

УДК 536.3+536.42

## **Нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в слое с частично поглощающими границами\***

**Н.А. Рубцов, С.Д. Слепцов**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mail: sleptsov@itp.nsc.ru

Рассматривается одномерный нагрев слоя серой полупрозрачной среды внешним источником излучения и конвекцией. Границы образца отражают, поглощают (излучают) и пропускают излучение. Показано, что динамика нагрева и характер температурных полей существенно зависят от оптических параметров границ.

**Ключевые слова:** радиационно-кондуктивный теплообмен, коэффициенты поглощения, отражения, пропускания, полупрозрачная среда.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Рассматривается одномерный нагрев слоя серой полупрозрачной среды внешним источником излучения и конвекцией. Границы слоя представляют собой тонкие изотермические пленки, обладающие теплофизическими свойствами основного слоя среды и отличными от него оптическими свойствами. Пленки могут поглощать (излучать), пропускать и отражать. Как правая, так и левая пленки для простоты принимаются одинаковыми по оптическим свойствам. Подобная модель использовалась в работе [1] при моделировании теплового состояния футеровки стеклоплавильной печи. Однако в этой работе пленки предполагались непрозрачными, абсолютно черными. Физическое обоснование подобной модели определяется формированием на поверхности полупрозрачной футеровки в реальных условиях слоев сажи, образующихся при сгорании топлива в печи, либо в процессе адсорбции пыли на наружной поверхности футеровки. Возможны иные ситуации, связанные с существенным изменением оптических свойств поверхностных слоев, претерпевающих фазовый переход. Настоящая работа развивает и уточняет идеи и результаты раннего исследования авторов [2].

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (МК-601.2008.8) и РФФИ (грант № 08-08-00527-а).

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с геометрической схемой задачи (рис. 1) на границе при  $x = 0$  (слева) тепловая энергия уносится собственным излучением образца и конвекцией.

К границе  $x = S_0$  (справа) подводятся радиационный и конвективный потоки, определяющие процесс нагрева образца. Нагрев продолжается до тех пор, пока температура границы образца не достигнет значения температуры фазового перехода  $T_f$ .

В предположении постоянных теплофизических свойств среды уравнение энергии в точке  $(x, t)$  слоя среды имеет вид:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq S(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Здесь  $a, \lambda$  — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала образца соответственно,  $\rho, c_p$  — плотность и теплоемкость образца,  $E$  — плотность результирующего радиационного потока (РРП) в серой среде, выражаемая через интенсивности излучения вперед —  $I^+(x, \mu, t)$  и назад —  $I^-(x, \mu, t)$  следующим образом:

$$E(x, t) = 2\pi \int_0^1 (I^+(x, \mu, t) - I^-(x, \mu, t)) \mu d\mu = E^+(x, t) - E^-(x, t), \quad (2)$$

где  $E^\pm(x, t)$  — плотность потоков полусферического (в пределах телесных углов  $\Omega = \pm 2\pi$ ) падающего излучения.

С учетом частичного поглощения (излучения) энергии пленками, покрывающими образец, граничные условия задачи записываются следующим образом:

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + A_1 [E^-(0, t) + \sigma_0 T_1^4] - \varepsilon_1 (1 + n^2) \sigma_0 T^4(0, t) = h_1 (T_1 - T(0, t)), \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T(S_0, t)}{\partial x} - h_2 (T_2 - T(S_0, t)) - A_2 [E^+(S_0, t) + E^*] + \varepsilon_2 (1 + n^2) \sigma_0 T^4(S_0, t) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $h_i, T_i, i = 1, 2$  — коэффициенты теплообмена с внешней средой и температуры среды слева и справа от образца,  $n$  — показатель преломления материала

образца,  $\sigma_0$  — постоянная Стефана–Больцмана,  $A_i, \varepsilon_i, i = 1, 2$  — полусферические значения поглощательных и излучательных (степеней черноты) способностей границ.

