УДК 532.546

АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОТОКА НА ОСНОВЕ "В СРЕДНЕМ ТОЧНОГО" РЕШЕНИЯ

А. И. Филиппов, П. Н. Михайлов*,
О. В. Ахметова*, М. А. Горюнова*

Уфимский государственный авиационный технический университет,
450025 Уфа
* Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан,
453103 Стерлитамак
E-mail: mihaylov_pn@rambler.ru

Построено температурное поле в скважине на основе "в среднем точного" решения, позволяющего исследовать задачи подземной термодинамики и тепломассопереноса. Задача представлена в виде последовательности задач смешанного типа, решения которых дают соответствующие коэффициенты асимптотического разложения, вид остаточного члена и функций, учитывающих наличие пограничного слоя, для которых также найдены аналитические решения. Показано, что предложенный модифицированный асимптотический метод обеспечивает обращение в нуль решения осредненной задачи для остаточного члена.

Ключевые слова: скважина, температурное поле, асимптотический метод.

Введение. Температурные измерения широко используются при исследовании скважин и пластов [1–4]. Вследствие большой сложности термодинамических процессов, при описании которых необходимо использовать развитые механические модели течения многофазных смесей в трубах, получены приближенные аналитические решения основной задачи термокаротажа только для средней по сечению скважины температуры. Ранее показано, что реальные радиальные распределения температуры могут быть найдены на основе асимптотических методов в первом приближении [5].

Попытки построения теории тепловых процессов в скважине на основе асимптотических методов предприняты в работах [6–10]. В [9] в предположении постоянства температурного градиента окружающих скважину пород построено приближенное аналитическое решение с учетом радиального профиля скорости. Новый способ расчета средней по сечению скважины описан в [10].

В отличие от [1–10] в настоящей работе за счет построения решений, учитывающих наличие пограничного слоя [11], устранены вязкие границы [12]. На основе "в среднем точного" асимптотического решения в развитие предложенного ранее подхода [10] найдены решения основной задачи термокаротажа в нулевом и первом приближениях.

Математическая постановка задачи. На рис. 1 представлена геометрия задачи о температурном поле жидкости, текущей в трубе радиусом r_0. Предполагается, что окружающая среда однородная и анизотропная [14], температура отдаленных от скважины участков пород изменяется по линейному закону по мере увеличения глубины скважины z_d; рассматривается диапазон глубин, в котором отсутствует влияние сезонных колебаний температуры на поверхности. На искомое решение накладывается также условие

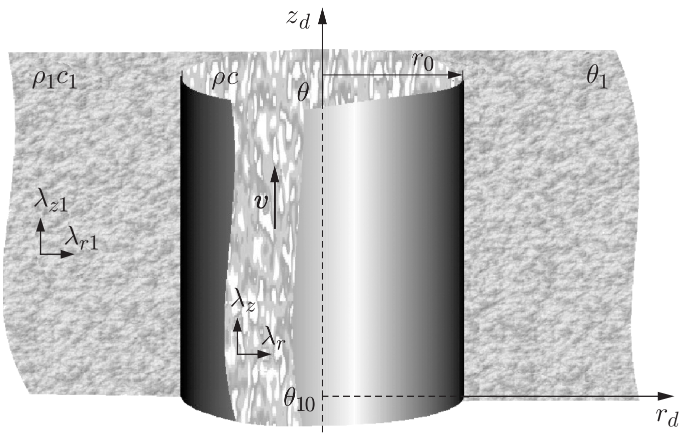

Рис. 1. Геометрия задачи

симметрии, заключающееся в том, что производная по радиальной координате на оси z_d цилиндрической системы координат, направленной вверх по оси трубы, в центре скважины обращается в нуль.

Поле скоростей жидкости в трубе имеет только одну отличную от нуля составляющую — в направлении оси z_d: $\boldsymbol{v} = (0, 0, v)$. Предполагается, что скорость жидкости в трубе не зависит от расстояния до оси скважины и совпадает с осредненным значением. Движущаяся жидкость также приобретает фиктивные ортотропные свойства вследствие воздействия турбулентности [13].

