Сравнение полученных данных с результатами для однородного материала показывает, что неоднородность существенно влияет на напряженно-деформированное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кузнецов А. И.** Вдавливание жестких штампов в полупространство при степенном упрочнении и при нелинейной ползучести материала // ПММ.— 1962.— Т. 26, № 2.
2. **Задоян М. А.** Динамическое деформирование несжимаемых сред // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 5.
3. **Современные** численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта.— М.: Мир, 1979.

г. Ереван *Поступила 9/XI 1988 г., в окончательном варианте — 4/V 1989 г.*

УДК 539.4

В. А. Буряченко, А. М. Липанов

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Некоторые задачи структурной механики композитов не могут быть решены в рамках линейной теории (например, задачи устойчивости, распространения волн в предварительно деформированных неоднородных материалах). В настоящей работе предлагается метод расчета макроскопических модулей упругости второго и третьего порядков. Изучается микронеоднородная среда в приближении геометрически линейной теории. Решение задачи оценки моментов полей деформаций в компонентах получено с помощью нелинейного варианта метода эффективного поля [1—4]. Метод основан на решении задачи бинарного взаимодействия включений, находящихся в эффективном поле, в предположении однородности деформаций внутри каждого включения. Принималось допущение об однородности вторых моментов полей деформаций в компонентах.

1. Общие соотношения. В макрообъеме w с характеристической функцией W рассмотрим смесь упругих компонентов, механические свойства которых описываются геометрически линейной теорией (вторым вариантом малых начальных деформаций по классификации [5]), когда тензор деформаций ε_{ij} связан с компонентами вектора смещений u_i соотношением

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j}+u_{j,i})/2,$$

а уравнение состояния имеет вид

$$\sigma = L\varepsilon + \mathscr{L}\, \varepsilon \otimes \varepsilon. \tag{1.1}$$

В частности, для потенциала Мурнагана

$$\Phi = (1/2)\,\lambda A_1^2 + \mu A_2\,(a/3)\,A_1^3 + bA_1A_2 + (c/3)\,A_3 \tag{1.2}$$

($A_1 = \varepsilon_{ii}$, $A_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$, $A_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki}$ — алгебраические инварианты тензоров деформаций) из (1.1), (1.2) и соотношения $\sigma_{ij} = (1/2)(\partial/\partial\varepsilon_{ij} + \partial/\partial\varepsilon_{ji})\Phi$ получим

$$L_{ijkl} = 3kN^1_{ijkl} + 2\mu N^2_{ijkl},\ N^1_{ijkl} = (1/3)\,\delta_{ij}\delta_{kl},$$

$$N^2_{ijkl} = I_{ijkl} - N^1_{ijkl},\ I_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2,$$

$$\mathscr{L}_{ijklmn} = 3a\delta_{ij}N^1_{mnkl} + b\,(\delta_{ij}I_{mnkl} + \delta_{mn}I_{ijkl} + \delta_{kl}I_{mnij}) + cJ_{ijmnkl},$$

$$J_{ijmnkl} = (I_{ipkl}I_{pjmn} + I_{ipmn}I_{pjkl})/2.$$

Матрица с характеристической функцией V_0 и модулями L_0, $\mathscr{L}_0$ содержит множество $X = (V_k,\ L^{(k)}, \underset{i}{\mathscr{L}^{(k)}})$ эллипсоидов v_k с характеристическими функциями V_k, полуосями a_k, ориентациями ω_k, центрами x_k, модулями $L^{(k)}$, $\mathscr{L}^{(k)}$.