Ниже предполагается, что  $A_i$  и  $\varepsilon_i$  удовлетворяют балансовому соотношению безразмерных потоков для границ  $i = 1, 2$  —

$$A_i + R_i + D_i = 1. \quad (5)$$

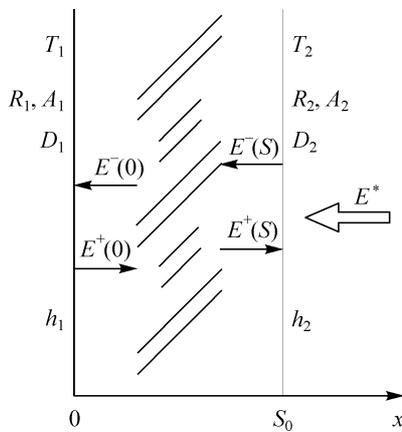


Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

Здесь  $R_i$  — предполагается фиксированным, а  $A_i$  ( $\varepsilon_i$ ) — переменным при условии (5),  $R_i$ ,  $D_i$  — полусферические значения отражательной и пропускательной способностей границ. Поскольку материал образца является преломляющим, то помимо соотношения (5), применимого по отношению к излучению, падающего на границу  $i$  со стороны окружающего образец пространства, приходится вводить балансовое соотношение к излучению, падающему на нее изнутри образца, со стороны материала слоя:

$$A_i' + R_i' + D_i' = 1.$$

Можно предположить, что в рассматриваемых условиях изотермичности пограничного слоя (пленки)  $A_i = A_i'$  ( $\varepsilon_i = \varepsilon_i'$ ), а  $R_i'$  определяется независимым образом с помощью инварианта Гершуна [3]  $(1 - R_i')n^2 = (1 - R_i)n_0^2$ , дающего соотношение

$$R_i' = 1 - \frac{1 - R_i}{n^2} n_0^2, \quad (6)$$

где  $n_0$  — показатель преломления среды, окружающей образец (в дальнейшем полагаем  $n_0 \equiv 1$ ).

Следовательно, при задаваемом значении  $A_i = A_i'$  значение  $D_i'$  определяется как

$$D_i' = \frac{1 - R_i}{n^2} n_0^2 - A_i'. \quad (7)$$

Как видно, из (6) и (7) вытекает условие, что при  $D_i' = 0$  следует соотношение  $A_i' + R_i' = 1$ , использованное ранее в работах авторов [4] при решении однофазной задачи Стефана для непроницаемых границ плоского образца с полупрозрачной средой.

Система (1), (3), (4) дополняется начальным условием

$$T(x, 0) = T_1. \quad (8)$$

Вводя безразмерные переменные  $\theta = T/T_r$ ,  $\xi = x/S_0$  и  $\eta = \frac{\lambda}{\rho c_p S_0^2} t$ , уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{N} \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (9)$$

— а краевые условия задачи (3), (4), (8) записываются соответственно как:

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \xi} + Bi_1(\theta(0, \eta) - \theta_1) + \frac{A_1}{N} \left( \Phi^- + \frac{\theta_1^4}{4} - \frac{\varepsilon_1}{A_1} \frac{(1+n^2)}{4} \theta^4(0, \eta) \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \xi} - Bi_2(\theta_2 - \theta(1, \eta)) - \frac{A_2}{N} \left( \Phi^+ + F^* - \frac{\varepsilon_2}{A_2} \frac{(1+n^2)}{4} \theta^4(1, \eta) \right) = 0, \quad (11)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_1. \quad (12)$$

Здесь  $N = \frac{\lambda}{4\sigma_0 T_f^3 S_0}$  — радиационно-кондуктивный параметр,  $\Phi^\pm \equiv \Phi^\pm(\tau, \eta) = \frac{E^\pm(x, t)}{4\sigma_0 T_f^4}$  — безразмерная плотность полусферических потоков излучения, падающего в объем с сечением  $(x, t)$ ,  $\tau = \alpha\xi\tau_0$  — оптическая глубина слоя,  $\tau_0 = \alpha S_0$  — оптическая толщина слоя,  $\alpha$  — коэффициент объемного поглощения излучения,  $Bi_i = h_i S_0 / \lambda$  — число Био,  $F^* = E^* / 4\sigma T_f^4$  — безразмерная плотность потока, падающего на образец с правой стороны,  $T_f$  — определяющая температура, равная температуре фазового перехода.

