ПМТФ, № 6, 1964

# ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

*А. Р. Шистер*

(*Москва*)

Получено приближенное выражение для высокочастотной проводимости плазмы в условиях, когда температура электронов существенно превышает температуру ионов, а частота внешнего поля больше частоты ионных ленгмюровских колебаний.

1. Для плазмы, находящейся во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}\exp(-i\omega t)$ в случае, когда $\omega$ много больше эффективной частоты соударений $\nu$, коэффициент электрической проводимости имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega_e^2}{\omega^2}\nu, \qquad \omega_e^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_e}, \qquad \nu = \frac{4\sqrt{2\pi}\, n e^4}{3\sqrt{m_e}\,(T_e)^{3/2}} L \tag{1.1}$$

Здесь $\omega_e$ — частота ленгмюровских электронных колебаний, $m_e$ — масса, а $T_e$ — температура электронов.

Решение кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау [1], в котором учитываются только парные соударения, дает

$$L = \ln\frac{r_d}{r_0}, \qquad r_d = \left(\frac{T_e T_i}{4\pi n e^2 (T_e + T_i)}\right)^{1/2} \tag{1.2}$$

Здесь $r_d$ — радиус дебаевского экранирования, а $r_0$ — минимальный прицельный параметр соударения частиц, определяемый либо неприменимостью классического рассмотрения, либо неприменимостью теории возмущений. В случае $\omega \gg \omega_e$ необходимо пользоваться интегралом столкновений [2], справедливым в случае быстропеременных процессов; при этом $L$ имеет вид

$$L = \ln\left[\left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{1/2}\frac{1}{\omega r_0}\right] \tag{1.3}$$

В работе [3] было показано, что в случае, когда температура электронов существенно превышает температуру ионов, необходимо рассматривать взаимодействие частиц с продольными звуковыми колебаниями; при этом был использован интеграл столкновений, в котором учитываются эффекты изменения поля заряженной частицы вследствие поляризации плазмы.

В этой работе было также показано, что частицы наиболее эффективно взаимодействуют с волнами, фазовая скорость $u$ и длина волны которых $\lambda$ имеют порядок

$$u \sim v_i(2|\ln c|)^{1/2}, \qquad \lambda \sim r_i(2|\ln c|)^{-1/2}$$

Здесь

$$v_i = \left(\frac{T_i}{m_i}\right)^{1/2}, \quad r_i = \left(\frac{T_i}{4\pi n e^2}\right)^{1/2}, \quad c = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} T_{ie}{}^{3/2}, \quad T_{ie} = \frac{T_i}{T_e}, \quad T_{ei} = \frac{T_e}{T_i}$$

При этом было найдено выражение [3]

$$L = \ln\frac{r_d}{r_0} + \frac{T_{ei}}{4\ln^2 c} \tag{1.4}$$

Частота звуковых колебаний, наиболее эффективно взаимодействующих с частицами плазмы, имеет порядок частоты ионных ленгмюровских колебаний $\omega_i$, поэтому выражение (1.4) справедливо при $\omega < \omega_i$. Как показано в данной работе, при $\omega > \omega_i$ выражение для $L$ существенно видоизменяется. Как будет показано в дальнейшем, при решении уравнения для возмущенной коррелятивной функции $g_{ab}$ необходимо учитывать зависимость $g_{ab}$ от времени в случае, когда $\omega > \omega_i$. Отметим, что интеграл столкновений, использованный в работе [3], был получен в работе [4] именно для случая, когда можно пренебречь временной производной от $g_{ab}$.

Попытка учесть влияние величины $\omega$ на эффективную частоту, соударений в случае произвольных значений $\omega$ (в области $\omega > \nu$) была предпринята в [5, 6]. Однако при этом рассматривалась либо изотермическая плазма [6], либо ионы предполагались бесконечно тяжелыми [5]. Естественно, что в этих условиях в плазме отсутствуют ионные звуковые колебания и электроны взаимодействуют только с продольными ленгмюровскими колебаниями с частотой $\omega_e$, фазовая скорость этих волн превышает среднюю тепловую скорость электронов $v_e = (T_e / m_e)^{1/2}$, поэтому с этими колебаниями эффективно взаимодействуют лишь электроны, скорость которых больше $v_e$. В соответствии с распределением Максвелла, число таких частиц мало, поэтому и влияние коллективных процессов на коэффициент электрической проводимости несущественно.