Здесь и ниже принята безындексная форма записи тензорных уравнений. Под произведением тензоров понимается их свертка по внутренним индексам. Прямое тензорное произведение обозначено знаком $\otimes$. Применяются стандартные гипотезы микронеоднородных сред [1, 6]: все рассматриваемые случайные поля предполагаются статистически однородными и эргодическими, тем самым статистическое усреднение по ансамблю может быть заменено усреднением по характерному объему

$$\langle(\cdot)\rangle = (\mathrm{mes}\ w)^{-1} \int (\cdot) W(r) dr,\ \langle(\cdot)\rangle_\alpha = (\mathrm{mes}\ v_\alpha)^{-1} \int (\cdot) V_\alpha(r) dr$$
$$(\alpha = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Используется также обозначение $\langle(\cdot)|x_2;\ x_1\rangle$ для условного среднего по ансамблю X при условии, что в точках x_1 и x_2 находятся включения и $x_1 \neq x_2$. Компоненты относятся к разным фазам X_α, если будут различными хотя бы один из параметров a_α, ω_α, $L^{(\alpha)}$, $\mathscr{L}^{(\alpha)}$.

Уравнение равновесия для микронеоднородной среды без учета массовых сил имеет вид

$$\nabla\,[(L_0 + L_1(x))\varepsilon(x) + (\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1(x))\varepsilon(x) \otimes \varepsilon(x)] = 0, \tag{1.3}$$

где ∇ — операция симметрированного градиента;

$$L_1(x) = \sum_k V_k(x)\left(L^{(k)} - L_0\right),\ \ \mathscr{L}_1 = \sum_k V_k(x)\left(\mathscr{L}^{(k)} - \mathscr{L}_0\right).$$

Уравнение (1.3) нелинейно; для получения обозримых конечных результатов используем линеаризацию (1.3), состоящую в предположении однородности $\varepsilon(x) \otimes \varepsilon(x)$ в пределах фазы X_α: $\varepsilon(x) \otimes \varepsilon(x) = \langle\varepsilon(x) \otimes \varepsilon(x)\rangle_\alpha$ при $x \in X_\alpha$, и обозначим $q(x) = \left(L_0 + L_1^{(\alpha)}\right)^{-1}\left(\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1^{(\alpha)}\right)\langle\varepsilon(x) \otimes \varepsilon(x)\rangle_\alpha$, $q(x) = q_0$ при $x \in X_0$, $q_1(x) = \sum\limits_{k=1} (q(x) - q_0) V_k$. Правило вычисления кусочно постоянного тензора второго ранга q описано ниже. В принятых обозначениях выражение (1.3) запишем в виде

$$\nabla(L_0 + L_1(x))[\varepsilon(x) + q(x)] = 0 \tag{1.4}$$

с точностью до обозначений, совпадающим с аналогичным соотношением линейных теорий газонасыщенных пористых сред [2] и термоупругости [3] микронеоднородных сред. Поэтому для решения (1.4) используем предложенный ранее [1—3] аппарат метода эффективного поля. Именно, с помощью фундаментального решения G уравнения равновесия однородной линейно-упругой среды с модулем L_0 соотношение (1.4) приведем к интегральному уравнению относительно модифицированной деформации $e = \varepsilon - q_0$

$$\begin{aligned} e(x) = \langle e\rangle + \int \nabla\nabla G(x-y)\{L_1(y)e(y) - (L_0 + L_1(y))q_1(y) - \\ - [\langle L_1 e\rangle - \langle(L_0 + L_1)q_1\rangle]dy. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Выражая (1.5) в напряжениях, с учетом $\langle\sigma\rangle = \sigma^0$ получим

$$\sigma(x) = \sigma^0 + \int \Gamma(x-y)\{M_1(y)\sigma(y) - q_1(y) - [\langle M_1\sigma\rangle - \langle q_1\rangle]\}dy.$$

Здесь $M_0 = L_0^{-1}$; $M_0 + M_1(x) \equiv M_0 + M_1^{(k)} \equiv \left(L_0 + L_1^{(k)}\right)^{-1}$ при $x \in v_k$ — податливость k-го включения; $\Gamma(x-y) = -L_0(I\delta(x-y) + \nabla\nabla G(x-y)L_0)$; δ — дельта-функция.

