алгебраических уравнений, где $M_L = \sum\limits_{l=1}^{L} M_l$. Если в рядах (4.2) оставлять по N членов, то каждое уравнение будет содержать $16NL$ вещественных неизвестных для определения комплексных постоянных a_{jkln} и $a_{jkn}^{(l)}$ ($k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, L}$, $n = \overline{1, N}\,$). Приближенное решение системы будем искать с использованием сингулярного разложения [13, 14].

После нахождения приближенного решения системы постоянные a_{jkln}, $a_{jkn}^{(l)}$, а следовательно, и функции приближений будут известны. По этим функциям, заменяя степени малого параметра λ^j временными операторами (2.7), можно определить комплексные потенциалы (2.6), (2.9) и их производные в любой момент времени, а по ним и основные характеристики ЭМУС (2.8) в пластине-матрице и включении в любой момент времени.

В табл. 2 для случая растяжения пластины из материала М1 с двумя одинаковыми круговыми включениями радиусом a на бесконечности усилиями $\sigma_y^\infty = p$ (случай нагружения (3.1)) при различных значениях параметра относительной жесткости $\lambda_s^{(i)}$ и расстояния c между контурами включений приведены значения нормальных напряжений σ_s

Таблица 2

Значения нормальных напряжений σ_s в точках A и B при растяжении пластины на бесконечности усилиями $\sigma_y^\infty = p$ при различных значениях $\lambda_s^{(i)}$, c/a

$\lambda_s^{(i)}$	Точка	t, ч	σ_s					
			$c/a=\infty$	$c/a=10{,}0$	$c/a=2{,}0$	$c/a=1{,}0$	$c/a=0{,}5$	$c/a=0{,}1$
0,1	A	0	0,285	0,285	0,248	0,198	0,132	−0,012
		200	0,251	0,250	0,196	0,123	0,026	−0,191
	B	0	0,394	0,393	0,386	0,382	0,380	0,380
		200	0,541	0,542	0,531	0,525	0,521	0,519
0,5	A	0	0,657	0,656	0,642	0,618	0,578	0,478
		200	0,645	0,644	0,627	0,601	0,556	0,444
	B	0	0,187	0,186	0,180	0,179	0,180	0,183
		200	0,247	0,246	0,238	0,236	0,236	0,239
2,0	A	0	1,454	1,455	1,467	1,502	1,589	1,917
		200	1,462	1,462	1,468	1,498	1,582	1,911
	B	0	−0,243	−0,240	−0,225	−0,224	−0,227	−0,235
		200	−0,294	−0,290	−0,272	−0,270	−0,273	−0,282
10,0	A	0	2,460	2,460	2,481	2,635	3,086	5,342
		200	2,464	2,465	2,468	2,610	3,048	5,267
	B	0	−0,763	−0,763	−0,681	−0,681	−0,699	−0,743
		200	−0,819	−0,820	−0,731	−0,731	−0,749	−0,795

в точках A и B пластины на площадках, перпендикулярных контуру включения в начальном (0 ч) и стационарном (через 200 ч) состояниях. Из табл. 2 следует, что с уменьшением расстояния между включениями концентрация напряжений в области между включениями увеличивается при $\lambda_s^{(i)} > 1$ и уменьшается при $\lambda_s^{(i)} < 1$. При переходе в стационарное состояние с уменьшением расстояния между включениями изменение напряжений в точке A увеличивается, а в точке B уменьшается. При $c/a > 2$ влияние одного включения на напряженное состояние вблизи другого включения незначительно и им можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Калоеров С. А.** Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С. А. Калоеров, А. В. Петренко. Донецк: Юго-Восток, 2011.
2. **Калоеров С. А., Самодуров А. А.** Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости // Теорет. и прикл. механика. 2013. Вып. 7. С. 118–130.
3. **Партон В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. М.: Наука, 1988.
4. **Калоеров С. А., Самодуров А. А.** Решение задачи электромагнитовязкоупругости для многосвязных кусочно-однородных пластинок // Теорет. и прикл. механика. 2014. Вып. 8. С. 57–76.
5. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
6. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
7. **Калоеров С. А.** Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко. Донецк: Изд-во Донец. нац. ун-та, 2013.

8. **Tian W.-Y., Gabbert U.** Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelasticsolids // Europ. J. Mech. A. 2004. V. 23. P. 599–614.
9. **Hrennikoff A.** Solution of problems of elasticity by the framework method // J. Appl. Mech. 1941. V. 8. P. A169–A175.
10. **Каминский А. А.** Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами / А. А. Каминский, Д. А. Гаврилов. Киев: Наук. думка, 1992.
11. **Калоеров С. А., Паршикова О. А.** Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика. 2011. № 2. С. 51–70.
12. **Калоеров С. А., Горянская Е. С.** Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Механика композитов: В 12 т. Т. 7. Концентрация напряжений. Киев: А.С.К., 1998. С. 10–26.
13. **Воеводин В. В.** Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
14. **Форсайт Дж.** Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 27/I 2015 г.,
в окончательном варианте — 17/VIII 2015 г.