Расчеты переноса излучения в полупрозрачном слое поглощающего и излучающего материалов осуществляются с помощью модифицированного метода средних потоков [4].

В этом случае уравнение переноса излучения преобразуется к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений, записываемых относительно полусферических потоков излучения  $\Phi^\pm(\tau, \eta)$  в сечении  $\tau$  в момент  $\eta$  в следующем виде:

$$\frac{d}{d\tau} (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) + (m^+(\tau)\Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau)\Phi^-(\tau, \eta)) = n^2 \Phi_0(\tau, \eta), \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m^+(\tau)\delta^+(\tau)\Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau)\delta^-(\tau)\Phi^-(\tau, \eta)) + (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) = 0. \quad (14)$$

Здесь  $\Phi_0(\tau, \eta) \equiv \theta^4(\tau, \eta)$  — безразмерная плотность потока объемного равновесного излучения,  $m^\pm$  и  $\delta^\pm$  — коэффициенты распределения интенсивности излучения по направлениям и его диффузии в сечении  $\tau$  объема слоя, которые определяются из решения уравнения переноса излучения [5].

Граничные условия на диффузно отражающих, пропускающих и частично поглощающих (излучающих) поверхностях вычисляются следующим образом:

$$\Phi^+(0, \eta) = \varepsilon_1 n^2 \frac{\theta^4(0, \eta)}{4} + D_1 \frac{\theta_1^4}{4} + R_1 \Phi^-(0, \eta), \quad (15)$$

$$\Phi^-(1, \eta) = \varepsilon_2 n^2 \frac{\theta^4(1, \eta)}{4} + D_2 F^* + R_2 \Phi^+(1, \eta), \quad (16)$$

где  $\varepsilon_i$ ,  $D_i$ ,  $R_i$  определяются с учетом (5)–(7).

Безразмерная плотность потоков результирующего излучения в сечении  $(\tau, \eta)$  будет

$$\Phi(\tau, \eta) = \Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta). \quad (17)$$

Общее решение задачи сводится к определению температурного поля  $\theta(\xi, \eta)$  и плотностей потоков результирующего излучения  $\Phi(\xi, \eta)$  в области  $G\{0 \leq \xi \leq 1, \eta > 0\}$ . Краевая задача (9)–(12) решается конечно-разностным методом, а нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций.

Для решения радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (9)–(16) решается методом матричной факторизации.

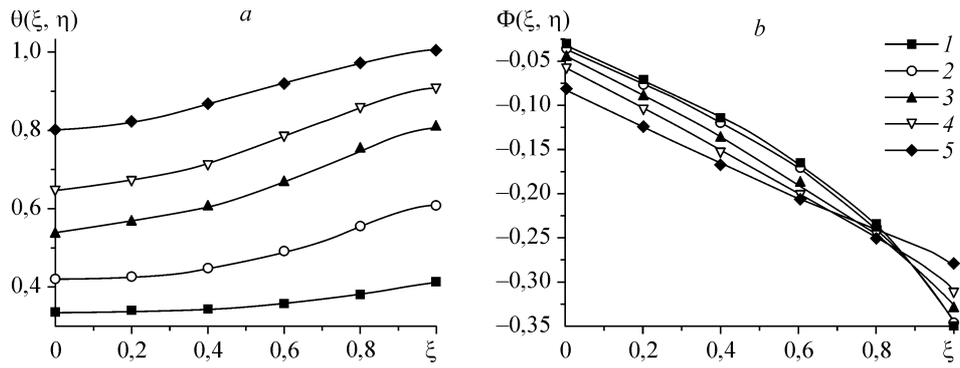


Рис. 2. Температурное поле (а) и поле потока результирующего излучения (b) при коэффициентах поглощения границ  $A_i = 0$ .