Эффективные модули второго и третьего порядка в соотношении

$$\langle\sigma\rangle = L_*\langle\varepsilon\rangle + \mathscr{L}_*\langle\varepsilon\rangle \otimes \langle\varepsilon\rangle \tag{1.6}$$

найдем, осредняя локальное уравнение (1.1):

$$(1.7)\qquad L_* = L_0 + \langle L_1 A^* \rangle,\ \mathscr{L}_* = \sum_{\nu=1} \langle L_1^{(\nu)} \mathscr{F}_1^{(\nu)} \rangle_\nu + \sum_{\alpha=0} \xi_\alpha \mathscr{L}^{(\alpha)} \mathscr{F}_2^{(\alpha)},$$

где $\xi_\alpha = \langle V_\alpha \rangle$; тензоры четвертого A^*, шестого $\mathscr{F}_1$ и восьмого $\mathscr{F}_2$ рангов определяют среднюю концентрацию деформаций в компоненте $X_\alpha \ni x$

$$(1.8)\quad \langle \varepsilon \rangle_\alpha = A_0^* \langle \varepsilon \rangle + \mathscr{F}_1(x) \langle \varepsilon \rangle \otimes \langle \varepsilon \rangle,\ \langle \varepsilon \otimes \varepsilon \rangle_\alpha = \mathscr{F}_2(x) \langle \varepsilon \rangle \otimes \langle \varepsilon \rangle.$$

2. Оценка средних деформаций в компонентах. Фиксируем произвольную реализацию поля X и рассмотрим эффективное поле $\bar{e}(x)$, $x \in v_k$, в котором находится включение

$$(2.1)\quad \bar{e}(x) = \langle e \rangle + \int U(x-y)\{V(y;x)[L_1(y)e(y) + (L_0 + L_1(y))q_1(y)] - [\langle L_1 e \rangle + \langle (L_0 + L_1) q_1 \rangle]\} dy$$

$$\left(V(y;x) = V(y) - V_k(x),\ V(y) = \sum_{k=1} V_k(y),\ U = \nabla\nabla G\right).$$

Поле X, а значит, и $\bar{e}$ случайны; для нахождения $\langle \bar{e} \rangle$ воспользуемся гипотезами метода эффективного поля, подробно описанными в [1, 2], согласно которым: 1. Поле $\bar{e}$ однородно в окрестности каждого точечного включения. 2. Каждые n $(n > 1)$ включений находятся в своем, вообще говоря, неоднородном поле $\widehat{e}_{1,\ldots,n}$.

По однородному полю $\bar{e}$ однозначно определяется однородное поле деформаций внутри каждого включения [2]:

$$(2.2)\qquad e(x) = A_k\left(\bar{e} - P_k\left(L_0 + L_1^{(k)}\right) q_1\right),\ A_k = \left(I + P_k L_1^{(k)}\right)^{-1},$$

где $x \in v_k$ и постоянный тензор $P_k = -\int U(x-y) V_k(y) dy$ $(x \in v_k)$ известен.

Опишем структуру композита функцией $\varphi(v_m | v_k)$ — условной плотностью распределения m-го включения в области v_m при фиксированном включении в области v_k. Вследствие того что включения не пересекаются, примем

$$(2.3)\qquad \varphi(v_m | v_k) \equiv \psi(\omega_m)\left(1 - V'_{km}\right) f_{km}(|r|)(\operatorname{mes} W)^{-1}.$$

Из условия нормировки $\langle \psi(\omega_m) \rangle = 1$, при отсутствии ближнего порядка $f_{km}(|r|) = n_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, если $v_m \in X_\nu$; n_ν — счетная концентрация включений компонента X_ν — связана с объемной концентрацией $\xi_\nu = (4/3)\pi a_\nu^1 a_\nu^2 a_\nu^3 n_\nu$; V'_{km} — характеристическая функция шара v'_{km} с центром x_k и радиусом $a_{km} = \min_i a_m^i + \max_i a_k^i$.

