

5. Carter J. E. Numerical solutions of the Navier—Stokes equations for the supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner. NACA TR R-385, 1972.
6. Lewis J. E., Kubota T., Lees L. Experimental investigation of supersonic laminar, two-dimensional boundary-layer separation in a compression corner with and without cooling. — AIAA J., 1918, vol. 6, N 1.

УДК 538.4 : 538.665

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

И. Ф. Султанов

(Москва)

Намагничивающиеся жидкости находят все более широкое применение в различных областях техники [1]. Такие жидкости успешно могут использоваться в качестве теплоносителя в устройствах, генерирующих магнитное поле, в условиях, когда отсутствует сила тяжести [2] и ряде других случаев. Эффективность работы теплообменных аппаратов в значительной степени определяется температурой намагничивающейся жидкости. В связи с этим представляет интерес рассмотрение неизо термических течений при температуре, близкой к точке Кюри, где зависимость объемной намагниченности  $M$  от температуры выражена наиболее ярко. В этом случае на характер течения жидкости будет оказывать существенное влияние не только зависимость объемной намагниченности насыщения от температуры, но и неоднородность температуры, вызванная появлением внутренних источников и стоков тепла, обусловленных магнетокалорическим эффектом. Отметим, что хотя это и слабый эффект [3], тем не менее вызванное им перераспределение температуры по сечению канала может быть значительным. При большом градиенте внешнего магнитного поля  $H$  даже малое изменение температуры может существенно изменить силу, действующую на элемент намагничивающейся жидкости. Особенности течений магнитных жидкостей при температуре, близкой к точке Кюри, могут быть выявлены при совместном решении уравнений движения и теплопроводности.

Система уравнений несжимаемой неэлектропроводной намагничивающейся жидкости, находящейся в насыщении, в приближении Розенсвайга — Нойрэнгера [4] имеет вид

$$(1) \quad \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mu_0 M \nabla H;$$

$$(2) \quad \rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right] = \lambda \Delta T - \mu_0 \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} T \left[ \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla H \right],$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad M = M(T),$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $t$  — время;  $p$  — давление;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума;  $c$  — теплоемкость;  $T$  — температура;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. В дальнейшем считаем, что  $M = \Lambda (T_c - T)$ , где  $\Lambda = -(\partial M / \partial T)_{\rho, H}$  — пиромангнитный коэффициент,  $T_c$  — температура Кюри [4, 5]. Так как изменение температуры мало по сравнению с абсолютной температурой, то в последнем члене уравнения (2), учитывающем магнетокалорический эффект, можно считать, что  $T = \text{const}$ .

Пусть в плоском канале шириной  $2L$  происходит движение намагничивающейся жидкости под действием градиентов внешнего магнитного поля  $G = \partial H / \partial x = \text{const}$  и давления  $\partial p / \partial x = \text{const}$ . Температура стенок канала  $T_0$  поддерживается постоянной и близкой к точке Кюри. Выберем в качестве характерных величин длину  $L$ , время  $L^2 \rho / \eta$ , температуру  $(T_c - T_0)$  и скорость  $(T_c - T_0) \sqrt{\lambda / (\eta T_0)}$ . Тогда систему уравнений (1), (2) одномерного течения намагничивающейся жидкости в плоском канале можно записать в безразмерном виде

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2k^2 \theta + q;$$

$$(4) \quad \operatorname{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2k^2 u,$$

где  $\theta = (T - T_0) / (T_c - T_0)$ ;  $2k^2 = \mu_0 \Lambda G L^2 \sqrt{T_0 / \eta \lambda}$  ( $k > 0$ );  $q = 2k^2 - P$ ;  $P = [L^2 / (T_c - T_0)] \sqrt{T_0 / \eta \lambda} \cdot \partial p / \partial x$ ;  $\operatorname{Pr} = \eta c / \lambda$  — число Прандтля;  $u$  —  $x$ -

проекция вектора скорости. Ось  $y$  направлена перпендикулярно стенкам канала, а  $x$  — вдоль оси канала.