Введем следующие безразмерные переменные:

$$r = \frac{r_d}{r_0}, \quad z = \frac{z_d}{D}, \quad \mathrm{Fo} = \frac{\tau a_{1r}}{r_0^2}, \quad T_1 = \frac{\theta_1 - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_0}, \quad \theta_0 = \Gamma D, \quad \chi = \frac{c_1 \rho_1}{c\rho},$$

$$\nu = \frac{r_0}{D}, \quad T = \frac{\theta - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_0}, \quad \Lambda = \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{v r_0}{a_{1r}}, \quad H = \frac{\eta \rho g r_0}{\nu \theta_0}.$$

Тогда математическая постановка задачи включает уравнение теплопроводности в окружающем трубу массиве

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r}\Big), \qquad r > r_0, \quad \tau > 0, \quad z > 0 \tag{1}$$

и уравнение конвективной теплопроводности флюида в скважине

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \lambda_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\Big(r \frac{\partial \theta}{\partial r}\Big) - \rho c v \frac{\partial \theta}{\partial z} + q, \qquad r < r_0, \quad \tau > 0, \quad z > 0 \tag{2}$$

(λ_r, λ_z — соответствующие осям компоненты тензора теплопроводности жидкости). На границе трубы и окружающего массива заданы условия равенства температур и тепловых потоков:

$$\theta\big|_{r=1} = \theta_1\big|_{r=1}, \qquad \lambda_r \frac{\partial \theta}{\partial r}\Big|_{r=1} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r}\Big|_{r=1}. \tag{3}$$

Начальные условия соответствуют естественной невозмущенной температуре Земли, возрастающей по мере увеличения глубины z по линейному закону

$$\theta\big|_{\tau=0} = \theta_1\big|_{\tau=0} = \theta_{01} - \Gamma z \tag{4}$$

и равной температуре в удаленных от трубы точках окружающего массива

$$\theta_1\big|_{r\to\infty} = \theta_{01} - \Gamma z. \tag{5}$$

В точке $z = 0$ температура потока известна:

$$\theta\big|_{z=0} = \theta_{10}(\tau). \tag{6}$$

Для обеспечения единственности решения задачи необходимо добавить граничные условия на оси z, однако необходимость записи их в явном виде отсутствует, поскольку вторыми производными по z, как показано ниже, можно пренебречь.

В уравнениях (1), (2) в слагаемых, содержащих вторую производную температуры по вертикальной координате, появляется малый множитель — квадрат величины $\nu = r_0/D \approx 10^{-4}$ ($r_0 \approx 0{,}1$ м — радиус скважины; $D \approx 10^3$ м — длина скважины или интервал, в котором измеряется температура). Поэтому слагаемые, содержащие коэффициент ν^2, в уравнениях (1), (2) опущены.

В рассматриваемой задаче, записанной в безразмерных переменных, заменой Λ на $\varepsilon\Lambda$ формально введен параметр асимптотического разложения ε [5]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big) = 0, \qquad r > 1, \quad \mathrm{Fo} > 0, \quad z > 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{\chi}{\varepsilon\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T}{\partial r}\Big) + \mathrm{Pe}\,\nu\Big(\frac{\partial T}{\partial z} - 1 + H\Big) - Q(r, z, \mathrm{Fo}) = 0,$$

$$r < 1, \qquad \mathrm{Fo} > 0, \qquad z > 0, \tag{7}$$

$$T\big|_{r=1} = T_1\big|_{r=1}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = \varepsilon\Lambda\,\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$T\big|_{\mathrm{Fo}=0} = T_1\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad T_1\big|_{r\to\infty} = 0, \qquad T\big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}).$$

Здесь $T_0(\mathrm{Fo})$ — температурный сигнал пласта, определяемый как относительная разность температур в скважине $\theta_{10}(\tau)$ и удаленной окружающей среде θ_{01} при $z = 0$: $T_0(\mathrm{Fo}) = (\theta_{10}(\tau) - \theta_{01})/\theta_0$.

Решение задачи (7) представляется в виде асимптотических по параметру ε формул

$$T = T^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i T^{(i)} + \Theta^{(i)}, \qquad T_1 = T_1^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i T_1^{(i)} + \Theta_1^{(i)}, \tag{8}$$

где i — порядковый номер приближения. Способ решения описан в работе [9].

Нулевое приближение представляет собой усредненные по сечению скважины значения температуры, что существенно для оценки физических процессов.

Точность первого приближения определяется оценкой остаточного члена. Коэффициент $T^{(1)}$ может быть найден таким образом, чтобы осредненное значение остаточного члена обращалось в нуль ($\langle\Theta\rangle = 0$) при любых значениях параметра ε. Такое асимптотическое приближение называется “в среднем точным”.