Осредняя (2.1) на множестве $X(\cdot | x_k)$, с помощью (2.3) в предположении правомерности гипотезы 1 эффективного поля получим

$$(2.4)\qquad \langle \bar{e}_k \rangle = \langle e \rangle + \int U(x-y)\{\langle [L_1 A(y) \bar{e}(y) + A(y)(L_0 + L_1) q_1] V(y;x) | y; x \rangle - [\langle L_1 A \bar{e} \rangle + \langle A(L_0 + L_1) q_1 \rangle]\} dy.$$

Для вычисления условных моментов в (2.4) воспользуемся гипотезой 2 с $n = 2$ и первыми приближениями решения задачи бинарного взаимодействия включений, находящихся в однородной матрице [3]. Тогда аналогично [3] запишем

$$(2.5)\qquad \bar{e} = D(\langle e \rangle + \langle F \rangle),$$

$$D = \left(I - P_0 \langle R \rangle - \int \langle\!\langle J_{12}\left(1 - V'_{12}\right) f_{12} \rangle\!\rangle_{12} dx_2\right)^{-1},$$

$$F = P_0 R q_1 + \int \langle\!\langle T_{12}\left(1 - V'_{12}\right) f_{12} q_1 \rangle\!\rangle_{12} dx_2,$$

где $R_k = L_1^{(k)} A_k \bar{v}_k$; $\bar{v}_k = \operatorname{mes} v_k$; $P_0 = P\left(v'_{km}\right)$; $J_{12} = U R_2 U R_1$; $T_{12} = U R_2 U A_1 \left(L_0 + L_1^{(k)}\right)$;

$\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_{km}$ обозначают операцию осреднения по ω_k, ω_m, a_{km} и положениям x_m на сфере радиуса $|r| = |x_k - x_m|$ с центром в x_m.

Из (2.5) найдем среднюю деформацию в компонентах включений X_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) и матрице X_0

$$\langle\varepsilon_\nu\rangle = A_\nu D\{\langle\varepsilon\rangle - P_\nu(L_0 + L_1)D^{-1}q_1 + q_0 + \langle F\rangle\}, \tag{2.6}$$

$$(1-\xi)\langle\varepsilon\rangle_0 = \langle\varepsilon\rangle - \sum_{\nu=1}\xi_\nu\langle\varepsilon\rangle_\nu, \quad A_\nu^* = A_\nu D,$$

$$A_0^* = (I - \langle ADV\rangle)(1-\xi)^{-1}, \quad \xi = \langle V\rangle.$$

Выражения A^* в (2.6) позволяют определить эффективный модуль второго порядка L_* с помощью соотношения (1.7). При равновероятной ориентации включений тензоры $\langle R\rangle$, $\langle\!\langle J_{12}\rangle\!\rangle_{12}$, $\langle\!\langle T_{12}\rangle\!\rangle_{12}$, D, L_* изотропны и

$$\langle\!\langle J_{12}\rangle\!\rangle_{12} = (3J_{12}^1, 2J_{12}^2), \quad \langle\!\langle T_{12}\rangle\!\rangle_{12} = (3T_{12}^1, 2T_{12}^2), \quad 3J_{12}^1 = 2\beta^2(3\bar{k}_1)(2\bar{\mu}_2)|r|^{-6},$$

$$2J_{12}^1 = (2/5)[\beta^2(3\bar{k}_2)(2\bar{\mu}_1) + (2\bar{\mu}_1)(2\bar{\mu}_2)(7\gamma^2 - \eta^2/4 + 2\beta\eta)]|r|^{-6},$$

$$\beta = (3k_0 + 4\mu_0)^{-1}, \ \eta = (3\mu_0)^{-1}, \ \gamma = (3k_0 + 4\mu_0)[3\mu_0(3k_0 + 4\mu_0)]^{-1},$$

где для изотропного тензора B_{ijkl} приняты обозначения

$$B = (3B^1, 2B^2) = 3B^1N^1 + 2B^2N^2,$$

$$\langle L_1^{(i)}A_i\rangle\prod_{j=1}^{3}a_i^j = (3\bar{k}_i, 2\bar{\mu}_i), \quad \langle L_1A\rangle = \int L_1A\psi(\omega)\,d\omega.$$

Для получения $3T_{12}^1$, $2T_{12}^2$ нужно в $2J_{12}^2$ заменить $(3\bar{k}_1, 2\bar{\mu}_1)$ на $(3t_1, 2t_2) = \langle(L_0 + L_1^{(1)})A_1\rangle\prod_{j=1}^{3}a_i^j$.