Рассмотрим развивающееся течение намагничивающейся жидкости. Пусть при  $t < 0$  величина  $q = 0$ , т. е. магнитное давление уравновешивает гидродинамический перепад давления в канале и жидкость покоится (магнитная пробка). В начальный момент времени ( $t = 0$ ) происходит мгновенное изменение градиента давления, а следовательно, при  $t \geq 0$  величина  $q$  будет иметь постоянное значение, не равное нулю. Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$(5) \quad u(y, 0) = 0, \quad \theta(y, 0) = 0, \quad u(\pm 1, t) = 0, \quad \theta(+1, t) = 0.$$

Применяя одностороннее преобразование Лапласа по переменной  $t$ , приводим решение поставленной задачи (3) — (5) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями [6]. Осуществляя затем обратное преобразование, получим

$$(6) \quad u(y, t) = \frac{q}{2k^2} \frac{\text{sh } k \sin k \text{ ch } (ky) \cos (ky) - \text{ch } k \cos k \text{ sh } (ky) \sin (ky)}{\text{sh}^2 k + \cos^2 k} + \\ + 2q \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\text{Pr} + 1}{2 \text{Pr}} n^2 t\right) \frac{(-1)^j \cos (ny)}{n(n^4 + 4k^4)} \left[ \frac{n^4 (\text{Pr} - 1) + 8k^4 \text{Pr}}{\alpha} \times \right. \\ \left. \times \text{sh}\left(\frac{\alpha t}{2 \text{Pr}}\right) - n^2 \text{ch}\left(\frac{\alpha t}{2 \text{Pr}}\right) \right],$$

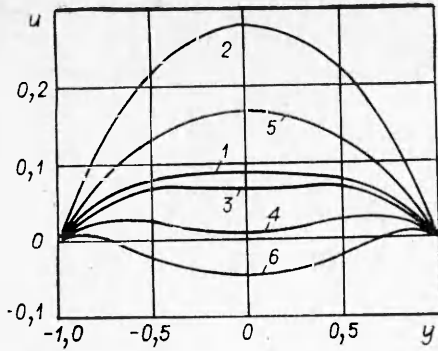
где  $n = \pi(j + 0,5)$ ;  $\alpha = \sqrt{n^4(\text{Pr} - 1)^2 - 16k^4 \text{Pr}}$ . Выражение для  $\theta(y, t)$  можно найти из уравнения (3). Так как при температуре Кюри жидкость теряет ферромагнитные свойства, то принятая зависимость  $M = M(T)$  не выполняется при  $T > T_c$ , следовательно, полученное решение (6) справедливо лишь при условии  $\theta(y, t) \leq 1$ , что в свою очередь накладывает ограничения на значения параметров  $\text{Pr}$ ,  $k$  и  $q$ .

Рассчитанные по формуле (6) профили скорости для значений  $\text{Pr} = 5$ ,  $q = 1$  представлены на фиг. 1, где кривые 1—3 соответствуют  $k = 0,5\pi$ , а 4—6 —  $k = 0,75\pi$ . Причем кривые 1, 4 — установившиеся профили скорости в канале, а 2, 3, 5, 6 — профили скорости соответственно в моменты времени  $t = 0,5; 2; 0,3$  и 1. Для сравнения на фиг. 2 приведены установившиеся профили скорости при  $q = 1$ ,  $k = 1,25\pi$  (кривая 1) и  $k = 1,75\pi$  (кривая 2).

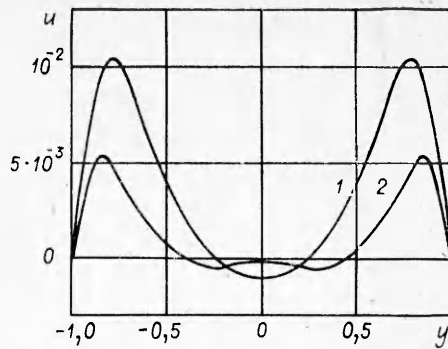
Анализ полученного решения показывает, что переходный процесс установления профиля скорости и температуры в канале может быть периодическим или аperiodическим в зависимости от соотношения параметров  $\text{Pr}$  и  $k$ . При  $16k^4 \text{Pr} > (0,5\pi)^4 (\text{Pr} - 1)^2$  переходный процесс будет периодическим (затухающие колебания), а при  $16k^4 \text{Pr} \leq (0,5\pi)^4 (\text{Pr} - 1)^2$  — аperiodическим. На фиг. 3 показаны зависимости отношения  $u(0, t)/u(0, \infty)$  от времени для значений параметров  $q = 1$ ,  $k = 0,25\pi$ . Кривые 1—3 соответствуют  $\text{Pr} = 0,3; 1; 3$ . При увеличении числа Прандтля возрастает максимальная амплитуда отклонения скорости  $u(y, t)$  от  $u(y, \infty)$  в переходном процессе, и время установления стационарного профиля также возрастает.

