

**ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ СХЕМЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ФРОНТА ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ
В КОНДЕНСИРОВАННОЙ СРЕДЕ**

В. Б. Либрович, Г. М. Махвиладзе

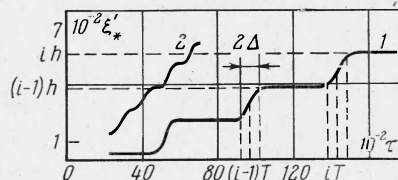
(Москва)

В связи с исследованиями по синтезу различных твердых веществ в волне горения (самораспространяющийся высокотемпературный синтез) [1-3] предлагается модель нестационарного горения безгазовых составов, описывающая релаксационный механизм распространения фронта экзотермической химической реакции в конденсированной системе, образующей тугоплавкие продукты. Определяются период колебаний скорости горения, величина перемещения фронта реакции за время одного колебания и другие характеристики процесса. Проведено сопоставление с результатами численных расчетов.

1. Релаксационный механизм распространения фронта экзотермической химической реакции в конденсированной среде. Численные расчеты [1] показали, что в широкой области определяющих параметров стационарный режим горения, отвечающий распространению фронта реакции с постоянной скоростью, неустойчив, и фронт реакции распространяется автоколебательным образом. Аналитические исследования [4, 5] устойчивости стационарного режима горения безгазовых составов методом малых возмущений также показали существование неустойчивой области. В работе [2] явление автоколебательного режима распространения фронта реакции было обнаружено экспериментально.

Изучение структуры пульсаций скорости горения, проведенное в работе [1] путем численного решения нестационарной системы уравнений, позволило установить, что по мере удаления от кривой нейтральной устойчивости в глубь неустойчивой области амплитуда пульсаций скорости горения увеличивается, а сами колебания носят все более релаксационный характер; длительные депрессии скорости сменяются значительными ее всплесками. При этом пространственно-временные распределения температуры и концентрации свидетельствуют о том, что длительный прогрев некоторой части исходного вещества сменяется быстрым его воспламенением и сгоранием. Численные расчеты [1, 2] показывают, что такой режим горения безгазовых составов устанавливается даже при незначительном удалении от границы устойчивости и является типичным. Зависимость координаты фронта реакции от времени, полученная с помощью численных расчетов, представлена на фиг. 1, взятой из работы [2] (кривые 1 и 2 соответствуют различному удалению от границы устойчивости).

Ниже предлагается предельная модель распространения пульсирующего фронта экзотермической реакции в конденсированном веществе (ра-



Фиг. 1

нее краткое описание ее было дано в [6]). В ней принимается, что после сгорания очередной порции исходного вещества в течение некоторого промежутка времени происходит прогрев новой его порции до тех пор, пока не будет достигнуто условие воспламенения. После этого прогретое вещество быстро сгорает, в результате чего фронт реакции перемещается на некоторое расстояние. Задача состоит в определении величины перемещения фронта реакции и периода колебаний.

2. Вывод интегрального соотношения, определяющего температуру в зоне химической реакции. Будем предполагать, что в течение всего процесса горения ширина зоны химической реакции в силу резкой зависимости скорости химической реакции от температуры значительно меньше толщины зоны подогрева (это предположение подтверждается численными расчетами [1,2]).

Тогда зону химической реакции, в которой происходит полное превращение вещества, можно считать поверхностью, разделяющей исходное вещество и продукты горения. Введем связанную с этой поверхностью систему координат (в области $x < 0$ находится исходное вещество).