3. Вычисление $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{L}_*$. До сих пор мы полагали, что q_0, q_1 известны, но по предположению эти тензоры зависят от вторых моментов полей деформаций в компонентах. В этом случае задача (1.3) нелинейна, и для оценки постоянных тензоров q_α ($\alpha = 0, 1, \ldots$) используем метод последовательных приближений [4] $q_\alpha^{(n+1)} = \langle\varepsilon^{(n)}\otimes\varepsilon^{(n)}\rangle_\alpha(L_0 + L_1^{(\alpha)}(x))^{-1}(\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1^{(\alpha)}(x))$, $q_\alpha^{(0)} = 0$ значения $\langle\varepsilon^{(n)}\otimes\varepsilon^{(n)}\rangle$ оценим по методу [1] при известном $q_\alpha^{(n)}$. Для сокращения выкладок в (1.8) воспользуемся первым итерационным приближением $\langle\varepsilon^{(0)}\otimes\varepsilon^{(0)}\rangle_\alpha$ и $\langle\varepsilon^{(1)}\rangle_1$. Вычисление второго момента $\langle\varepsilon^{(0)}\otimes\varepsilon^{(0)}\rangle_\alpha$ можно провести с помощью построения корреляционной функции полей деформаций по методу [1]; если при этом в решении задачи бинарного взаимодействия включений [1] методом последовательных приближений учитывались, как в (2.5), члены ряда, убывающие на бесконечности не быстрее J_{12}, то можно показать, что

$$\langle\varepsilon^{(0)}\otimes\varepsilon^{(0)}\rangle_\alpha = \langle\varepsilon^{(0)}\rangle_\alpha\otimes\langle\varepsilon^{(0)}\rangle_\alpha \ (\alpha = 0, 1, \ldots). \tag{3.1}$$

Сравнивая (1.8) с (2.6), (3.1), получим

$$\mathscr{F}_2^{(\alpha)} = A_\alpha^*\otimes.A_\alpha^*, \quad \mathscr{F}_1^{(\nu)} = A_\nu D\{L_0^{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{F}_2^{(0)} - P_\nu D^{-1}(\mathscr{L}^{(\nu)}\mathscr{F}_2^{(\nu)} -$$

$$- L^{(\nu)}L_0\mathscr{L}_0\mathscr{F}_2^{(0)}) + P_0\langle[(\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_1)A\mathscr{F}_2 - (L_0 + L_1)AL_0^{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{F}_2^{(0)}]V\rangle +$$

$$+ \int\langle\!\langle UR_2U[\mathscr{L}^{(1)}A_1\mathscr{F}_2 - LA_1L_0^{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{F}_2^{(0)}](1 - V_{12}')f_{12}\rangle\!\rangle_{12}dx_2\} -$$

$$- L_0^{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{F}_2^{(0)} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots; \ \nu = 1, 2, \ldots).$$

Аналогично определим $\mathscr{F}_1^{(0)}$. Подстановка найденных значений $\mathscr{F}_1^{(\alpha)}$, $\mathscr{F}_2^{(\alpha)}$ из (3.1) в (1.7) позволяет найти эффективный модуль упругости третьего порядка

$$\mathscr{L}_* = \sum_{\alpha=0}\xi_\alpha\mathscr{L}^{(\alpha)}\otimes A_\alpha^*\otimes A_\alpha^*\otimes A_\alpha^*. \tag{3.2}$$

Это выражение обобщает аналогичное соотношение [6] на случай произвольного числа компонентов. Для двухкомпонентных композитов (3.2) с точностью до обозначений совпадает с приведенными в [6], отличие со-

