УДК 539.3

ДВУМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ОДНОКОМПОНЕНТНОГО СЛОЯ

А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

* Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия

E-mails: azemskov1975@mail.ru, tdvhome@mail.ru

С использованием локально-равновесной модели механодиффузии, включающей связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнение массопереноса, решается двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропного однокомпонентного слоя. Решение строится с помощью рядов Фурье, преобразований Лапласа по времени и преобразований Фурье по пространственной координате. Оригиналы преобразования Лапласа находятся аналитически, для обращения преобразования Фурье применяются квадратурные формулы.

Ключевые слова: нестационарная упругая диффузия, изотропный слой, преобразования Лапласа и Фурье, ряды Фурье.

DOI: 10.15372/PMTF20150612

Введение. При аналитическом решении двумерных нестационарных задач для упругого слоя с учетом диффузии на определенном этапе, как правило, применяется интегральное преобразование Лапласа по времени. При этом трудности возникают при обращении преобразования. Существуют различные подходы к решению данной проблемы. Также возможно построение решений указанных задач с помощью разложений в ряды по собственным функциям. В этом случае трансформанты Лапласа являются дробно-рациональными функциями [1–3], что существенно упрощает задачу обращения. Далее приводится решение одной из задач данного класса.

1. Постановка задачи. В прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ рассматривается однородный упругий изотропный слой, ограниченный плоскостями $x_2 = 0$, $x_2 = L$. Полагается, что физико-механические процессы в слое без учета температурных эффектов описываются уравнениями [1–4]

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\mu\Delta\boldsymbol{u}=\rho\,\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}+\alpha\operatorname{grad}\eta,\qquad D\,\Delta\eta=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\Lambda\,\Delta\,(\operatorname{div}\boldsymbol{u}),$$

где $\boldsymbol{u}=\{u_1(x_1,x_2,t),u_2(x_1,x_2,t),0\}$ — вектор перемещений; t — время; $\eta=n-n_0$ — приращение объемной концентрации n веществ относительно начальной концентрации n_0; λ,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-08-01161) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-2029.2014.8).

μ — упругие постоянные Ламе; ρ — плотность среды; α — коэффициент объемного расширения, связанного с массопереносом; D — коэффициент самодиффузии; $\Lambda = n_0 D\alpha/(RT_0)$; R — универсальная газовая постоянная; T_0 — абсолютная температура среды.

На границах слоя задаются касательное напряжение σ_{12} и перемещение u_2, а также координата J_2 вектора диффузионного потока $\boldsymbol{J}$:

$$\sigma_{12}\big|_{x_2=0} = f_{11}(x_1,t), \qquad u_2\big|_{x_2=0} = f_{21}(x_1,t), \qquad J_2\big|_{x_2=0} = f_{31}(x_1,t),$$
$$\sigma_{12}\big|_{x_2=L} = f_{12}(x_1,t), \qquad u_2\big|_{x_2=L} = f_{22}(x_1,t), \qquad J_2\big|_{x_2=L} = f_{32}(x_1,t),$$

где

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mu\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) - \alpha\delta_{ij}\eta, \qquad J_i = \Lambda\delta_{il}\delta_{jk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\,\partial x_j} - D\delta_{ij}\frac{\partial\eta}{\partial x_j},$$

δ_{ij} $(i=1,2)$ — символ Кронекера.

В начальный момент времени слой находится в невозмущенном состоянии.