Время = 750 (1), 2550 (2), 5010 (3), 6900 (4), 9510 (5) с.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Ниже представлены результаты численного моделирования процессов нагрева образца из слоя полупрозрачного материала с физическими параметрами:  $S_0 = 0,1$  м,  $T_1 = 300$  К,  $T_2 = 900$  К,  $E^* = 200$  кВт, теплофизические свойства материала близки к свойствам флюорита и составляют:  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 1$  Вт/(м<sup>2</sup>К),  $a = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, коэффициент конвективной теплоотдачи  $h_{1,2} = 1$  Вт/(м<sup>2</sup>град). Оптические параметры образца: показатель преломления  $n = 1,5$ , коэффициент объемного поглощения  $\alpha = 10$  м<sup>-1</sup>, коэффициенты отражения  $R_{1,2} = 0,1$ .

Численное исследование проводилось с целью определения влияния поглощательной (излучательной) способности полупрозрачных границ слоя на тепловое состояние образца в целом. Если поглощение (излучение) границ отсутствует и их пропускательная способность составляет  $D_2 = 0,9$ , то профили температур оказываются равномерными, а плотность потока результирующего излучения,  $\Phi(\xi, \eta)$ , меняется линейно по толщине слоя и занимает сравнительно узкий диапазон значений (рис. 2). Процесс нагрева слоя, при котором температура правой границы достигает предельного значения,  $\theta(1, \eta) = 1,0$ , завершается сравнительно быстро ( $t = 9510$  с). С ростом коэффициента поглощения ( $A_2 = 0,1, 0,2$ ) и снижения пропускательной способности границ ( $D_2 = 0,8, 0,7$ ) процесс нагрева слоя (рис. 3, 4) и достижения предельного значения  $\theta(1, \eta) = 1,0$  сопровождается небольшими

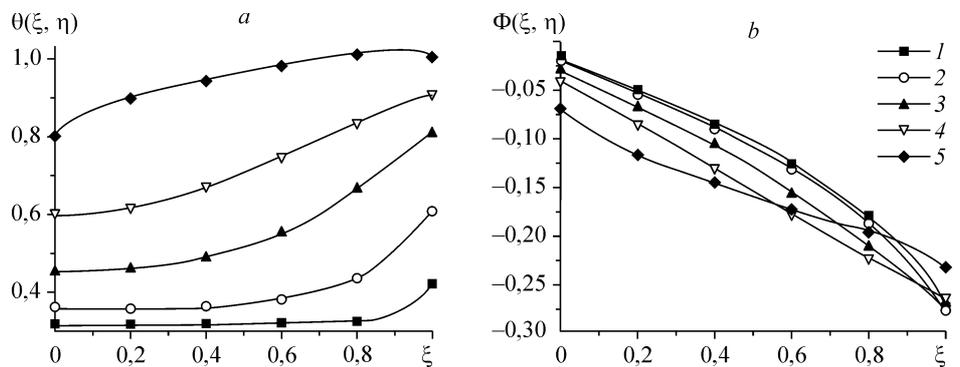


Рис. 3. Температурное поле (а) и поле потока результирующего излучения (b) при коэффициентах поглощения границ  $A_i = 0,1$ .

Время = 10 (1), 1300 (2), 3810 (3), 6810 (4), 12910 (5) с.

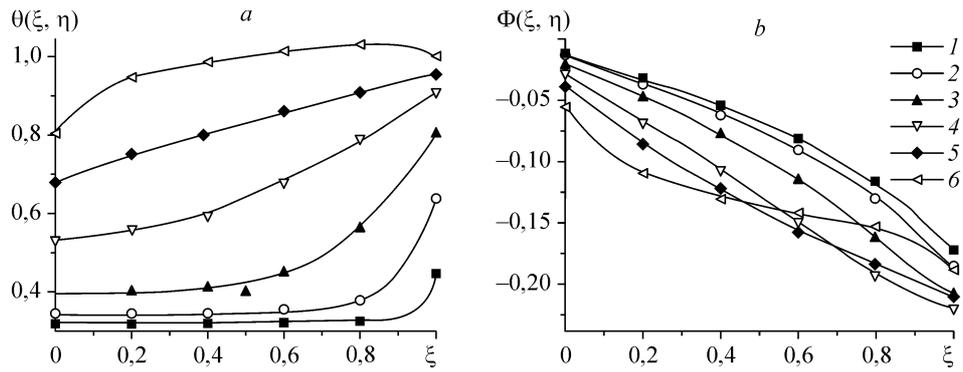


Рис. 4. Температурное поле (а) и поле потока результирующего излучения (b) при коэффициентах поглощения границ  $A_i = 0,2$ .  
 Время = 10 (1), 610 (2), 2410 (3), 6100 (4), 10300 (5), 17810 (6) с.