Нестационарный процесс распространения тепла в конденсированном веществе слева и справа от зоны химической реакции описывается следующими уравнениями и граничными и начальными условиями:

в области I ($x < 0$)

$$(2.1) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} - v(\tau) \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi}$$

$$\tau = \tau_0, \theta_1 = \theta_1^\circ(\xi), \xi = -\infty, \theta_1 = 0, \xi = 0, \theta_1 = \vartheta(\tau)$$

в области II ($x > 0$)

$$(2.2) \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} - v(\tau) \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi}$$

$$\tau = \tau_0, \theta_2 = \theta_2^\circ(\xi), \xi = 0, \theta_2 = \vartheta(\tau), \xi = +\infty, \theta_2 = 1$$

$$\theta_1 = \frac{T' - T_0'}{T_a' - T_0'}, \quad \xi = x \frac{u_a}{\kappa}, \quad \tau = t \frac{u_a^2}{\kappa}, \quad v(\tau) = \frac{u(t)}{u_a}$$

где x — пространственная координата, t — время, T' — температура, T_0' — начальная температура вещества, $T_a' = T_0' + Q/c$ — адиабатическая температура сгорания (Q — тепловой эффект, c — теплоемкость), κ — температуропроводность, $u_a^2 = \kappa(RT_a'^2/E(T_a' - T_0'))k_0 \exp \times (-E/RT_a')$ — скорость распространения фронта экзотермической реакции, соответствующая стационарному решению (E — энергия активации, R — газовая постоянная, k_0 — предэкспонент), $u(t)$ — скорость движения фронта реакции в лабораторной системе координат. Функции θ_1° и θ_2° описывают начальное распределение температуры в каждой из областей. Температура в зоне реакции $\vartheta(\tau) = (T'(t, 0) - T_0') / (T_a' - T_0')$ является неизвестной функцией и подлежит определению.

По аналогии с [7], где выведено интегральное уравнение для нестационарной скорости горения пороха, применим к (2.1), (2.2) преобразование Фурье, полагая для задачи (2.1) $\theta = 0$ при $\xi > 0$, а для задачи (2.2) — $\theta = 0$ при $\xi < 0$. Введем

$$(2.3) \quad F_1(k, \tau) = \int_{-\infty}^0 \theta_1(\tau, \xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

$$(2.4) \quad F_2(k, \tau) = \int_0^{+\infty} [\theta_2(\tau, \xi) - 1] e^{-ik\xi} d\xi$$

Из (2.4) имеем

$$(2.5) \quad dF_1 / d\tau + (ikv + k^2)F_1 = \varphi_1 + (ik - v)\vartheta \quad (\varphi_1 = \partial\theta_1 / \partial\xi|_{\xi=0})$$

$$\tau = \tau_0, \quad F_1(k, \tau_0) = \int_{-\infty}^0 \theta_1^\circ(\xi) e^{-ik\xi} d\xi$$

Из (2.2) следует:

$$(2.6) \quad dF_2 / d\tau + (ikv + k^2)F_2 = -\varphi_2 + (ik - v)(1 - \vartheta)$$

$$(\varphi_2 = \partial\theta_2 / \partial\xi|_{\xi=0})$$

$$\tau = \tau_0, \quad F_2(k, \tau_0) = \int_0^{\infty} [\theta_2^\circ(\xi) - 1] e^{-ik\xi} d\xi$$

Решения дифференциальных уравнений (2.5), (2.6) с указанными начальными условиями имеют вид соответственно

$$(2.7) \quad F_1(k, \tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \{\varphi_1(\tau') + [ik - v(\tau')] \vartheta(\tau')\} \exp[-k^2(\tau - \tau') - ikI] \times$$

$$\times d\tau' + F_1(k, \tau_0) \exp[-k^2(\tau - \tau_0) - ikJ]$$

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau} v(\tau'') d\tau'' = \xi_*(\tau) - \xi_*(\tau_0)$$

$$(2.8) \quad F_2(k, \tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \{-\varphi_2(\tau') + [ik - v(\tau')][1 - \vartheta(\tau')]\} \exp[-k^2(\tau - \tau') -$$

$$- ikI] d\tau' + F_2(k, \tau_0) \exp[-k^2(\tau - \tau_0) - ikJ], \quad J = \int_{\tau_0}^{\tau} v(\tau'') d\tau''$$

Здесь $\xi_*(\tau)$ — координата фронта реакции в лабораторной системе координат в момент времени τ . Применяя к (2.7) и (2.8) обратное преобразование

$$\theta_1(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(k, \tau) e^{ik\xi} dk$$

$$\theta_2(\xi, \tau) - 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(k, \tau) e^{ik\xi} dk$$