Введем следующие безразмерные параметры (далее штрих опускается):

$$x_i' = \frac{x_i}{L}, \quad u_i' = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad c^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad \eta' = \frac{\eta}{n_0}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\rho c^2}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\rho c^2}\ (i=1,2),$$
$$\alpha' = \frac{n_0\alpha}{\rho c^2}, \quad D' = \frac{D}{cL}, \quad \Lambda' = \frac{\Lambda}{n_0 cL}, \quad f_{1q}' = \frac{f_{1q}}{\mu}, \quad f_{2q}' = \frac{f_{2q}}{L}, \quad f_{3q}' = \frac{f_{3q}}{n_0 cD}\ (q=1,2).$$

Соответствующий безразмерный аналог указанной выше начально-краевой задачи записывается следующим образом:

$$\ddot u_1 = \Delta_{1\mu}(u_1) + L_{12}(u_2) - L_{13}(\eta), \qquad \ddot u_2 = L_{12}(u_1) + \Delta_{\mu 1}(u_2) - L_{23}(\eta),$$
$$\dot\eta = -L_{31}(u_1) - L_{32}(u_2) + \Delta_{DD}(\eta); \tag{1.1}$$

$$M_1(u_1,u_2)\big|_{x_2=0} = f_{11}(x_1,\tau), \qquad M_1(u_1,u_2)\big|_{x_2=1} = f_{12}(x_1,\tau),$$
$$M_2(u_1,u_2,\eta)\big|_{x_2=0} = f_{31}(x_1,\tau), \qquad u_2\big|_{x_2=0} = f_{21}(x_1,\tau), \tag{1.2}$$
$$M_2(u_1,u_2,\eta)\big|_{x_2=1} = f_{32}(x_1,\tau), \qquad u_2\big|_{x_2=1} = f_{22}(x_1,\tau);$$

$$u_i\big|_{\tau=0} = \dot u_i\big|_{\tau=0} = \eta\big|_{\tau=0} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь точки обозначают производные по безразмерному времени τ,

$$\Delta_{\alpha\beta} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \beta\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad L_{12} = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}, \quad L_{i3} = \alpha\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad L_{3i} = \frac{\partial\Delta_{\Lambda\Lambda}}{\partial x_i},$$
$$M_1(u_1,u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad M_2(u_1,u_2,\eta) = \gamma\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big) - \frac{\partial\eta}{\partial x_2}, \quad \gamma = \frac{\Lambda}{D}.$$

2. Метод решения. Пусть $G_{imq} = u_i$, $G_{3mq} = \eta$ $(m=1,2,3;\ i=1,2,\ q=1,2)$ — функции Грина задачи (1.1)–(1.3), а именно решения задач, включающих уравнения (1.1), начальные условия (1.3) и граничные условия

$$M_1(G_{1mq},G_{2mq})\big|_{x_2=0} = \delta_{m1}\delta_{q1}\delta(x_1)\delta(\tau), \qquad G_{2mq}\big|_{x_2=0} = \delta_{m2}\delta_{q1}\delta(x_1)\delta(\tau),$$
$$M_2(G_{1mq},G_{2mq},G_{3mq})\big|_{x_2=0} = \delta_{m3}\delta_{q1}\delta(x_1)\delta(\tau),$$
$$M_1(G_{1mq},G_{2mq})\big|_{x_2=1} = \delta_{m1}\delta_{q2}\delta(x_1)\delta(\tau), \qquad G_{2mq}\big|_{x_2=1} = \delta_{m2}\delta_{q2}\delta(x_1)\delta(\tau), \tag{2.1}$$
$$M_2(G_{1mq},G_{2mq},G_{3mq})\big|_{x_2=1} = \delta_{m3}\delta_{q2}\delta(x_1)\delta(\tau)$$

($\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака). Тогда решение задачи (1.1)–(1.3) принимает вид

$$
\begin{gathered}
u_i(x_1,x_2,\tau)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{q=1}^{2}G_{imq}(x_1,x_2,\tau)**f_{mq}(x_1,\tau),\\
\eta(x_1,x_2,\tau)=\sum_{m=1}^{3}\sum_{q=1}^{2}G_{3mq}(x_1,x_2,\tau)**f_{mq}(x_1,\tau),
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

где символ “$*$” обозначает свертки по времени τ и координате x_1.