Рассмотрим случай, когда в плазме возбуждаются ионные звуковые колебания; здесь следует учитывать влияние внешнего поля на механизм взаимодействия волн с частицами плазмы; в этом случае имеем

$$L = \ln \frac{r_d}{r_0} + \frac{T_{ei}}{4\,|\ln c|} \quad \text{для} \quad \omega_i < \omega < \omega_e \left(\frac{T_{ei}}{2\,|\ln c\,|}\right)^{1/2}$$

2. Рассмотрим однородную плазму, состоящую из электронов (масса $m_e$, заряд $z_e = -1$) и ионов (масса $m_i$, заряд $z_i = +1$), помещенную в переменное электрическое поле $\mathbf{E} \exp(-i\omega t)$, причем $\omega \gg \nu$. Для последовательного учета коллективных эффектов в системе частиц с кулоновским взаимодействием используем уравнение Лиувилля, из которого легко можно получить цепочку уравнений для функции $f_a$ распределения частиц сорта $a$, парной коррелятивной функции $g_{ab}$ и т. д.

В случае, когда энергия взаимодействия частиц мала по сравнению со средней тепловой энергией частиц, трехчастичная функция может быть выражена через произведения одно- и двучастичной функций. При этом можно ограничиться двумя первыми членами цепочки кинетических уравнений.

В случае слабого внешнего электрического поля, когда энергия, приобретаемая частицами в поле, мала по сравнению с тепловой энергией, $f_a$ мало отличается от функции распределения Максвелла $f_a{}^\circ$, а коррелятивная функция $g_{ab}$ близка к своему равновесному значению $g_{ab}{}^{(0)}$, имеем

$$\begin{aligned} f_a &= f_a{}^\circ + \delta f_a, \qquad \delta f_a \ll f_a{}^\circ, \\ g_{ab} &= g_{ab}{}^\circ + \delta g_{ab}, \qquad \delta g_{ab} \ll g_{ab}{}^\circ, \end{aligned} \qquad f_a{}^\circ = \left(\frac{m_a}{2\pi T_a}\right)^{3/2} \exp \frac{-m_a v_a{}^2}{2T_a} \tag{2.1}$$

Для $\delta f_a$ и $\delta g_{ab}$ имеем систему уравнений ($\mathbf{r}_{as} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_s$):

$$\frac{\partial \delta f_a}{\partial t} = -e \frac{z_a}{m_a} \mathbf{E} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} e^{-i\omega t} + \frac{z_a \omega_a{}^2}{4\pi} \sum_b z_b \int d\mathbf{v}_b d\mathbf{r}_b \frac{\partial \delta g_{ab}}{\partial \mathbf{v}_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{1}{|\mathbf{r}_{ab}|} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a}\right] \delta g_{ab} - e^2 n \sum_s z_s \int d\mathbf{v}_s d\mathbf{r}_s \left[\frac{z_a}{m_a} \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \delta g_{bs} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{1}{|\mathbf{r}_{as}|} + \right. \\ &\left. + \frac{z_b}{m_b} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}_b} \delta g_{as} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \frac{1}{|\mathbf{r}_{bs}|}\right] = \left(\frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} - \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b}\right) (f_a \delta f_b + f_b \delta f_a)\, e^2 z_a z_b \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{1}{|\mathbf{r}_{ab}|} - e\mathbf{E} \left(\frac{z_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} + \frac{z_b}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b}\right) g_{ab}{}^\circ e^{-i\omega t} + \\ &+ e^2 n \sum_s z_s \int d\mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r}_s \left[\frac{z_a}{m_a} \frac{\partial \delta f_a}{\partial \mathbf{v}_a} g_{bs}{}^\circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{1}{|\mathbf{r}_{as}|} + \frac{r_b}{m_b} \frac{\partial \delta f_b}{\partial \mathbf{v}_b} g_{as}{}^\circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \frac{1}{|\mathbf{r}_{bs}|}\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из (2.2) видно, что $\delta f_a$ обусловлено как действием внешнего электрического поля, так и столкновениями частиц. Предполагая, что $\omega \gg \nu$, определяем возмущение функции распределения $\delta f_a^{(1)}$ внешним электрическим полем в виде

$$\delta f_a^{(1)} = \frac{ie}{\omega} \frac{z_a}{T_a} (\mathbf{E}\mathbf{v}_a) f_a \tag{2.4}$$

(здесь и далее под $f_a$ понимается равновесная функция распределения). В соответствии с теорией возмущений в правую часть уравнения (2.3) в качестве $\delta f_a$ подставляется значение $\delta f_a^{(1)}$. Учитывая (2.2) и (2.4), имеем

$$\delta f_a = \delta f_a^{(1)} + \delta f_a^{(2)}$$

Здесь $\delta f_a^{(2)}$ — отклонение функции распределения от равновесия, обусловленное взаимодействием частиц при наличии внешнего электрического поля.