перегревами слоя, ростом предельной скорости нагрева правой границы, увеличением разброса значений потока  $\Phi(\xi, \eta)$  по слою и заметным увеличением времени нагрева образца (см. рис. 4,  $t = 17910$  с) в целом.

Дальнейшее увеличение значений  $A_2$  и снижение  $D_2$  сохраняет перегрев слоя, увеличивает разброс значений потоков излучения по толщине слоя и замедляет процесс нагрева образца (рис. 5). При достижении значений  $A_2 = 0,4$  и  $D_2 = 0,5$  процесс нагрева существенно замедляется ( $t = 58507$  с), несколько уменьшается перегрев области слоя, примыкающей к правой границе, распределение значений потоков излучения  $\Phi(\xi, \eta)$  приобретает нелинейный характер с широким разбросом значений (рис. 6).

При этом вблизи правой границы поток излучения  $\Phi(\xi, \eta)$  претерпевает существенные изменения, характеризующиеся наличием экстремумов (см. рис. 6, b). Такое обстоятельство связано с тем, что в процессе нагрева пластины и повышения температуры правой границы величины конвективного потока тепла претерпевают переход через нулевые значения, и правая поверхность из тепловоспри-

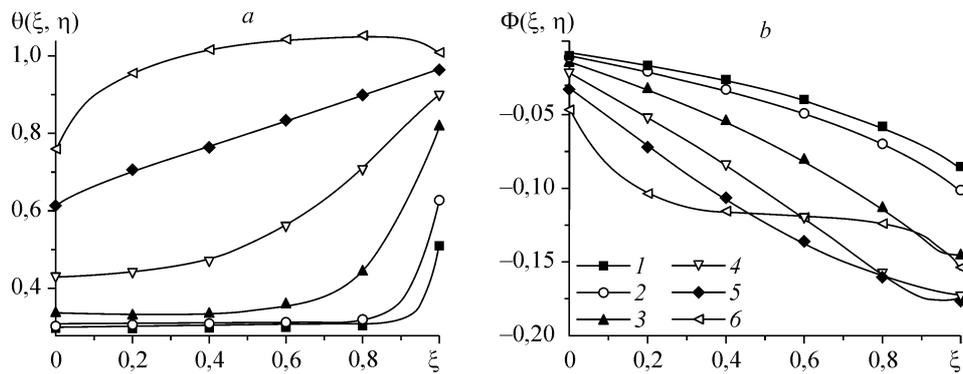


Рис. 5. Температурное поле (а) и поле потока результирующего излучения (b) при коэффициентах поглощения границ  $A_i = 0,3$ .  
 Время = 10 (1), 100 (2), 1310 (3), 4710 (4), 10550 (5), 29710 (6) с.

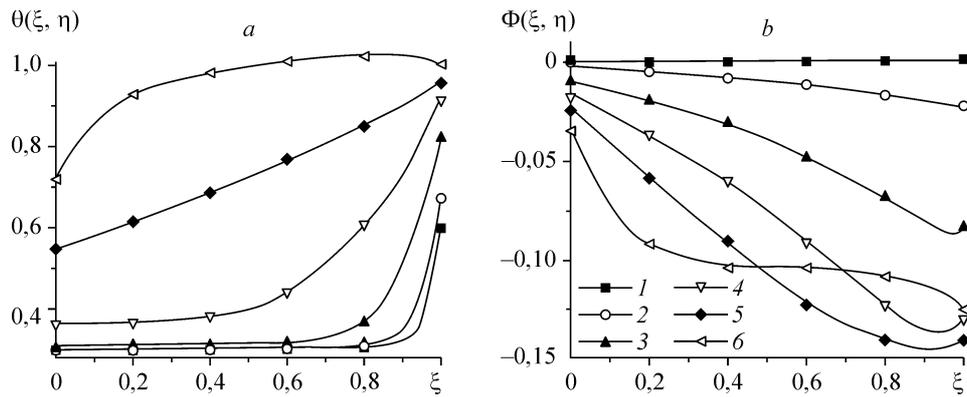


Рис. 6. Температурное поле (а) и поле потока результирующего излучения (b) при коэффициентах поглощения границ  $A_i = 0,4$ .  
 Время = 10 (1), 150 (2), 800 (3), 3120 (4), 9710 (5), 58507 (6) с.