Заметим, что с использованием замены пространственной переменной $y=1-x_2$ из (1.1), (1.3), (2.1) можно получить следующую связь функций Грина:

$$
G_{im2}(x_1,x_2,\tau)=(-1)^iG_{im1}(x_1,x_2,\tau).
$$

Тогда формулы (2.2) принимают вид

$$
\begin{aligned}
u_1&=G_{111}**(f_{11}-f_{12})+G_{121}**(f_{21}-f_{22})+G_{131}**(f_{31}-f_{32}),\\
u_2&=G_{211}**(f_{11}+f_{12})+G_{221}**(f_{21}+f_{22})+G_{231}**(f_{31}+f_{32}),\\
\eta&=G_{311}**(f_{11}-f_{12})+G_{321}**(f_{21}-f_{22})+G_{331}**(f_{31}-f_{32}).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Таким образом, для определения перемещения и приращения концентрации достаточно найти функции G_{km1} ($k=1,2,3$, $m=1,2,3$). При этом для их определения в качестве ядер представлений (2.3) достаточно ограничиться случаем $f_{m2}\equiv 0$.

Применяя к задаче (1.1)–(1.3) преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по переменной x_1, получаем

$$
\begin{gathered}
l_{11}(u_1^{FL})-i\omega(\lambda+\mu)\,\frac{\partial u_2^{FL}}{\partial x_2}+i\omega\alpha\eta^{FL}=0,\\
-i\omega(\lambda+\mu)\,\frac{\partial u_1^{FL}}{\partial x_2}+l_{22}(u_2^{FL})+\alpha\,\frac{\partial\eta^{FL}}{\partial x_2}=0,\\
i\omega l_{31}(u_1^{FL})+\frac{\partial}{\partial x_2}\,l_{31}(u_2^{FL})+l_{33}(\eta^{FL})=0;
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{gathered}
m_1(u_1^{FL},u_2^{FL})\big|_{x_2=0}=f_{11}^{FL},\quad u_2^{FL}\big|_{x_2=0}=f_{21}^{FL},\quad m_2(u_1^{FL},u_2^{FL},\eta^{FL})\big|_{x_2=0}=f_{31}^{FL},\\
m_1(u_1^{FL},u_2^{FL})\big|_{x_2=1}=0,\quad u_2^{FL}\big|_{x_2=1}=0,\quad m_2(u_1^{FL},u_2^{FL},\eta^{FL})\big|_{x_2=1}=0.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Здесь s, ω — параметры преобразований; индексы L, F обозначают трансформанты,

$$
\begin{gathered}
l_{11}(u_1)=\varkappa_1(\omega,s)u_1-\mu u_1'',\qquad l_{22}(u_2)=\varkappa_2(\omega,s)u_2-u_2'',\\
l_{31}(u_i)=\Lambda(u_i''-\omega^2u_i),\qquad l_{33}(\eta)=\varkappa_3(\omega,s)\eta-D\eta'',\\
\varkappa_1(\omega,s)=\omega^2+s^2,\qquad \varkappa_2(\omega,s)=\mu\omega^2+s^2,\qquad \varkappa_3(\omega,s)=D\omega^2+s,\\
m_1(u_1,u_2)=u_1'+i\omega u_2,\qquad m_2(u_1,u_2,\eta)=\gamma(i\omega u_1+u_2')'-\eta'
\end{gathered}
$$

(штрих означает производную по переменной x_2).

В силу (2.3) решения задачи (2.4), (2.5) можно записать в виде

$$
u_i^{FL}=\sum_{m=1}^{3}G_{im1}^{FL}f_{m1}^{FL},\qquad \eta^{FL}=\sum_{m=1}^{3}G_{3m1}^{FL}f_{m1}^{FL}.
\tag{2.6}
$$

Для определения коэффициентов G_{km1}^{FL} линейных комбинаций (2.6) представляем функции в виде двух слагаемых

$$u_i^{FL} = U_i + \varphi_i, \qquad \eta^{FL} = H + \psi, \tag{2.7}$$

где φ_i, ψ выбираются таким образом, чтобы правые части граничных условий (2.5) стали нулевыми:

$$\varphi_2(\omega, x_2, s) = \varphi_2^*(x_2) f_{21}^{FL}, \qquad \varphi_2^*(x_2) = 1 - x_2. \tag{2.8}$$