и подставляя в получившиеся соотношения значение $\xi = 0$, получим соответственно

$$(2.9) \quad \vartheta(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\varphi_1 - v\vartheta + \frac{\vartheta I}{2(\tau - \tau')} \right] \exp\left[-\frac{I^2}{4(\tau - \tau')}\right] \times \right.$$

$$\times \left. \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} + \frac{1}{\sqrt{\tau - \tau_0}} \int_{-\infty}^0 \theta_1^\circ(u) \exp\left[-\frac{(u + J)^2}{4(\tau - \tau_0)}\right] du \right\}$$

$$(2.10) \quad \vartheta(\tau) - 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} \left[-\varphi_2 + v(\vartheta - 1) - \frac{(\vartheta - 1)I}{2(\tau - \tau')} \right] \times \right.$$

$$\times \exp\left[-\frac{I^2}{4(\tau - \tau')}\right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} + \frac{1}{\sqrt{\tau - \tau_0}} \int_0^{+\infty} [\theta_2^\circ(u) - 1] \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{(u + J)^2}{4(\tau - \tau_0)}\right] du \left. \right\}$$

Поскольку ищется периодическое, не затухающее во времени решение, описывающее режим установившихся колебаний, следует в соотношениях (2.9), (2.10) перейти к пределу при $\tau_0 \rightarrow -\infty$. Тогда слагаемые в правых частях (2.9) и (2.10), описывающие влияние начальных условий, исчезают. Складывая получившиеся соотношения, получим

$$(2.11) \quad 2\Phi - 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} \left[\Phi_1(\tau') - \Phi_2(\tau') - v(\tau') + \frac{I}{2(\tau - \tau')} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{I^2}{4(\tau - \tau')} \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}$$

Используем теперь связь потоков тепла, поступающих в зону реакции. Суммируя проинтегрированные по ξ уравнение теплопроводности, записанное с учетом тепловыделения, и уравнение потребления реагирующего вещества и устремляя к нулю ширину зоны химической реакции, получим

$$(2.12) \quad \Phi_1 - \Phi_2 = v - \lim_{\delta_z \rightarrow 0} \int_{-\delta_z}^{+\delta_z} \frac{\partial}{\partial \tau} (\theta + a) d\xi$$

Здесь a — концентрация реагента, $\delta_z = \delta_x / (\kappa / u_a)$ — безразмерная полуширина зоны химической реакции.

Для рассматриваемого в п. 3 режима горения, связанного с резкими изменениями температуры зоны химической реакции, интеграл в правой части (2.12) имеет максимальную величину во время «скачка» фронта реакции, равную по порядку отношению двух малых параметров δ_x и $\Delta_t = \Delta \kappa / u_a^2$ (2Δ — время сгорания очередной порции исходного вещества, см. фиг. 1), которое мало по сравнению с другими членами уравнения в силу оценки $\delta_x / \Delta_t \ll h / \Delta_t = \bar{u}$ (\bar{u} — средняя скорость распространения фронта реакции на переходном участке). Подставляя с учетом этого замечания связь тепловых потоков (2.12) в (2.11) и используя (2.7), получим

$$(2.13) \quad 2\Phi - 1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{[\xi_*(\tau) - \xi_*(\tau')]}{(\tau - \tau')^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[\xi_*(\tau) - \xi_*(\tau')]^2}{4(\tau - \tau')} \right\} d\tau'$$

Периодичность функции $\Phi(\tau)$, определяемой из этого соотношения, следует из периодичности функции $v(\tau)$. Соотношение (2.13) показывает также, что безразмерная температура зоны химической реакции определяется только законом движения фронта реакции. В частности, когда фронт реакции распространяется с постоянной скоростью, т. е. $\xi_*(\tau) = \tau$, из (2.13) следует $\Phi = 1$. Ниже рассмотрим режим релаксационных колебаний, сопровождающихся длительным прогревом инертного вещества, хотя интегральное соотношение (2.13) выведено только в предположении уости зоны химической реакции и поэтому справедливо для произвольного закона движения фронта реакции, описывающего режим горения на больших временах.