мающей преобразуется в теплоотдающую границу образца (рис. 7, а). Заметим, что скорость перехода конвективного потока тепла через нулевые значения существенно увеличивается по мере роста значений  $A_2$ .

Существенно иной характер конвективной теплоотдачи отмечается на левой границе образца (см. рис. 7, b), где осуществляется отвод тепла в окружающее пространство. При этом нагрев левой границы образца носит монотонный характер, существенно зависящий от поглощательной (излучательной) способности границ образца в целом.

### ВЫВОДЫ

Наличие частично поглощающих, отражающих и пропускающих излучение изотермических покрытий (пленок) на поверхностях плоского образца из полупрозрачного материала, нагреваемого внешним высокотемпературным источником излучения и конвективным потоком тепловой энергии, существенно искажает динамику тепловых процессов в слое и на его границах по сравнению с аналогичным процессом в образце с прозрачными границами.

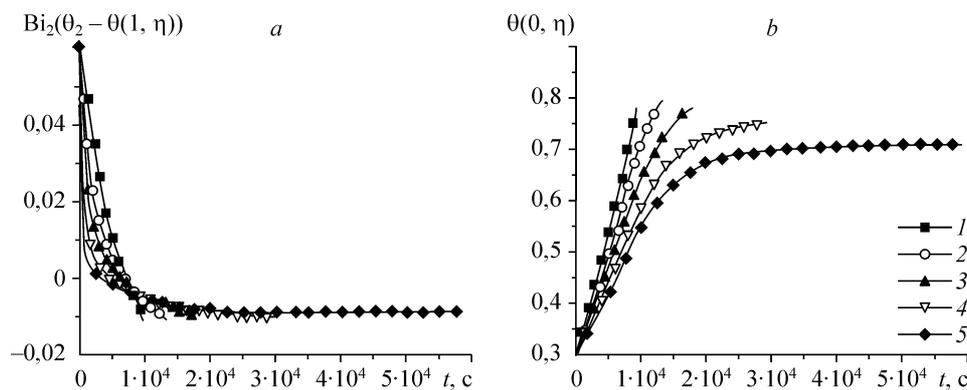


Рис. 7. Конвекция правой границы и эволюция роста температуры левой границы со временем при разных коэффициентах поглощения границ.  
 $A = 0$  (1), 0,1 (2), 0,2 (3), 0,3 (4), 0,4 (5) с.

Отмечаются перегревы средней области слоя образца и существенное замедление темпов его нагрева по мере роста поглощательной (излучательной) способности границ. При этом наблюдается инверсия конвективного потока тепла на правой границе и высокая чувствительность к ней распределения значений плотностей потоков результирующего излучения по слою образца.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Le Dez V., Yousefian F., Vaillon R. et al.** Problem de Stefan direct dans un milieu semitransparent gris // J. Phys. III France. — 1996. — Vol. 6. — P. 373–390.
2. **Рубцов Н.А., Слепцов С.Д.** Влияние граничных условий на нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в слое полупрозрачной среды // Теплофизика и аэромеханика. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 95–103.
3. **Рубцов Н.А.** К определению граничных условий радиационного теплообмена на плоской поверхности раздела двух сред // Теплофизика и аэромеханика. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 87–102.
4. **Рубцов Н.А., Саввинова Н.А., Слепцов С.Д.** Однофазная задача Стефана для полупрозрачной среды с учетом отражения излучения // Теплофизика и аэромеханика. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 255–264.
5. **Пономарев Н.Н.** О решении задач переноса лучистой энергии модифицированным методом средних потоков // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1979. — Вып. 3, № 13. — С. 64–68.

*Статья поступила в редакцию 4 июля 2008 г.*