Тогда для функций φ_1, ψ из первого и третьего равенств (2.5) с учетом (2.8) получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\left(\varphi_1' + i\omega f_{21}^{FL}\varphi_2^*\right)\big|_{x_2=0} = f_{11}^{FL}, \qquad \left(i\omega\gamma\varphi_1' - \psi'\right)\big|_{x_2=0} = f_{31}^{FL}, \\
\left(\varphi_1' + i\omega f_{21}^{FL}\varphi_2^*\right)\big|_{x_2=1} = 0, \qquad \left(i\omega\gamma\varphi_1' - \psi'\right)\big|_{x_2=1} = 0.
\end{gathered}$$

Интегрируя последовательно эти равенства, находим функции φ_1, ψ:

$$\begin{gathered}
\varphi_1(\omega, x_2, s) = \left(f_{11}^{FL} - i\omega f_{21}^{FL}\right)\varphi_1^*(x_2), \qquad \varphi_1^*(x_2) = x_2(1 - x_2/2), \\
\psi(\omega, x_2, s) = \left(i\omega\gamma f_{11}^{FL} + \omega^2\gamma f_{21}^{FL} - f_{31}^{FL}\right)\varphi_1^*(x_2).
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Подставляя (2.7) с учетом соотношений (2.9) в (2.4), (2.5), получаем краевую задачу

$$\begin{gathered}
l_{11}(U_1) - i\omega(\lambda + \mu)U_2' + i\omega\alpha H = F_1, \\
-i\omega(\lambda + \mu)U_1' + l_{22}(U_2) + \alpha H' = F_2, \\
i\omega l_{31}(U_1) + l_{31}(U_2') + l_{33}(H) = F_3;
\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered}
m_1(U_1, U_2)\big|_{x_2=0} = 0, \qquad U_2^{FL}\big|_{x_2=0} = 0, \qquad m_2(U_1, U_2, H)\big|_{x_2=0} = 0, \\
m_1(U_1, U_2)\big|_{x_2=1} = 0, \qquad U_2^{FL}\big|_{x_2=1} = 0, \qquad m_2(U_1, U_2, H)\big|_{x_2=1} = 0,
\end{gathered} \tag{2.11}$$

где

$$\begin{gathered}
F_1 = B_{11}(\omega, s)\varphi_1^* + B_{10}(\omega, s), \quad F_2 = B_{22}(\omega, s)\varphi_2^*, \quad F_3 = B_{31}(\omega, s)\varphi_1^* + B_{30}(\omega, s), \\
B_{11}(\omega, s) = [\omega^2\alpha\gamma - \varkappa_1(\omega, s)]\left(f_{11}^{FL} - i\omega f_{21}^{FL}\right) + i\omega\alpha f_{31}^{FL}, \\
B_{22}(\omega, s) = i\omega[\lambda + \mu - \alpha\gamma]f_{11}^{FL} - [s^2 + \alpha\omega^2\gamma - \lambda\omega^2]f_{21}^{FL} + \alpha f_{31}^{FL}, \\
B_{31}(\omega, s) = -i\omega\gamma s f_{11}^{FL} - \omega^2\gamma s f_{21}^{FL} + \varkappa_3(\omega, s) f_{31}^{FL}, \\
B_{10}(\omega, s) = -\left(\mu f_{11}^{FL} + i\omega\lambda f_{21}^{FL}\right), \qquad B_{30}(\omega, s) = -\omega^2\Lambda f_{21}^{FL} + D f_{31}^{FL}.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Решение системы уравнений (2.10) представим в виде удовлетворяющих граничным условиям (2.11) тригонометрических рядов