3. Определение температуры воспламенения в случае распространения фронта химической реакции «скачками». С помощью соотношения (2.13) определим температуру зоны химической реакции в момент воспламенения для режима горения, заключающегося в чередовании длительного прогрева некоторой части исходного вещества и относительно быстрого его сгорания. Зададим зависимость координаты фронта реакции от времени $\xi_*(\tau)$, отвечающую указанному режиму и графически

изображенную на фиг. 1 в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \xi_*(\tau) &= (i-1)h + \Phi_i(\Delta, \tau), (i-1)T \leq \tau \leq iT, i = -\infty, \dots, n \\ \Phi_i(\Delta, \tau) &= -\alpha h f_1^i(\Delta, \tau) + \beta h f_2^i(\Delta, \tau) \\ f_1^i(\Delta, \tau) &= f_1\left(\frac{\tau - (i-1)T}{\Delta}\right) \\ f_2^i(\Delta, \tau) &= f_2\left(\frac{iT - \tau}{\Delta}\right), \quad \alpha + \beta = 1, \quad \Delta \ll T \\ f_j(0) &= 1, f_j = 0 \text{ при } \tau \in [(i-1)T + \Delta, iT - \Delta] (j = 1, 2) \\ f_1'(0) &= f_2'(0) \end{aligned}$$

Введенная здесь в самом общем виде переходная функция $\Phi_i(\Delta, \tau)$ описывает закон движения фронта реакции во время сгорания прогретой порции исходного вещества, сопровождающегося интенсивным тепловыделением. Функции f_1 и f_2 по своему физическому смыслу являются монотонными и непрерывными.

Подставим выражение для $\xi_*(\tau)$ в интегральное соотношение (2.13) и определим температуру в зоне химической реакции во временном интервале $(n-1)T + \Delta \leq \tau \leq nT - \Delta$. Поскольку функция $\xi_*(\tau')$ периодическая, интеграл в правой части (2.13) удобно заменить суммой интегралов, каждый из которых берется по периоду. Проводя вычисление каждого интеграла с точностью до малых порядка Δ/T , с которой проводится весь дальнейший расчет, получим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 2\theta - 1 &= \sum_{i=-\infty}^{n-1} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{h(n-i)}{2\sqrt{\tau - iT}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{h(n-i)}{2\sqrt{\tau - (i-1)T}} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(n-1)T-\Delta}^{(n-1)T} \frac{h[1 - \beta f_2^{n-1}(\Delta, \tau')]}{(\tau - \tau')^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{h^2[1 - \beta f_2^{n-1}(\Delta, \tau')]^2}{4(\tau - \tau')} \right\} \times \\ &\times d\tau' + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(n-1)T}^{(n-1)T+\Delta} \frac{\alpha h f_1^n(\Delta, \tau')}{(\tau - \tau')^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 h^2 [f_1^n(\Delta, \tau')]^2}{4(\tau - \tau')} \right\} d\tau' \end{aligned}$$

Для расчетов, проводящихся в п. 4, удобно вести отсчет времени от момента остановки фронта химической реакции, т. е. положить $\bar{\tau} = \tau - (n-1)T - \Delta$. Тогда зависимость (3.2) принимает вид