Решение задачи о температурном поле в скважине в нулевом приближении в пространстве изображений Лапласа — Карсона имеет вид

$$T^{(0)u} = \int\limits_0^z \frac{\mathrm{Pe}\,\nu(1 - H) + 2Q_1^u(1, \xi, p)}{\mathrm{Pe}\,\nu}\,\mathrm{e}^{-\alpha_2(z-\xi)}\,d\xi + T_0^u(p)\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 z},$$

$$r < 1, \qquad z > 0.$$

В отсутствие источников выражение для нулевого коэффициента в пространстве оригиналов при малых временах принимает следующий вид:

$$T^{(0)} = T_0 \operatorname{erfc}\Big(\frac{\chi z}{\mathrm{Pe}\,\nu\sqrt{\mathrm{Fo}-z/(\mathrm{Pe}\,\nu)}}\Big)\Phi\Big(\mathrm{Fo}-\frac{z}{\mathrm{Pe}\,\nu}\Big) + \\ + (1-H)\int\limits_0^z \operatorname{erfc}\Big(\frac{\chi(z-\xi)}{\mathrm{Pe}\,\nu\sqrt{\mathrm{Fo}-(z-\xi)/(\mathrm{Pe}\,\nu)}}\Big)\Phi\Big(\mathrm{Fo}-\frac{z-\xi}{\mathrm{Pe}\,\nu}\Big)\,d\xi, \qquad (9)$$

$$\mathrm{Fo} > 0, \qquad r < 1, \qquad z > 0.$$

Полученное решение позволяет построить зависимости температуры от времени и вертикальной координаты в зоне влияния температурных сигналов пласта (точки I). В этой зоне ($0 < z < 1$) геотермический перепад температуры ΓD сопоставим с величиной температурной аномалии в пласте θ_{01}. Расчеты выполнены при следующих значениях параметров: $H = 0{,}1$, $\mathrm{Pe} = 10^4$, $\nu = 10^{-4}$.

На рис. 2 представлена зависимость относительной температуры в скважине от безразмерной вертикальной координаты в зоне влияния температурных сигналов пласта в различные моменты времени. При малых значениях z кривые, построенные без учета и с учетом температурного сигнала пласта, различаются существенно. С увеличением z различие между этими кривыми уменьшается. Разность между значениями $T^{(0)}$ в точках на указанных кривых соответствует вкладу температурного сигнала пласта в общее значение температуры. Анализ кривых показывает, что с увеличением времени протяженность

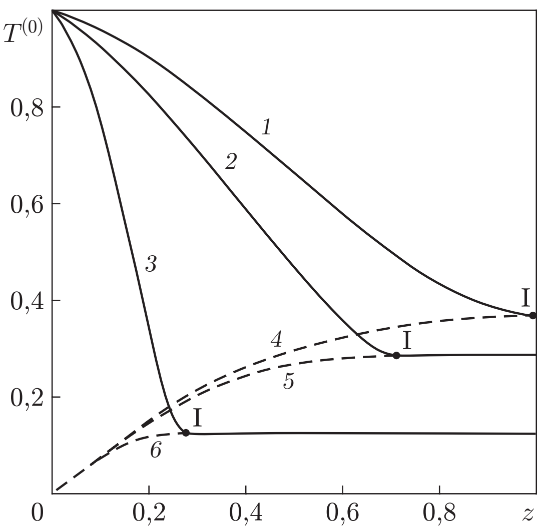

Рис. 2

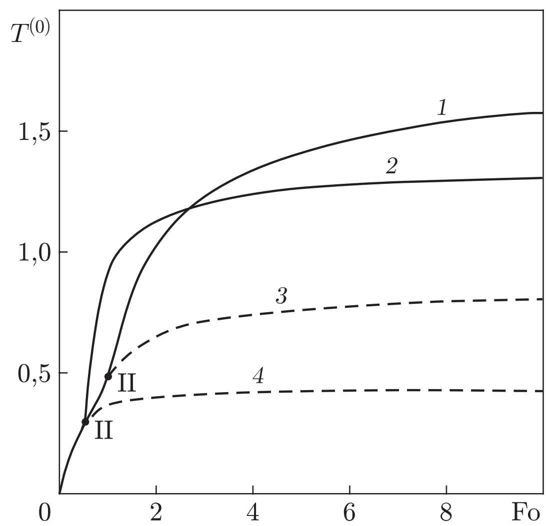

Рис. 3

Рис. 2. Зависимость температуры в скважине от безразмерной вертикальной координаты в зоне влияния температурных сигналов пласта в различные моменты времени:
1, 4 — Fo = 1,5; *2, 5* — Fo = 1; *3, 6* — Fo = 0,3; штриховые линии — единичный температурный сигнал, сплошные — нулевой температурный сигнал

Рис. 3. Зависимость температуры в скважине от безразмерного времени в зоне влияния температурных сигналов пласта при различных значениях z:
1, 3 — $z = 1$; *2, 4* — $z = 0{,}5$; сплошные линии — единичный температурный сигнал, штриховые — нулевой температурный сигнал

зоны влияния температурного сигнала пласта увеличивается и составляет $z = 0{,}25$ при $\mathrm{Fo} = 0{,}3$, $z = 0{,}75$ при $\mathrm{Fo} = 1$, $z = 1$ при $\mathrm{Fo} = 1{,}5$.