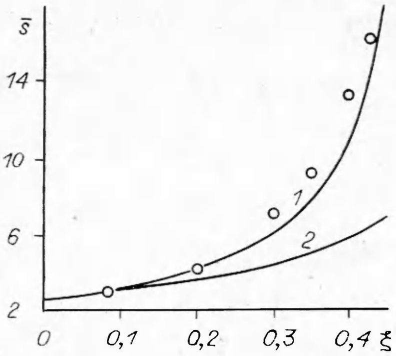

Рис. 1

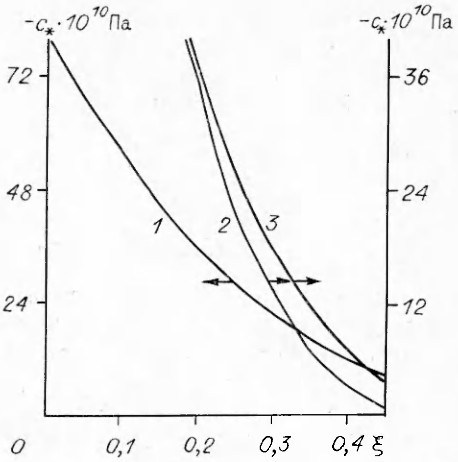

Рис. 2

стоит в конкретных уравнениях для A^*_α, т. е. в решении линейно-упругой задачи.

В общем случае тензоры A^*_α, а значит, и L_*, $\mathscr{L}_*$ анизотропны; при равновероятной ориентации включений A^*_α, L_*, $\mathscr{L}_*$ изотропны: $A^*_\alpha = (3r_\alpha, 2s_\alpha)$,

$$\mathscr{L}_{*ijmnkl} = a_*\delta_{ij}\delta_{mn}\delta_{kl} + b_*(\delta_{ij}I_{mnkl} + \delta_{mn}I_{ijkl} + \delta_{kl}I_{ijkl}) + c_*J_{ijmnkl},$$

$$a_* = \sum_{\alpha=0} 3\xi_\alpha\left[9a_\alpha r^3_\alpha + 3b_\alpha p_\alpha r_\alpha(3r_\alpha + 2s_\alpha) + c_\alpha p^2_\alpha(p_\alpha + 2s_\alpha)\right],$$

$$b_* = \sum_{\alpha=0} \xi_\alpha(2s_\alpha)^2(3b_\alpha r_\alpha + c_\alpha p_\alpha), \quad c_* = \sum_{\alpha=0} \xi_\alpha c_\alpha(2s_\alpha)^3$$

($3p_\alpha = 3r_\alpha - 2s_\alpha$; a_α, b_α, c_α — компоненты $\mathscr{L}^{(\alpha)}$).

Пример. Поскольку отличие в оценках $\mathscr{L}_*$ по предложенному методу и результатам [6] связано с решением линейно-упругой задачи вычисления A^*_α, приведем количественное сравнение A^*_α, рассчитанных по методам условных моментов [6] и эффективного поля [1]. Для жестких шаровых включений одного размера в несжимаемой матрице получим из соотношений (2.2), (2.6), (1.8)

$$2\bar{s} = 2s_1(\mu_*/\mu_0 - 1) = 5(2 - 31\xi/8)^{-1} \text{ и } 2\bar{s} = (5/2 - \xi)(1 - \xi)^{-2}$$

по методу условных моментов (кривые *1* и *2* рис. 1 соответственно; точками изображены экспериментальные данные [7] по изменению эффективной ньютоновской вязкости суспензий при увеличении ξ, перестроенные в координатах $\bar{s} \sim \xi$ с помощью формулы (1.7)). Сравнение аналогичных оценок для шаровых и плоских сфероидальных пор проведено в [2]. На рис. 2 приведена кривая изменения $c_*(\xi)$, рассчитанных по (2.6), (3.2) для стали 09Г2С с шаровыми порами одного размера и параметрами (в Па) $\lambda_0 = 9{,}44\cdot 10^{10}$, $\mu_0 = 7{,}9\cdot 10^{10}$, $a_0 = -82{,}5\cdot 10^{10}$, $b_0 = -30{,}9\cdot 10^{10}$, $c_0 = -79{,}9\cdot 10^{10}$. Значение $c_*(\xi)$ при $\xi = 0{,}4$ на кривой *1* рис. 2 на 20 % больше оценки по методу условных моментов [6]. Заметим, что для пористых сред отношение c_*, определенных по (2.6), (3.2) и [6], равно отношению кубов s_0. Поэтому отличие в оценках c_* по (2.6), (3.2) и [6] будет увеличиваться при росте k_0 и приближении формы включений к плоским сфероидам [2]. Действительно, для шаровых пор и $k_0 = \infty$ на рис. 2 представлены значения $c_*/[c_0(1 - \xi)] \sim \xi$ (кривые *2* и *3*), рассчитанные по формулам [6] и (2.6), (3.2) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буряченко В. А.** Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 3.
2. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Концентрация напряжений на эллипсоидальных включениях и эффективные термоупругие свойства композитных материалов // Прикл. механика.— 1986.— № 11.

3. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Уравнения механики газонасыщенных пористых сред // ПМТФ.— 1986.— № 4.
4. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Эффективные характеристики упругих физически нелинейных композитов // Прикл. механика.— 1990.— № 1.
5. **Гузь А. Н.** Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел.— Киев: Вища школа, 1986.
6. **Маслов Б. П.** Макроскопические модули упругости третьего порядка // Прикл. механика.— 1979.— № 7.
7. **Krieger I. W.** Rheology of monodisperse latices // Adv. in Colloid and Interface Sci.— 1972.— V. 3.— N 2.

г. Москва *Поступила 22/VI 1988 г., в окончательном варианте — 11/V 1989 г.*

УДК 534.202.2

А. В. Еремин, И. М. Набоко

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ В ИМПУЛЬСНЫХ СТРУЯХ ГАЗА, ИСТЕКАЮЩИХ В РАЗРЕЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Излагаются результаты измерения плотности в импульсных струях большой нерасчетности. Обсуждаются приемы получения информации о локальных значениях плотности на основе измерений интегрального ослабления зондирующего электронного луча в специфических условиях нестационарного струйного течения. При оценке последствий импульсных направленных выбросов, рассматривают, как правило, весьма упрощенные схемы течения. Предполагается, что поле течения можно оценить либо по соотношениям и результатам расчетов для стационарных струй, либо на основе модельных представлений течения от пространственно-симметричного мгновенно включенного стационарного источника. Оба подхода приближенные и по мере повышения требований к достоверности информации о характере распределения параметров потока в пространстве в зависимости от времени нуждаются в уточнении.
В [1—3] даны результаты экспериментального изучения импульсных газовых струй, формирующихся при исходной нерасчетности $(P_0/P_\infty)\cdot 10^8$, давлении в фоновом пространстве $P_\infty \backsim 10^{-5}$ мм рт. ст. На основе измерения интегрального поглощения электронного пучка построены поля плотности струй азота и аргона в процессе развития течения. Получены данные о движении фронта струи и особенностях заполнения фонового пространства газом формирующейся струи.
Измерение интегрального ослабления электронного пучка обеспечивает возможность получения информации на пределе чувствительности диагностической аппаратуры в условиях, когда использование других способов локальной диагностики разреженных потоков становится проблематичным. В то же время определение локального значения плотности на основе данных по интегральному поглощению, сводящегося при априори известной геометрии течения (ввиду его симметрии) к решению уравнения Абеля [4—6],— задача трудоемкая.
Анализ характера первичных экспериментальных данных и результатов выполненных ранее расчетов показал возможность аналитического описания распределения плотности в рассматриваемых импульсных струях на основе данных эксперимента.

На рис. 1, *а* приведены типичные осциллограммы поглощения электронного пучка (x-координата вдоль оси струи от среза сопла, y-координата в перпендикулярном оси направлении, Ф — начало поглощения, c — выход на квазистационарный уровень). В опытах регистрировалась лишь переменная составляющая тока пучка, что позволило значительно повысить точность измерений. На рис. 1, *б* показана схема зондирования.

Так как в экспериментах для определения плотности проводится похордовое зондирование осесимметричного течения, связь между значением плотности в точке с координатой (y, ξ) в декартовой системе координат (или с координатой r — в полярной, см. рис. 1, *б*) и значением поглощения вдоль хорды y_i выражается как

$$F(y) = 2\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \rho\left(\sqrt{y^2+\xi^2}\right) d\xi. \tag{1}$$