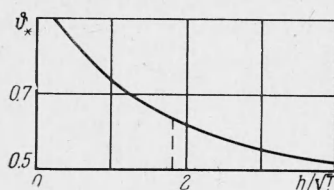
$$(3.3) \quad \begin{aligned} 2\theta - 1 &= \sum_{i=-\infty}^{n-1} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{h(n-i)}{2\sqrt{\bar{\tau} + (n-i-1)T}} \right] - \right. \\ &- \left. \operatorname{erf} \left[\frac{h(n-i)}{2\sqrt{\bar{\tau} + (n-i)T}} \right] \right\} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(n-1)T-\Delta}^{(n-1)T} \times \\ &\times \frac{h[1 - \beta f_2^{n-1}(\Delta, \tau')]}{((n-1)T + \Delta + \bar{\tau} - \tau')^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{h^2[1 - \beta f_2^{n-1}(\Delta, \tau')]^2}{4((n-1)T + \Delta + \bar{\tau} - \tau')} \right\} d\tau' + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{(n-1)T}^{(n-1)T+\Delta} \frac{\alpha h f_1^n(\Delta, \tau')}{((n-1)T + \Delta + \bar{\tau} - \tau')^{3/2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 h^2 [f_1^n(\Delta, \tau')]^2}{4((n-1)T + \Delta + \bar{\tau} - \tau')} \right\} d\tau' \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (3.2), представляющее собой сходящийся ряд с положительными членами, возникает в результате интегрирования по отрезкам $[(i-1)T + \Delta, iT - \Delta]$. Можно по-

казать, что интегралы по переходным участкам $[(i-1)T, (i-1)T + \Delta]$ и $[iT - \Delta, iT]$ ($i = \infty, \dots, n-1$) дают в величину Φ вклад порядка Δ/T , за исключением интегралов по последнему переходному участку $[(n-1)T - \Delta, (n-1)T + \Delta]$, которые и записаны в правой части (3.2). Эти интегралы дают конечный вклад в величину Φ , зависящий от поведения сглаживающих функций f_1 и f_2 , только в самом начале периода остывания зоны химической реакции, когда $\tau - (n-1)T \sim \Delta$. Для времен $\tau - (n-1)T \gg \Delta$ величина интегралов в правой части (3.2) имеет порядок Δ/T , и зависимость температуры в зоне реакции от времени с точностью до малых порядка Δ/T имеет вид

$$(3.4) \quad 2\Phi - 1 = \sum_{i=-\infty}^{n-1} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{ih(n-i)}{2\sqrt{\tau - iT}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{h(h-i)}{2\sqrt{\tau - (i-1)T}} \right] \right\}$$

Таким образом, функция Φ резко падает в начале периода (на временах порядка Δ) от некоторого значения превышающего адиабатическую температуру горения (величина превышения зависит от закона движения фронта реакции на переходном участке), до меньшей величины, а затем плавно меняется в соответствии с (3.4). Такое поведение функции $\Phi(\tau)$ объясняется тем, что после сгорания очередной порции исходного вещества температура в зоне реакции сильно повышается, а потоки тепла в зону продуктов реакции и в зону исходного вещества становятся очень большими, что и приводит к резкому снижению температуры.



Фиг. 2

Подставляя величину $\tau = nT - \Delta$ в (3.4), получим температуру в зоне реакции Φ_* , при которой происходит воспламенение

$$(3.5) \quad 2\Phi_* - 1 = \sum_{i=-\infty}^{n-1} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{h}{2\sqrt{T}} \sqrt{n-i} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{h}{2\sqrt{T}} \frac{n-i}{\sqrt{n-i+1}} \right] \right\}$$

Зависимость температуры воспламенения от параметра h/\sqrt{T} представлена на фиг. 2. Эта кривая является универсальной, так как Φ_* не зависит от других параметров задачи.

4. Дополнительные соотношения, определяющие размер скачков и период пульсаций. После воспламенения и быстрого сгорания очередной порции исходного вещества фронт реакции останавливается, а температура в зоне химического превращения значительно возрастает. При этом резко возрастает отток тепла в область исходного вещества, что приводит к ее прогреву за счет тепла, поступающего из зоны продуктов реакции. Как только прогретый слой в непрореагировавшем веществе становится достаточно большим, происходит воспламенение.