На рис. 3 приведена зависимость температуры в скважине в нулевом приближении от безразмерного времени в зоне влияния температурных сигналов пласта. Из рис. 3 следует, что при малых временах вклад температурных сигналов пласта отсутствует, поэтому соответствующие кривые *2, 4* и *1, 3* совпадают, при подходе температурного сигнала (точки II) кривые расходятся. Разность между значениями $T^{(0)}$ в точках на указанных кривых соответствует вкладу температурного сигнала пласта. На рис. 3 видно, что с увеличением z время подхода температурного сигнала возрастает.

Из (9) следует, что решение задачи в нулевом приближении описывает зависимость средней по сечению скважины температуры от времени, но не описывает радиальное распределение температуры в скважине. Для решения задачи о радиальном распределении температуры решим краевую задачу для первых коэффициентов разложения [9]. При этом удовлетворить условию $T^{(1)}\big|_{z=0} = 0$ при любых r не представляется возможным, что свидетельствует о наличии пограничного слоя при малых z и приводит к необходимости изменения граничного условия. Очевидно, что граничное условие должно обеспечить повышение точности решения, зависящей от величины остаточного члена асимптотического разложения.

Вывод дополнительного условия из задачи для остаточного члена. Подставив в (7) асимптотические формулы

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta^{(1)}, \qquad T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta^{(1)},$$

с учетом того что нулевые коэффициенты разложения и радиальные производные первых коэффициентов удовлетворяют рассмотренным выше задачам, получим задачу для остаточных членов асимптотических разложений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Theta_1}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial \Theta_1}{\partial r}\Big) = 0,\\
\varepsilon\,\frac{\partial \Theta}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial \Theta}{\partial r}\Big) + \mathrm{Pe}\,\nu\varepsilon\,\frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\varepsilon^2\Big(\frac{\partial T^{(1)}}{\partial\,\mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}\,\nu\,\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\Big),\\
\Theta\big|_{r=1} = \Theta_1\big|_{r=1}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial r}\Big|_{r=1} = \Lambda\varepsilon\,\frac{\partial\,(\varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1)}{\partial r}\Big|_{r=1},\\
(\varepsilon T + \Theta)\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad (\varepsilon T_1 + \Theta_1)\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0,\\
(\varepsilon T^{(1)} + \Theta)\big|_{z=0} = 0, \qquad \Theta_1\big|_{r\to\infty} = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Осредним задачу (10) по r в пределах от 0 до 1: $\langle\Theta\rangle = 2\displaystyle\int_0^1 r\Theta\,dr$. Если среднеинтегральные значения температуры в точках $z = 0$ и $\mathrm{Fo} = 0$ обращаются в нуль:

$$\langle T^{(1)}\rangle\big|_{z=0} = 0, \qquad \langle T^{(1)}\rangle\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \tag{11}$$

то осредненная задача для остаточного члена имеет тривиальное решение, т. е. решение исходной задачи (7) является “точным в среднем”.

Первый коэффициент асимптотического разложения температуры в скважине с учетом условия (11) в пространстве изображений определяется по формуле

$$T^{(1)u} = -\frac{\Lambda r^2}{2}\sqrt{p}\,kT^{(0)u} + \frac{\Lambda}{4}\sqrt{p}\,kT_0^u(p)\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 z} +$$

$$+\Lambda\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-\alpha_2(z-\xi)}\Big(\frac{\chi p k^2}{2\,\mathrm{Pe}\,\nu}T^{(0)u} + \frac{\sqrt{p}\,k(1-H)}{4}\Big)d\xi + \frac{\Lambda}{\chi}\Big(2Q_3^u(1,0,p) - \frac{Q_1^u(1,0,p)}{4}\Big)\mathrm{e}^{-\alpha_2 z} +$$

$$+\frac{\Lambda r^2}{2\chi}Q_1^u(1,z,p) + \frac{2\Lambda k\sqrt{p}}{\mathrm{Pe}\,\nu}\int\limits_0^z Q_2^u(1,\xi,p)\,\mathrm{e}^{-\alpha_2(z-\xi)}\,d\xi -$$