Посредством преобразования Фурье

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{k})\, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \qquad f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}$$

из (2.2) и (2.3) получим

$$\delta f_a^2 = -\frac{\omega_a^2}{\omega} z_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \cdot \mathbf{k} G_a(\mathbf{k}), \qquad G_a(\pm\mathbf{k}) = \sum_b z_b \int \delta g_{ab}(\pm\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{v}_b \tag{2.5}$$

Тогда выражение для плотности тока, связанного со столкновениями, будет иметь вид

$$j = \frac{en}{\omega} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \cdot \mathbf{k} \sum_a \omega_a^2 \int G_a(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{v}_a \tag{2.6}$$

Функция $\delta g_{ab}(\mathbf{k})$ определяется из решения уравнения

$$\delta g_{ab}(\mathbf{k}) + \frac{z_a \omega_a^2}{k^2} \mathbf{x} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} \frac{H_b(-\mathbf{k})}{\mathbf{x}\mathbf{v}_b - (\mathbf{x}\mathbf{v}_a + w) - i\Delta} -$$

$$- \frac{z_b \omega_b^2}{k^2} H_a(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{x}\partial f_b / \partial \mathbf{v}_b}{\mathbf{x}\mathbf{v}_b - (\mathbf{x}\mathbf{v}_a + w) - i\Delta} = \frac{F_{ab}(\mathbf{k})}{\mathbf{x}\mathbf{v}_b - (\mathbf{x}\mathbf{v}_a + w) - i\Delta} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) получено из (2.3) после выполнения преобразования Фурье и ряда простых операций. В (2.7) приняты обозначения

$$w = \frac{\omega}{|k|}, \qquad \mathbf{x} = \frac{k}{|k|}, \qquad \omega_a^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_a}$$

Функция $H_a(\pm\mathbf{k})$ связана с $G_a(\pm\mathbf{k})$ соотношением

$$H_a(\pm\mathbf{k}) = G_a(\pm\mathbf{k}) + \frac{z_a}{(2\pi)^3 n} [1 - N_a(\pm\mathbf{k})]\, \delta f_a^{(1)} \tag{2.8}$$

При этом

$$N_a(\pm\mathbf{k}) = \frac{1}{\varepsilon_\pm(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_a)} + \frac{k_a^2}{k^2} \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_a \int \frac{F(u)\, du}{u - \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_a \mp i\Delta} \frac{1}{|\varepsilon(u)|^2} \left(k_a^2 = \frac{4\pi n e^2}{T_a}\right) \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_\pm(y, k) = 1 + \sum_b \frac{k_b^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_b f_b d\mathbf{v}_b}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_b + y \mp i\Delta} \tag{2.10}$$

$$F(u) = \sum_a f_a(u) \tag{2.11}$$

Функция $f_a(u)$ — одномерное распределение Максвелла, определяемое в виде

$$f_a(u) = \int f_a(v)\,\delta(u - \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_a)\,d\mathbf{v}_a = \left(\frac{ma}{2\pi T_a}\right)^{1/2} \exp\frac{-m_a u^2}{2T_a} \tag{2.12}$$

Невозмущенная коррелятивная функция $g_{ab}{}^{\circ}(\mathbf{k})$ в этих обозначениях имеет вид

$$g_{ab}^{\circ} = \frac{z_a z_b}{(2\pi)^3 n}\,\frac{1}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_b - \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_a - i\Delta}\left(\frac{\omega_b^2}{k^2}\,\mathbf{x}\cdot\frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}_b} N_a(\mathbf{k}) - \frac{\omega_a^2}{k^2}\,\mathbf{x}\cdot\frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} N_b(-\mathbf{k})\right) \tag{2.13}$$