Чтобы задать условие воспламенения, воспользуемся представлениями теории зажигания горючего вещества накаленной поверхностью, разработанной Я. Б. Зельдовичем [8, 9]. В начале периода остывания зоны химической реакции, когда градиент температуры при $\xi = 0$ очень крутой, можно пренебречь теплом, выделяющимся в зоне реакции, по сравнению с теплом, отводящимся в глубь исходного вещества, и считать его прогрев как прогрев инертного вещества с заданной на границе температурой, меняющейся со временем согласно зависимости (3.3). С течением времени теплоотвод в область $\xi < 0$ уменьшается, а толщина

реагирующего слоя увеличивается так что тепло, выделяющееся в зоне реакции, становится сравнимым с теплом, отводящимся в исходное вещество. Следуя [9], зададим условие воспламенения (достижения температуры воспламенения) как равенство критическому значению Φ_* теплового потока Φ_1 из зоны реакции в область $\xi < 0$. Поток Φ_* соответствует наименьшему тепловому потоку, при котором еще существует стационарное распределение температуры в реагирующем слое вещества. Итак, условие воспламенения имеет вид

$$(4.1) \quad \Phi_1 = l\Phi_* = l\sqrt{2} \frac{\varepsilon + \Phi_*}{\varepsilon + 1} \exp \frac{\Phi_* - 1}{2\gamma(\Phi_* + \varepsilon)} \quad \left(\varepsilon = \frac{cT_0}{Q}, \gamma = \frac{RT_a}{E} \right)$$

В (4.1) введен дополнительно поправочный коэффициент l , который имеет величину порядка единицы и может быть выбран из сравнения результатов теории с экспериментальными данными или результатами расчетов на ЭВМ в целях более точного описания явления при его отклонении от идеальной схемы, рассматриваемой в работе.

Для определения, потока тепла в глубь исходного вещества в пренебрежении теплопроводностью в зоне химической реакции следует решить задачу теплопроводности:

$$(4.2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \\ \bar{\tau} = 0, \theta = \theta_0(\xi), \xi = 0, \theta = \vartheta(\bar{\tau}), \xi = -\infty, \theta = 0$$

Здесь $\theta_0(\xi)$ — распределение температуры в исходном веществе в момент остановки фронта реакции. Решение (4.2) имеет вид

$$(4.3) \quad \theta(\xi, \bar{\tau}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\xi/2\sqrt{\bar{\tau}}}^{+\infty} \vartheta\left(\bar{\tau} - \frac{r^2}{4\bar{\tau}}\right) e^{-r^2} dr + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi\bar{\tau}}} \int_0^{\infty} \theta_0(y) \left[\exp\left(-\frac{(\xi+y)^2}{4\bar{\tau}}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi-y)^2}{4\bar{\tau}}\right) \right] dy$$

Вычисляя отсюда тепловой поток из зоны реакции в момент воспламенения, получим

$$(4.4) \quad \Phi_1 = \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(0, T) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\vartheta(0)}{\sqrt{T}} - \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \int_{-\xi/2\sqrt{T}}^{+\infty} \vartheta' \frac{e^{-r^2}}{r^2} dr - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sqrt{T}} \int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{4T}\right) \theta_0(y) dy \right\}$$

Как показывают численные расчеты [1, 2], начальное распределение $\theta_0(\xi)$ таково, что толщина прогретого слоя в начальный момент мала по сравнению с толщиной слоя, прогреваемого к моменту воспламенения. Это позволяет пренебречь последним слагаемым в правой части (4.4), которое описывает влияние начального распределения температуры. Подставим теперь выражение для $\vartheta(\bar{\tau})$ из (3.3) в (4.4) и вычислим тепловой поток Φ_1 с точностью до малых порядка Δ/T , имея в виду, что вклад в величину Φ_1 от интегралов в правой части (3.3), описывающих влияние переходного участка, в силу их быстрого затухания (на временах по-

рядка Δ) пренебрежимо мал. В результате получим

$$(4.5) \quad \varphi_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} [1 + g(z)] \quad (z = h/2\sqrt{T})$$

$$g(z) = \sum_{i=-\infty}^{n-1} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{z(n-i)}{\sqrt{n-i-1}} \right) - \operatorname{erf} (z\sqrt{n-i}) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} \exp \left(-\frac{z^2(n-i)^2}{(n-i+1)} \right) \operatorname{erf} \left(z\sqrt{\frac{n-i}{n-i+1}} \right) -$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{n-i}} \exp(-z^2(n-i)) \operatorname{erf} \left(z\sqrt{\frac{n-i}{n-i-1}} \right) \right\}$$