$$-\frac{\Lambda}{\chi}Q_2^u(r,z,p) - \frac{\Lambda}{4\chi}\int\limits_0^z\Big(\alpha_2 Q_1^u(1,\xi,p) + \frac{\partial Q_1^u(1,\xi,p)}{\partial\xi}\Big)\mathrm{e}^{-\alpha_2(z-\xi)}\,d\xi +$$

$$+2\,\frac{\Lambda}{\chi}\int\limits_0^z\Big(\frac{p}{\mathrm{Pe}\,\nu}Q_3^u(1,\xi,p) + \frac{\partial Q_3^u(1,\xi,p)}{\partial\xi}\Big)\mathrm{e}^{-\alpha_2(z-\xi)}\,d\xi,\qquad r<1,\quad z>0. \tag{12}$$

В отсутствие источников первый коэффициент разложения в пространстве оригиналов для малых времен Fo определяется следующим образом:

$$T^{(1)} = \Lambda\Phi\Big(\mathrm{Fo}-\frac{z}{\mathrm{Pe}\,\nu}\Big)\Big\{\frac{1-2r^2}{4}\,\frac{T_0}{\sqrt{\pi(\mathrm{Fo}-z/(\mathrm{Pe}\,\nu))}}\exp\Big(-\frac{\chi^2 z^2}{\mathrm{Pe}^2\,\nu^2(\mathrm{Fo}-z/(\mathrm{Pe}\,\nu))}\Big) -$$

$$-\frac{\chi(1-H)}{2}\,z\exp\left(4\chi^2\,\mathrm{Fo}\right)\mathrm{erfc}\Big[\chi\Big(2\sqrt{\mathrm{Fo}-\frac{z}{\mathrm{Pe}\,\nu}} + \frac{z}{\mathrm{Pe}\,v\sqrt{\mathrm{Fo}-z/(\mathrm{Pe}\,\nu)}}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\chi T_0 z}{2\,\mathrm{Pe}\,\nu}\,\psi\Big(\frac{2\chi z}{\mathrm{Pe}\,\nu},\mathrm{Fo}-\frac{z}{\mathrm{Pe}\,\nu}\Big)\Big\} +$$

$$+\Lambda\,\frac{1-2r^2}{4}(1-H)\int\limits_0^z\Phi\Big(\mathrm{Fo}-\frac{z-\xi}{\mathrm{Pe}\,\nu}\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi(\mathrm{Fo}-(z-\xi)/(\mathrm{Pe}\,\nu))}}\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{\chi^2(z-\xi)^2}{\mathrm{Pe}^2\,\nu^2(\mathrm{Fo}-(z-\xi)/(\mathrm{Pe}\,\nu))}\Big)d\xi +$$

$$+\Lambda\,\frac{\chi(1-H)}{2}\int\limits_0^z\Phi\Big(\mathrm{Fo}-\frac{z-\xi}{\mathrm{Pe}\,\nu}\Big)\exp\left(4\chi^2\,\mathrm{Fo}\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{erfc}\Big[\chi\Big(2\sqrt{\mathrm{Fo}-\frac{z-\xi}{\mathrm{Pe}\,\nu}} + \frac{z-\xi}{\mathrm{Pe}\,\nu\sqrt{\mathrm{Fo}-(z-\xi)/(\mathrm{Pe}\,\nu)}}\Big)\Big]\,d\xi,\qquad r<1,\quad z>0.$$

Найденное в первом приближении решение является необходимым для детального описания температурного поля в скважине. Это решение позволяет проводить расчеты радиальных распределений температуры в скважинах и ее изменения по мере увеличения глубины.

На рис. 4 приведена зависимость перепада температуры между стенкой и осью скважины $\tilde{T} = T^{(1)} - T^{(1)}\big|_{r=1}$ от безразмерного времени на различных расстояниях от пласта.