Интегрируя функцию  $u(y, \infty)$  по сечению канала, получим выражение для расхода жидкости при установившемся течении. Зависимости расхода  $Q$  от параметра  $k$  представлены на фиг. 4 для значений  $P = 0,5\pi$  и  $0,75\pi$  (кривые 1, 2). Полученные зависимости показывают, что при определенном значении параметра  $k$  расход магнитной жидкости в канале максимален. Дальнейшее увеличение градиента внешнего магнитного поля (увеличение параметра  $k$ ) приводит к уменьшению расхода.

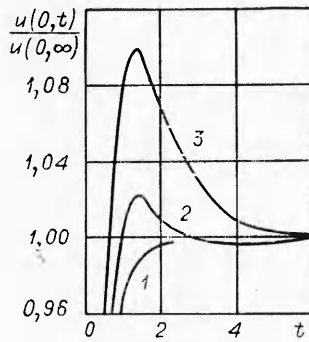
Рассмотрим теперь установившиеся колебания профилей скорости и температуры в канале под действием постоянного градиента внешнего магнитного поля и градиента давления, периодически меняющегося по закону  $P = 2k^2 - a \exp(i\omega t)$ , где  $a$  — безразмерная амплитуда,  $\omega$  — безразмерная частота. Подставляя выражение для  $P$  в уравнение (3)



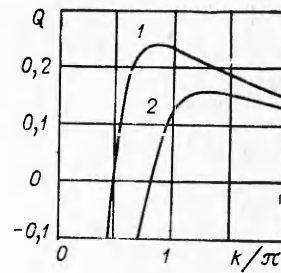
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

и применяя затем преобразование  $u = U \exp(i\omega t)$  и  $\theta = \Theta \exp(i\omega t)$ , приводим систему уравнений (3), (4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $U = U(y)$  и  $\Theta = \Theta(y)$  с граничными условиями

$$U(\pm 1) = 0, \quad \Theta(\pm 1) = 0.$$

В итоге получим

$$(7) \quad u(y, t) = \frac{ia \exp(i\omega t)}{4k^4 - \omega^2 \text{Pr}} \left[ \omega \text{Pr} - \frac{\omega \text{Pr} \beta - \omega^2 \text{Pr} (\text{Pr} - 1) - 8k^4}{2\beta} \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{ch}(s_1 y)}{\text{ch } s_1} - \frac{\omega \text{Pr} \beta + \omega^2 \text{Pr} (\text{Pr} - 1) + 8k^4}{2\beta} \frac{\text{ch}(s_2 y)}{\text{ch } s_2} \right],$$

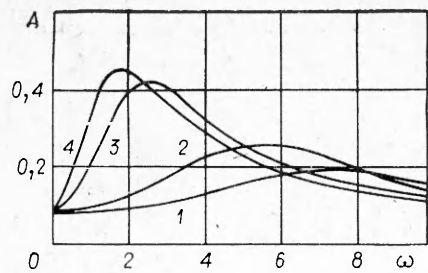
$$\text{где} \quad \beta = \sqrt{\omega^2 (\text{Pr} - 1)^2 + 16k^4}; \quad s_1 = \sqrt{\frac{i\omega (\text{Pr} + 1) + i\beta}{2}};$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{i\omega (\text{Pr} + 1) - i\beta}{2}}.$$