Подставляя теперь φ_1 из (4.5) в (4.1), получим условие воспламенения в виде

$$(4.6) \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \left[1 + g \left(\frac{h}{2\sqrt{T}} \right) \right] = l\sqrt{2} \frac{\varepsilon + \vartheta_*}{\varepsilon + 1} \exp \frac{\vartheta_* - 1}{2\gamma(\varepsilon + \vartheta_*)}$$

Заметим, что условие воспламенения $\varphi_1 = \varphi_*$ используется в теории зажигания вещества накаленной поверхностью, на которой поддерживается постоянная температура. В рассматриваемой здесь задаче воспламенения функция $\vartheta(\bar{\tau})$, описывающая закон изменения температуры во времени на поверхности воспламеняемого вещества, резко меняется от некоторого значения при $\bar{\tau} = 0$, превышающего адиабатическую температуру горения, до значительно меньшего значения за время порядка Δ , а затем изменяется более медленно (близка к постоянной) в соответствии с поведением ряда в правой части (3.3), который зависит от комбинации h/\sqrt{T} . В силу этого обстоятельства можно с хорошей точностью применять условие (4.4).

Величину h , на которую перемещается фронт реакции при каждом своем передвижении, можно приближенно определить по известному в момент воспламенения градиенту температуры вблизи зоны реакции, т. е.

$$(4.7) \quad h = m \frac{\vartheta_*}{\varphi_*} = m \frac{\vartheta_*}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon + \vartheta_*} \exp \frac{1 - \vartheta_*}{2\gamma(\varepsilon + \vartheta_*)}$$

Здесь m — поправочный коэффициент порядка единицы. Заметим, что поправочные коэффициенты типа введенных в формулы (4.1) и (4.7) обычно используются в приближенной теории зажигания (см., например, [9, 10]) для лучшего количественного совпадения данных физических или численных экспериментов с теоретическими зависимостями, которые хорошо передают все качественные закономерности.

5. Последовательность расчета. Сравнение результатов с данными по численному решению задачи на ЭВМ. Для определения величин h и T следует разрешить относительно этих величин соотношения (3.5), (4.6), (4.7). Удобно поступить следующим образом. Перемножив правые и левые части уравнений (4.6) и (4.7) получим (далее весь расчет проводится для $l = m = 1$)

$$(5.1) \quad \frac{h}{\sqrt{T}} [1 + g(h/2\sqrt{T})] = 2\sqrt{\pi} \vartheta_* (h/\sqrt{T})$$

Графики левой (кривая 1) и правой (кривая 2) частей уравнения (5.1) представлены на фиг. 3. Точка пересечения кривых определяет искомое значение $h/\sqrt{T} = 1.89$ (если коэффициенты l и m отличны от единицы, величина отношения h/\sqrt{T} , естественно, меняется). Теперь из фиг. 2

можно определить температуру воспламенения $\dot{\vartheta}_* = 0.625$. Заметим, что указанные значения величин h / \sqrt{T} и $\dot{\vartheta}_*$ универсальны для всех режимов (при $l = m = 1$), соответствующих распространению фронта химической реакции «скачками». Таким образом, весь расчет сводится к определению величины h по формуле (4.7) при заданных значениях параметров ε , γ и при $\dot{\vartheta}_* = 0.625$ и последующему вычислению периода пульсаций (5.2)

$$T = (h / 1.89)^2$$

и средней скорости распространения фронта химической реакции $\omega = h/T$.

Отметим, что температура воспламенения $\dot{\vartheta}_* = 0.625$ не сильно отличается от значения $\dot{\vartheta}_* = 0.5$, которое получается при решении авторемодельной задачи о распаде тепловой ступеньки ($\theta_1(\xi, 0) = 0$, $\theta_2(\xi, 0) = 1$). Однако имеющееся различие, обусловленное влиянием всех предыдущих циклов колебаний, очень существенно при определении критических условий воспламенения. Если проводить вычисления по формулам (4.7), (5.2), используя $\dot{\vartheta}_* = 0.5$, то результаты будут на несколько порядков отличаться от величин, получаемых с помощью расчетов на ЭВМ.