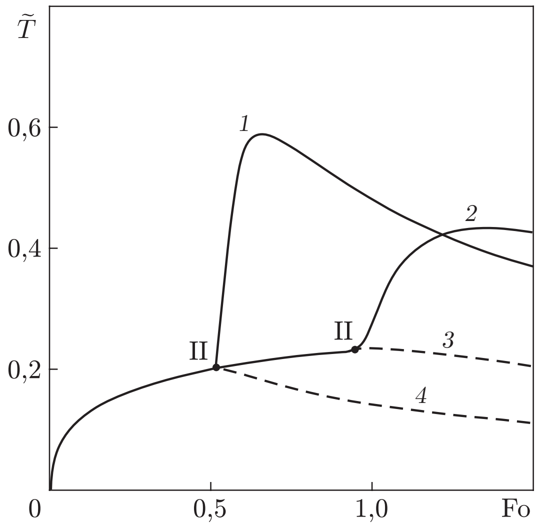

Рис. 4

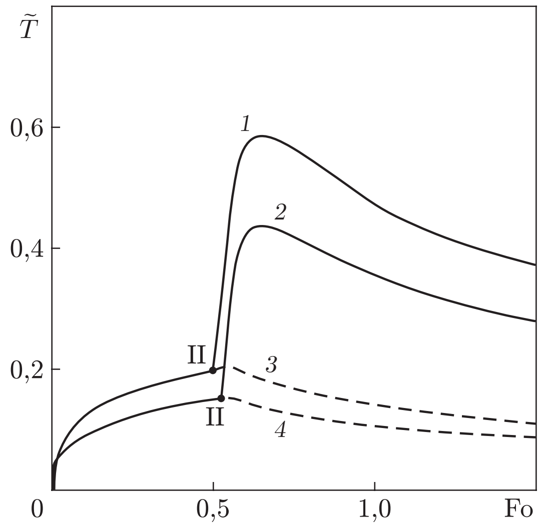

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость перепада температуры между стенкой и осью скважины от безразмерного времени на различных расстояниях от пласта:
1, 4 — $z = 0{,}5$; *2, 3* — $z = 0{,}9$; сплошные линии — единичный температурный сигнал, штриховые — нулевой температурный сигнал

Рис. 5. Зависимость перепада температуры между стенкой и осью скважины от безразмерного времени на различных безразмерных расстояниях от оси скважины:
1, 4 — $r = 0$; *2, 3* — $r = 0{,}5$; сплошные линии — единичный температурный сигнал, штриховые — нулевой температурный сигнал

Из рис. 4 следует, что поведение кривых имеет общую закономерность: формирование температурного перепада с последующим его уменьшением, вызванным прогревом окружающей скважину породы, что приводит к уменьшению теплового потока из скважины в окружающую среду. Из анализа кривых на рис. 4 следует, что с увеличением расстояния от пласта время достижения максимума, как и величина относительного перепада температуры, возрастает. По мере удаления от оси скважины величина перепада температуры, естественно, уменьшается, а времена достижения максимума остаются приблизительно теми же. На рис. 5 приведена зависимость относительного перепада температуры между стенкой и осью скважины от безразмерного времени на различных безразмерных расстояниях от оси скважины. Из рис. 5 следует, что при удалении от оси скважины величина перепада температуры уменьшается, а время достижения максимума практически не меняется. Общая закономерность изменения кривых *1, 3* и *2, 4* заключается в том, что при достижении некоторого момента времени скорость роста температуры существенно возрастает, что соответствует подходу температурного сигнала пласта. В дальнейшем температура достигает максимума, а затем понижается.

Решение задачи для пограничного слоя. Представив решение задачи (7) в виде суммы

$$\hat{T} = T + \Pi_z + \Pi_{\mathrm{Fo}}, \qquad \hat{T}_1 = T_1 + \Pi_{z1} + \Pi_{\mathrm{Fo}\,1}$$

($T = T(r, z, \mathrm{Fo})$ — регулярная часть решения, соответствующая найденному выше первому приближению; $\Pi_z(r, \zeta, \mathrm{Fo})$, $\Pi_{\mathrm{Fo}}(r, z, \tau)$ — поправки в разложении по асимптотическому параметру, учитывающие наличие пограничного слоя; $\zeta = z/\varepsilon$, $\tau = \mathrm{Fo}/\varepsilon$ — растянутые переменные), получим задачи для функций Π_z, Π_{Fo} в окрестности $z = 0$:

$$\frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial\, \mathrm{Fo}} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial r}\Big),$$

$$\frac{\partial \Pi_z}{\partial\, \mathrm{Fo}} = \frac{\chi}{\Lambda\varepsilon}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial \Pi_z}{\partial r}\Big) - \frac{\mathrm{Pe}\,\nu R(r)}{\varepsilon}\,\frac{\partial \Pi_z}{\partial \zeta},$$

$$\Pi_z\big|_{r=1} = \Pi_{z1}\big|_{r=1}, \qquad \frac{\partial \Pi_z}{\partial r}\Big|_{r=1} = \varepsilon\Lambda\,\frac{\partial \Pi_{z1}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$\Pi_{z1}\big|_{r\to\infty} = 0, \qquad \Pi_z\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad \Pi_{z1}\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0,$$

$$\Pi_z\big|_{\zeta=0} = -T\big|_{z=0}, \qquad \Pi_{z1}\big|_{\zeta=0} = -T_1\big|_{z=0}$$