Наконец, находящееся в правой части (2.7) выражение $F_{ab}(\mathbf{k})$ определено следующим образом:

$$F_{ab}(\mathbf{k}) = \frac{z_a z_b}{(2\pi)^3 n}\,\mathbf{x}\cdot\left[\omega_b^2 N_a(k)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} - \omega_a^2 N_b(-\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a}\right](f_a \delta f_b^{(1)} + f_b \delta f_a^{(1)}) +$$
$$+ i\,\frac{e\mathbf{E}}{|k|}\cdot\left(\frac{z_a}{m_a}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} + \frac{z_b}{m_b}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b}\right) g_{ab}^{\circ}(\mathbf{k})$$

Учитывая, что для определения $j$ по (2.6) необходимо знать $G_a(\mathbf{k})$, находим функцию $G_a(\mathbf{k})$ из уравнения (2.7), пользуясь хорошо известными методами решения интегральных сингулярных уравнений.

3. Определив $G_a(\mathbf{k})$ и учитывая определение проводимости

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

получим

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{L}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(m_e T_e)^{3/2}\int_0^{k_1}\frac{dk}{k}\int\frac{du}{|\varepsilon(u)|^2}\sum_{n=1}^{5} D_n(u), \qquad k_1 = \frac{1}{r_0} \tag{3.1}$$

Здесь $\sigma_0$ и $L$ определяются согласно (1.1)—(1.3), а выражения для $D_n(u)$ имеют вид

$$D_1 = \pi\sum_{ab}\frac{1}{m_a T_a}\left(\frac{1}{m_a} - \frac{z_a z_b}{m_b}\right) f_a(u+w)\,f_b(u) \tag{3.2}$$

$$D_2 = \pi\sum_{ab}\frac{1}{m_a}\left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}\right)\left(\frac{1}{m_a} - \frac{z_a z_b}{m_b}\right)\frac{u}{w} f_b(u)\,[f_a(u+w) - f_a(u)] \tag{3.3}$$

$$D_3 = 2\pi\sum_{a,b,c}\frac{z_a}{m_a}\frac{z_c}{m_c}\frac{k_c^2}{k^2}\left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T_a}\right)\frac{u}{w} f_b(u)\,f_a(u)\,R_c^+(u+w) \tag{3.4}$$

$$D_4 = i\sum_{a,b,c}\frac{z_b z_c}{m_b T_c}\frac{k_c^2}{k^2}\left(\frac{1}{m_c} - \frac{z_a z_c}{m_a}\right) f_a(u)\,f_b^+(u+w)\,R_c^+(u+w) \tag{3.5}$$

$$D_5 = i\sum_{a,c}\frac{1}{m_c}\frac{k_c^2}{k^2}\left(\frac{1}{m_c} - \frac{z_a z_c}{m_a}\right)\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_a}\right)\frac{u}{w} f_a\,[f_c^+(u+w) - f_c^+(u)]\,R_c^+(u+w) \tag{3.6}$$

где

$$R_c^+(u+w) = \frac{(u+w)\,f_c^+(u+w) - u f_c^+(u)}{\varepsilon_+(u+w)} \tag{3.7}$$

$$\varepsilon_+(y) = 1 + \sum_b \frac{k_b^2}{k^2}\,[1 + y f_b^+(y)], \qquad f_b^{\pm}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_b(z)\,dz}{z - y \mp i\Delta} \tag{3.8}$$

В (3.2) и (3.3) выделены члены дающие вклад в действительное значение $\sigma$. В выражении (3.1) выделен множитель $|\varepsilon(u)|^{-2}$, наличие которого и позволит провести необходимые вычисления. При $T_{ei} = 1$ отличными от нуля оказываются лишь члены $D_1$ и $D_4$. После простых преобразований, из (3.1) получим формулу (47) работы [6], которая определяет выражение для проводимости в изотермическом случае.

С другой стороны, если положить $w < u$ и провести разложение всех $D_n(u)$ в ряд по малому параметру $w / u$, выражение (3.1) перейдет в выражение для $\sigma$, которое можно получить при $\omega < \omega_i$ с использованием интеграла столкновений работы [4]. В этом случае отличными от нуля оказываются члены $D_1$, $D_2$, $D_3$. Члены $D_1$, $D_2$ и $D_3$ при $w / u \to 0$ можно получить из линеаризованного интеграла столкновений [4], причем $D_1$ и $D_2$ описывают взаимодействие при условии, когда диэлектрическая проницаемость плазмы выражается через функцию Максвелла, т. е. $\varepsilon(u)$ соответствует равновесному состоянию плазмы. Член $D_3$ описывает взаимодействие частиц с учетом возмущения продольной диэлектрической проницаемости под действием электрического поля. В этом случае выражение для $L$ определяется формулой (1.4), причем первый член (1.4) обусловлен взаимодействием частиц с волнами при $k > k_i$, а второй — взаимодействием частиц и ионных звуковых колебаний при $k \sim k_i / (2 \mid \ln c \mid)^{1/2}$. Второй член легко может быть получен из $D_3$ при $w \to 0$. В случае $\omega > \omega_i$ необходимо рассматривать все члены в (3.1).