Проведем сравнение с выполненными в работе [2] численными расчетами, результаты которых представлены на фиг. 1 в безразмерных переменных, принятых в этой работе, $\xi_*' = xu_a' / \kappa$, $\tau' = tu_a'^2 / \kappa (u_a' - \text{стационарная скорость распространения фронта реакции на границе устойчивости, соответствующей } \gamma = 0.1619)$.

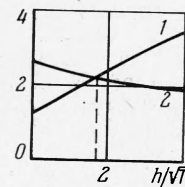
Для режима 1 (кривая 1), отвечающего $\gamma = 0.0952$, $\varepsilon = 0.05$, находим $h' = h (u_a' / u_a) = 180$, $T' = T (u_a' / u_a)^2 = 4600$, $\omega' = \omega (u_a' / u_a) = 0.039$. С другой стороны, из формул (4.7), (5.2) следует $h' = 145$, $T' = 5810$ и $\omega' = 0.025$. Для режима 2 (кривая 2), соответствующего $\gamma = 0.1048$, $\varepsilon = 0.05$, численный расчет дает $h' = 125$, $T' = 1450$, $\omega' = 0.086$, а вычисления по формулам (4.7) и (5.2) — $h' = 64$, $T' = 1150$ и $\omega' = 0.056$.

Таким образом, наши вычисления показывают, что при уменьшении параметра γ (увеличении энергии активации) период пульсаций скорости горения и величина перемещения фронта реакции за время одного колебания увеличиваются, а средняя скорость уменьшается.

Приведенное выше сравнение с результатами численных расчетов свидетельствует о том, что предлагаемая в работе модель пульсирующего горения конденсированных систем качественно правильно передает основные черты процесса и удовлетворительно согласуется количественно с результатами расчетов на ЭВМ.

В заключение заметим, что иные схемы релаксационных колебаний скорости горения бездымных порохов рассматривались в работах [11,12].

Авторы благодарят А. П. Алдушина, А. Г. Мержанова, Б. И. Хайкина, К. Г. Шкадинского за полезные обсуждения и предоставление подробных данных по численным расчетам, а также В. И. Лисицына за помощь в работе.



Фиг. 3

Поступила 19 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадинский К. Г., Хайкин Б. И., Мержанов А. Г. Распространение пульсирующего фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе. Физика горения и взрыва, 1971, т. 7, № 1.
2. Алдушин А. П., Мартемьянова Т. М., Мержанов А. Г., Хайкин Б. И., Шкадинский К. Г. Автоколебательное распространение фронта горения в гетерогенных конденсированных средах. Физика горения и взрыва, 1973, т. 9, № 5.

3. *Мержанов А. Г., Филоненко А. К., Боровинская И. П.* Новые явления при горении конденсированных систем. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 4.
4. *Максимов Э. М., Шкадинский К. Г.* Об устойчивости стационарного горения безгазовых составов. Физика горения и взрыва, 1971, т. 7, № 3.
5. *Махвиладзе Г. М., Новожилов Б. В.* Двумерная устойчивость горения конденсированных систем. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 2. Минск, 1972.
6. *Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* О релаксационных колебаниях скорости распространения фронта химической реакции в конденсированной среде. Тезисы докл. Всес. конф. Процессы горения в химической технологии и металлургии. Черноголовка, 1973.
7. *Новожилов Б. В.* Уравнение для нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1970, № 4.
8. *Зельдович Я. Б.* Теория зажигания накаленной поверхностью. ЖЭТФ, 1939, т. 9, вып. 12.
9. *Зельдович Я. Б.* К теории зажигания. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 2.
10. *Вилунов В. Н.* К тепловой теории зажигания. Физика горения и взрыва, 1966, т. 2, № 2.
11. *Фур З. И.* О механизме распространения горения в бездымном порохе. Инж.-физ., 1963, № 12.
12. *Huffington I. D.* The unsteady burning of cordite. Trans. Faraday Soc., 1954, vol. 50, pp. 942—952.