и в окрестности $\mathrm{Fo} = 0$:

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \Pi_{\mathrm{Fo}\,1}}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial \Pi_{\mathrm{Fo}\,1}}{\partial r}\Big),$$

$$\frac{\partial \Pi_{\mathrm{Fo}}}{\partial \tau} = \frac{\chi}{\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial \Pi_{\mathrm{Fo}}}{\partial r}\Big) - \varepsilon\,\mathrm{Pe}\,vR(r)\,\frac{\partial \Pi_{\mathrm{Fo}}}{\partial z},$$

$$\Pi_{\mathrm{Fo}}\big|_{r=1} = \Pi_{\mathrm{Fo}\,1}\big|_{r=1}, \qquad \frac{\partial \Pi_{\mathrm{Fo}}}{\partial r}\Big|_{r=1} = \varepsilon\Lambda\,\frac{\partial \Pi_{\mathrm{Fo}\,1}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$\Pi_{\mathrm{Fo}}\big|_{\tau=0} = -T\big|_{\mathrm{Fo}=0}, \qquad \Pi_{\mathrm{Fo}\,1}\big|_{\tau=0} = -T_1\big|_{\mathrm{Fo}=0},$$

$$\Pi_{\mathrm{Fo}}\big|_{z=0} = 0, \qquad \Pi_{\mathrm{Fo}\,1}\big|_{r\to\infty} = 0.$$

Решения этих задач находятся методом разделения переменных и выражаются через функции Бесселя действительного аргумента $J_0(\mu_n r)$:

$$\Pi_z^{(1)} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)}\exp\Big(-\mu_n^2\,\frac{\chi}{\varepsilon\Lambda\,\mathrm{Pe}\,\nu}\,z\Big)\int\limits_0^1 rT^{(1)}\big|_{z\to 0}J_0(\mu_n r)\,dr,$$

$$\Pi_{\mathrm{Fo}}^{(1)} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{J_0^2(\mu_n)}\exp\Big(-\mu_n^2\,\frac{\chi}{\varepsilon\Lambda}\,\mathrm{Fo}\Big)\int\limits_0^1 rT^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}\to 0}J_0(\mu_n r)\,dr$$

(μ_n — корни уравнения $J_1(\mu) = 0$). Значения $T^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}\to 0}$, $T^{(1)}\big|_{z\to 0}$ определяются согласно (12). Нетрудно показать, что в отсутствие источников $T^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}\to 0} = 0$. Это означает, что в окрестности $\mathrm{Fo} = 0$ при $Q = 0$ пограничный слой исчезает.

На рис. 6 показана зависимость температуры флюида от глубины z на различных расстояниях от оси скважины с учетом наличия пограничного слоя. Видно, что по мере приближения к оси скважины флюид прогревается сильнее. (Этот вывод согласуется с физическими представлениями.) Все зависимости удовлетворяют граничному условию $T\big|_{z=0} = 1$, что достигается за счет наличия пограничного слоя. На рис. 7 приведены температурные кривые без учета (кривые *1, 3*) и с учетом наличия пограничного слоя (кривые *2, 4*). Из рис. 7 следует, что при учете наличия пограничного слоя результаты расчетов температуры соответствуют условиям задачи $T|_{z=0} = 1$. Кривые *1, 3*, построенные без учета наличия пограничного слоя, этому условию не удовлетворяют, однако следует отметить, что различие результатов расчетов не превышает 17 % при $r = 0$ и уменьшается с увеличением z. Совпадение кривых, построенных с учетом и без учета наличия пограничного слоя, наблюдается при $z > 0{,}35$ ($r = 0$) и $z > 0{,}2$ ($r = 0{,}5$).