Рассмотрим вклад в $\sigma$, обусловленный взаимодействием частиц с короткими волнами ($k_1 > k > k_i$). В этой области $\varepsilon \sim 1$, что позволяет выполнить элементарное интегрирование по $u$ и далее по $k$. Обозначая эту часть проводимости, которая обусловлена взаимодействием частиц с короткими волнами, как $\sigma^1$, можно записать

$$\sigma^1 = \sigma_0 \quad \text{при } \omega_i < \omega < \omega_e T_{ei}^{1/2}, \tag{3.9}$$

$$\sigma^1 = \frac{\sigma_0}{L} \ln \left[ \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{1/2} \frac{1}{\omega r_0} \right] \quad \text{при } \omega > \omega_e T_{ei}^{1/2}. \tag{3.10}$$

Здесь $\sigma_0$ определена в соответствии с (1.1) — (1.3). Для вычисления той части проводимости, которая обусловлена взаимодействием частиц и более длинноволновых колебаний ($\sigma_2$), будем исходить из следующих соображений.

В неизотермической плазме при $T_{ei} \gg 1$ слабозатухающими будут волны, фазовая скорость которых велика по сравнению с тепловой скоростью ионов и мала по сравнению с тепловой скоростью электронов.

В плазме (в соответствии с распределением Максвелла) много медленных электронов, поэтому электроны легко взаимодействуют с этими волнами; что касается ионов, то в поглощении таких волн участвуют только ионы из хвоста максвелловского распределения. Как известно, говорить о волнах в плазме можно лишь при условии, что декремент их затухания мал по сравнению с частотой. Дисперсионное уравнение $\varepsilon(u) = 0$ определяет область существования слабозатухающих звуковых колебаний. Если представить $\varepsilon(u)$ в виде

$$\varepsilon(u) = \varepsilon'(u) + i\varepsilon''(u) \tag{3.11}$$

то плазма прозрачна при выполнении условия

$$\varepsilon''(u) \ll \varepsilon'(u)$$

На основании этого имеем

$$\frac{1}{|\varepsilon(u)|^2} = \frac{\pi}{|\varepsilon''(u)|} \delta[\varepsilon'(u)] \tag{3.12}$$

Отсюда, учитывая $v_i < u < v_e$, получаем

$$\frac{1}{|\varepsilon(u)|^2} = B(k)[\delta(u - u_1) + \delta(u + u_1)], \qquad u_1 = \frac{\omega_i}{(k^2 + k_e^2)^{1/2}} \tag{3.13}$$

$$B(k) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{v_e}{k_e^2} \frac{k^4}{k^2 + k_e^2} \frac{c}{c + e^{-r}}, \qquad r = \frac{1}{2} \frac{k_i^2}{k^2 + k_e^2}$$

Такое представление $|\varepsilon(u)|^{-2}$ позволяет провести необходимое интегрирование в (3.1). Однако, помимо множителя $|\varepsilon(u)|^{-2}$, в выражения для $D_n(u)$ при $n = 3, 4, 5$ входит множитель $[\varepsilon_+(u + w)]^{-1}$, поэтому следует рассматривать и вклад в $\sigma$, обусловленный взаимодействием частиц с волнами, фазовая скорость которых определяется условием $\varepsilon(u + w) \sim 0$.

При этом фазовая скорость таких волн оказывается порядка $w$, а частота таких колебаний — порядка частоты внешнего поля. Как показывает вычисление, вклад в $\sigma$ от взаимодействия частиц с волнами, фазовая скорость которых определяется нулями функции $\varepsilon(u+w)$, не существен. При $\omega \sim \omega_e$ можно было бы ожидать увеличения $\sigma$ за счет взаимодействия частиц с ленгмюровскими электронными колебаниями; этот эффект невелик, и учет его был бы превышением точности расчета.