Выражение для  $\theta(y, t)$  можно получить из уравнения (3). Так же как и (6), решение (7) справедливо при выполнении условия  $|\theta(y, t)| \leq 1$ . Полученное решение (7) имеет комплексный вид, и далее рассматриваем отдельно действительную и мнимую части. Отметим, что в частном случае, когда  $4k^4 - \omega^2 \text{Pr} = 0$ , решение (7) запишется в виде

$$u(y, t) = \frac{ia \exp(i\omega t)}{\omega (\text{Pr} + 1)} \left[ \frac{\text{ch}(y \sqrt{i\omega (\text{Pr} + 1)})}{\text{ch}(\sqrt{i\omega (\text{Pr} + 1)})} - 1 \right],$$

т. е. амплитуда скорости не обращается в бесконечность. На фиг. 5 представлены зависимости амплитуды  $A$  установившегося колебания скорости от частоты  $\omega$ , рассчитанные по формуле (7) для сечения канала  $y = 0$  и значений  $k = 0,5\pi$ ,  $a = 1$  и  $\text{Pr} = 0,5; 1; 5; 10$  — соответственно кривые 1—4. Представленные зависимости показывают наличие явления ре-



Ф и г. 5

зонанса. При увеличении числа Прандтля резонансная частота уменьшается, а амплитуда колебания скорости при этом возрастает.

Безразмерным параметрам, используемым в расчетах, соответствуют значения физических величин, выбранные в пределах для  $L = 0,01 - 0,1\text{м}$ ,  $T_0 = 300 - 400\text{ К}$ ,  $\Lambda = 100 - 200\text{ А/м}\cdot\text{град}$ ,  $G = 10^4 - 10^5\text{ А/м}^2$ ,  $\eta = 10^{-3} - 10^{-2}\text{ кг/м}\cdot\text{с}$ ,  $\lambda = 0,1 - 1,0$

$\text{Вт/м}\cdot\text{град}$ ,  $c = 500 - 2000\text{ Дж/кг}\cdot\text{град}$ .

Аналогично можно рассмотреть течение Куэтта намагничивающейся жидкости при температуре, близкой к точке Кюри. Заметим, что одной из характерных особенностей при этом будет появление возвратных течений у неподвижной стенки.

В заключение отметим, что полученные особенности течений намагничивающейся жидкости обусловлены зависимостью объемной намагниченности от температуры и магнетокалорическим эффектом.

Автор выражает благодарность участникам научного семинара под руководством К. Б. Павлова за полезные обсуждения работы.

Поступила 4 XI 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озоле Р. Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980.
2. Rosensweig R. E. The fascinating magnetic fluids.— New Scientist., 1966, vol. 29, N 479.
3. Бозорт Р. М. Ферромагнетизм. М.: ИЛ, 1956.
4. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics.— Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 12.
5. Баштовой В. Г., Берковский Б. М. Термомеханика ферромагнитных жидкостей.— Магнитн. гидродинамика, 1973, № 3.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

УДК 532.542 : 660.095.26

### СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ С МЕНЯЮЩИМИСЯ С ГЛУБИНОЙ ПРЕВРАЩЕНИЯ СВОЙСТВАМИ

Д. А. Ваганов

(Черноголовка)

Исследование течения реагирующей жидкости с меняющимися в ходе химических превращений свойствами представляет значительный интерес в связи с анализом работы полимеризационных проточных реакторов вытеснения. Сопровождающее процессы полимеризации существенное увеличение вязкости реагирующей жидкости (до  $10^6$  и более раз) приводит к качественным изменениям картины течения, а это, в свою очередь, влияет на макрокинетические закономерности процесса.

В настоящей работе рассмотрен простейший случай изотермического течения реагирующей жидкости, когда глубина превращения и свойства жидкости однозначно определяются временем протекания реакции. Получено общее автомодельное решение задачи, проанализированы основные особенности течения, проявляющиеся при значительном возрастании вязкости реагирующей жидкости.

1. Рассматривается стационарное ламинарное течение реагирующей ньютоновской жидкости в трубе (проточном трубчатом реакторе). Вязкость  $\mu$  и плотность  $\rho$  жидкости в ходе химических превращений меняются от исходных значений  $\mu_0$  и  $\rho_0$  на входе в реактор до конечных  $\mu_1$  и  $\rho_1$  при полном превращении. Температура жидкости полагается постоянной, химические превращения не зависят от градиентов скорости течения, влиянием диффузии ввиду малости коэффициентов диффузии в жидкостях пренебрегаем. Глубина превращения и свойства реагирующей жидкости