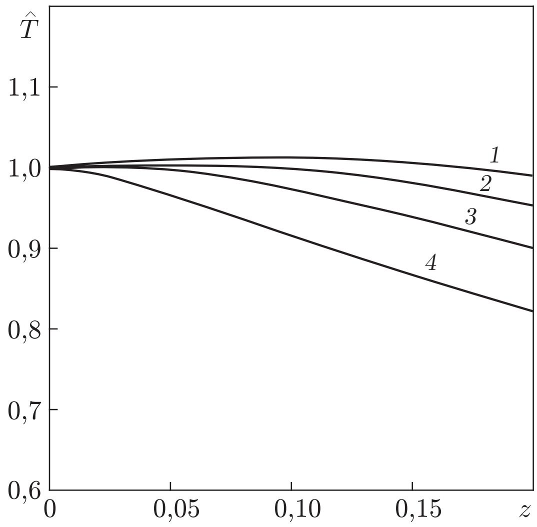

Рис. 6

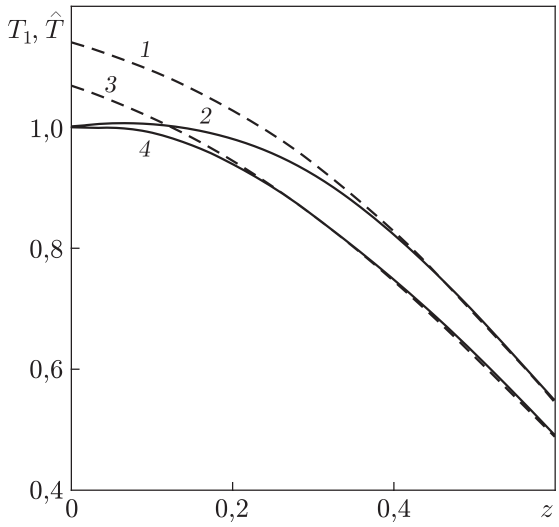

Рис. 7

Рис. 6. Зависимость температуры флюида от безразмерной вертикальной координаты с учетом наличия пограничного слоя на различных безразмерных расстояниях от оси скважины:
1 — $r = 0$; *2* — $r = 0{,}4$; *3* — $r = 0{,}6$; *4* — $r = 0{,}8$

Рис. 7. Зависимость температуры флюида от безразмерной вертикальной координаты без учета (*1, 3*) и с учетом (*2, 4*) наличия пограничного слоя на различных безразмерных расстояниях от оси скважины:
1, 2 — $r = 0$; *3, 4* — $r = 0{,}5$

Таким образом, в настоящей работе построено "в среднем точное" решение в виде $T = T^{(0)} + \varepsilon(T^{(1)} + \Pi^{(1)})$, где нулевое приближение описывает осредненные по сечению скважины значения температуры, первое приближение позволяет исследовать радиальные распределения температуры в случае отсутствия пограничного слоя, а с помощью функции, учитывающей наличие пограничного слоя, уточняется решение в области вязких границ.

Выводы. Разработанная концепция "в среднем точного " решения позволяет построить аналитические решения задачи о температурном поле в скважине с учетом теплообмена с окружающими скважину породами при произвольном вертикальном градиенте температуры флюида и оценить вклад температурного сигнала перфорированного пласта в температурное поле скважины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Терехов В. И., Ярыгина Н. И., Смульский Я. И.** Тепловые и динамические характеристики отрывного течения за плоским ребром с различной ориентацией к потоку // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 103–109.
2. **Мелихов В. И., Мелихов О. И., Парфенов Ю. В., Якунин С. Е.** Анализ температурного режима работы фильтровальной установки // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 6. С. 92–102.
3. **Латышев А. В., Попов В. Н., Юшканов А. А.** Влияние температуры молекулярного газа на значения коэффициентов скольжения // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–65.
4. **Филиппов А. И.** Скважинная термометрия переходных процессов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989.

5. **Филиппов А. И., Михайлов П. Н.** Температурные поля в скважине с учетом радиального профиля скорости в асимптотическом приближении // Инж.-физ. журн. 2006. Т. 78, № 4. С. 87–96.
6. **Чекалюк Э. Б.** Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965.
7. **Пудовкин М. А.** Температурные процессы в действующих скважинах / М. А. Пудовкин, А. Н. Саламатин, В. А. Чугунов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977.
8. **Проселков Ю. М.** Теплопередача в скважинах. М.: Недра, 1975.
9. **Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Ахметова О. В.** Температурное поле в действующей скважине // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 135–144.
10. **Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Ахметова О. В.** Основная задача термокаротажа // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, № 5. С. 747–755.
11. **Васильева А. Б.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Д. Бутузов. М.: Наука, 1978.
12. **Ломов С. А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
13. **Николаевский В. Н.** Конвективная диффузия в пористых средах // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, № 6. С. 1042–1050.
14. **Яковлев Б. А.** Прогнозирование нефтегазоносности недр по данным геометрии. М.: Недра, 1996.

Поступила в редакцию 26/XI 2008 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 2009 г.