При помощи выражений (3.12), (3.13) из (3.1) получим (3.14)

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{L_n} m_e T_e^2 \int_0^{k_i} \frac{dkk^3}{k_e^2 (k^2 + k_e^2)} \frac{c}{c+e^{-r}} D_n'(u_1), \quad (D_n'(u_1) = D_n(u_1) + D_n(-u_1))$$

Здесь $D_n$ определяются выражениями (3.2) — (3.6).

Учитывая, что $w > u_1$, для $\sigma_2$ получим

$$\sigma_2 = -i \frac{\sigma_0}{L} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} T_{ei} v_e \int_0^{k_i} \frac{dk}{k_i^2} \frac{c}{c+e^{-r}} \frac{f_e^+(w)}{\varepsilon_+(w)} \tag{3.15}$$

В (3.15) необходимо выделить реальную часть $\sigma_2$, тогда в области

$$\omega_i < \omega < \omega_e \left(\frac{T_{ei}}{2|\ln c|}\right)^{1/2}$$

получим

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{L} T_{ei} \int_0^{k_i} \frac{k}{k_i^2} A(k)\, dk \qquad \left(A(k) = \frac{c(1 + k_e^2/k^2)}{c+e^{-r}} \frac{\exp[-(w/v_e)^2]}{|\varepsilon(\omega)|^2}\right) \tag{3.16}$$

Область интегрирования по $k$ ограничена $\omega / v_e < k < k_i$.

При этом имеем

$$A(k) = \begin{cases} k^2/k_e^2 & (\omega/v_e < k < k_e) \\ 1 & (k_e < k < k_0) \\ (e^r & k_0 < k < k_i) \end{cases} \qquad k_0 = \frac{k_i}{(2|\ln c|)^{1/2}} \tag{3.17}$$

Здесь $k_0$ — значение $k$, при котором $e^{-r} = c$.

Подынтегральная функция в (3.16) имеет максимум в точке $k \sim k_0$, при этом основной вклад в значение интеграла дает область $\Delta k \sim k_0$ около точки $k_0$, причем эта область смещена в сторону $k < k_0$, где подынтегральная функция спадает медленнее, чем при $k > k_0$.

Учитывая это, можно записать приближенное значение для $\sigma_2$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{L} L'', \qquad L'' = \frac{T_{ei}}{4|\ln c|} \tag{3.18}$$

Для сравнения здесь справа приводятся значения $L''$, полученные по этой формуле, и значения $L_0''$, полученные численным интегрированием выражения (3.16).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $T_{ei} =$ | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ |
| $L'' =$ | 17·3 | 139 | 1190 |
| $L_0'' =$ | 17·6 | 145 | 1210 |

4. Как было указано выше, при $\omega < \omega_i$ основной вклад в $\sigma_2$ обусловлен членом $\sim D_3$, причем нетрудно показать, что по мере приближения $\omega$ к $\omega_i$ этот член убывает как $1 - (\omega_i/\omega)^2$. Как указывалось, этот член при $\omega < \omega_i$ приводит к появлению в выражении для $L$ члена, совпадающего с выражением (1.4). Член $\sim D_3$ при $\omega < < \omega_i$, как показывают вычисления [3], дает основной вклад в $\sigma_2$ при значениях $k \sim \sim k_0$. Это означает, что при наличии ионных звуковых колебаний частицы наиболее эффективно взаимодействуют с волнами $\lambda \sim \lambda_0$. Для этих длин волн имеет место приблизительное равенство энергии, поглощаемой электронами, и энергии, поглощаемой ионами. Действительно, декремент затухания волн $\sim \varepsilon''(u_1)$, и, если представить мнимую часть диэлектрической проницаемости в виде $\varepsilon''(u) = \varepsilon_e''(u) + \varepsilon_i''(u)$, то для $u_1$, соответствующих звуковым колебаниям плазмы, получим

$$\frac{\varepsilon_i''(u_1)}{\varepsilon_e''(u_1)} = \frac{1}{c} e^{-r} \tag{4.1}$$

Легко видеть, что при $k \sim k_0$ это отношение порядка 1.

В случае $\omega > \omega_i$ роль члена $\sim D_3$ становится несущественной, а основное значение приобретает член $D_4$, из которого следует выделить слагаемые $\sim \exp(-w^2 / v_e^2)$. При этом члены $\sim \exp(-r)$ дадут малый вклад в $\sigma_2$. Возникновение множителя $\exp(-w^2 / v_e^2)$ в члене $D_4$ связано, как показывает ход вычислений, с появлением в числителях соответствующих членов $\varepsilon_e''(w)$. Это является непосредственным указанием, что в плазме происходит поглощение волн с частотой $\omega$.

При наличии высокочастотного внешнего поля взаимодействие частиц и звуковых колебаний существенно меняется, поскольку в этом случае электроны могут излучать спектр частот, соответствующий звуковым колебаниям, при поглощении энергии внешнего поля.

Появление в выражениях для диэлектрической проницаемости частоты внешнего поля $\omega$ можно понять, написав законы сохранения энергии $E(p)$ и импульса $(p)$ электрона в виде

$$\hbar\omega \pm \hbar\omega_s + E'(\mathbf{p}') = E(\mathbf{p}), \qquad \hbar\mathbf{k}_\omega + \hbar\mathbf{k}_s + \mathbf{p}' = \mathbf{p} \tag{4.2}$$

В случае $\omega > \omega_s$ и $k_\omega \sim 0$ (где длина волны внешнего поля $\sim k_\omega^{-1}$) изменение импульса электрона (как и при $\omega < \omega_i$) обусловлено взаимодействием частиц со звуковыми колебаниями $(\omega_s, k_s)$, в то время как изменение энергии — поглощением энергии внешнего поля. Заметим, что при $\omega < \omega_e$ плазма непрозрачна для внешнего электромагнитного поля и $k_w$ является комплексным числом. Однако величиной $k_w$ всегда можно пренебречь по сравнению с $k_s$, которые соответствуют волнам, взаимодействие которых с частицами (в соответствии с (4.2)) и обеспечивает вклад в проводимость за счет волновых процессов. Из (4.2) получаем соотношение $w \pm \pm u + \mathbf{xv} \sim 0$, где $u$ — фазовая скорость звуковых колебаний. Наличие знаменателей $\sim (w \pm u + \mathbf{xv})$ в выражениях, определяющих возмущенную коррелятивную функцию, и приводит в конечном итоге к появлению членов, содержащих $\varepsilon(w)$. В области $\omega > \omega_i$ член $\sim D_4$ в (3.1) описывает взаимодействие частиц со звуковыми колебаниями с $\lambda \sim \lambda_0$; при этом поглощение энергии внешнего поля $\sim \exp[-(\omega\lambda_0 / v_e)^2]$. При значениях

$$\omega \gtrsim \frac{\omega_e T_{ei}^{1/2}}{\sqrt{2\,|\ln c|}}$$

это поглощение становится слабым, и роль этого члена становится несущественной при определении $\sigma$.

5. Результаты данной работы для $L$ позволяют в формуле (1.1) для коэффициента проводимости предложить приближенные выражения:

$$L = \ln\frac{r_d}{r_0} + \frac{T_{ei}}{4\,|\ln c|^2} \qquad (\omega_i > \omega) \tag{5.1}$$

$$L = \ln\frac{r_d}{r_0} + \frac{T_{ei}}{4\,|\ln c|} \qquad \left(\omega_i < \omega < \frac{\omega_e T_{ei}^{1/2}}{(2\,|\ln c|)^{1/2}}\right) \tag{5.2}$$

$$L = \ln\frac{r_d}{r_0} \qquad \left(\frac{\omega_e T_{ei}^{1/2}}{(2\,|\ln c|)^{1/2}} < \omega < \omega_e T_{ei}^{1/2}\right) \tag{5.3}$$

$$L = \ln\frac{v_e}{\omega r_0} \qquad \left(\omega > \omega_e T_{ei}^{1/2}\right) \tag{5.4}$$

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить В. П. Силина за предложенную тему и многочисленные полезные дискуссии.

Поступила 15 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. Ж. эксперим. и теор. физ., 1936, т. 7, стр. 203.
2. Силин В. П. Кинетическое уравнение для быстропеременных процессов. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, стр. 1771.
3. Горбунов Л. М. и Силин В. П. Явления переноса в неизотермической плазме. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, стр. 1265.
4. Силин В. П. Об интеграле столкновений для заряженных частиц. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, стр. 1769.
5. Dawson I., Oberman C. High-Frequency Conductivity in a Plasma. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5, p. 517.
6. Oberman C., Ron A., Dawson I. High-Frequency Conductivity of a Fully Tonized Plasma. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 12, p. 1515.