$$\begin{gathered}
U_1(\omega, x_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n}(\omega, s)\cos(\lambda_n x_2), \qquad U_2(\omega, x_2, s) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{2n}(\omega, s)\sin(\lambda_n x_2), \\
H(\omega, x_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\omega, s)\cos(\lambda_n x_2), \qquad \lambda_n = \pi n.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Правые части (2.10) запишем в виде аналогичных рядов

$$F_1(\omega, x_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{1n}(\omega, s) \cos(\lambda_n x_2), \qquad F_2(\omega, x_2, s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{2n}(\omega, s) \sin(\lambda_n x_2),$$

$$F_3(\omega, x_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{3n}(\omega, s) \cos(\lambda_n x_2),$$

где

$$\begin{gathered} F_{10} = B_{11}(\omega, s)/3 + B_{10}(\omega, s), \qquad F_{30} = B_{31}(\omega, s)/3 + B_{30}(\omega, s), \\ F_{1n} = -2\lambda_n^{-2} B_{11}(\omega, s), \quad F_{2n} = 2\lambda_n^{-1} B_{22}(\omega, s), \quad F_{3n} = -2\lambda_n^{-2} B_{31}(\omega, s) \quad (n \geqslant 1). \end{gathered} \tag{2.14}$$

В результате получаем следующие системы уравнений относительно коэффициентов рядов:

$$\varkappa_1(\omega, s) U_{10} + i\omega\alpha H_0 = F_{10}, \qquad -i\omega^3 \Lambda U_{10} + \varkappa_3(\omega, s) H_0 = F_{30}; \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered} k_{1n}(\omega, s) U_{1n} - i\omega\lambda_n(\lambda + \mu) U_{2n} + i\omega\alpha H_n = F_{1n}, \\ i\omega\lambda_n(\lambda + \mu) U_{1n} + k_{2n}(\omega, s) U_{2n} - \alpha\lambda_n H_n = F_{2n}, \\ -\Lambda k_{4n}(\omega)(i\omega U_{1n} + \lambda_n U_{2n}) + k_{3n}(\omega, s) H_n = F_{3n} \quad (n \geqslant 1), \end{gathered} \tag{2.16}$$

где

$$\begin{gathered} k_{1n}(\omega, s) = \varkappa_1(\omega, s) + \lambda_n^2 \mu, \qquad k_{2n}(\omega, s) = \varkappa_2(\omega, s) + \lambda_n^2, \\ k_{3n}(\omega, s) = \varkappa_3(\omega, s) + D\lambda_n^2, \qquad k_{4n}(\omega) = \varkappa_1(\omega, \lambda_n). \end{gathered}$$

В соответствии с формулами (2.12), (2.14) решения уравнений (2.15), (2.16) представляют собой линейные комбинации функций f_{m1}^{FL}. Тогда согласно (2.7) линейными комбинациями являются также изображения коэффициентов рядов (2.13):

$$u_{in}^{FL} = \sum_{m=1}^{3} G_{im1n}^{FL} f_{m1}^{FL}, \qquad \eta_n^{FL} = \sum_{m=1}^{3} G_{3m1n}^{FL} f_{m1}^{FL} \qquad (i = 1, 2).$$

При этом имеют место равенства

$$\begin{gathered} G_{lm1}^{FL}(\omega, x_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{lm1n}^{FL}(\omega, s) \cos(\lambda_n x_2) \qquad (l = 1, 3), \\ G_{2m1}^{FL}(\omega, x_2, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{2m1n}^{FL}(\omega, s) \sin(\lambda_n x_2). \end{gathered} \tag{2.17}$$

Определяя решение уравнений (2.15), (2.16) и проведя соответствующие преобразования, получаем коэффициенты рядов (2.17) в виде

$$G_{km1n}^{FL}(\omega, s) = \frac{P_{kmn}(\omega, s)}{P_n(\omega, s)}.$$

Здесь числители и знаменатели, являющиеся многочленами, определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} P_0(\omega, s) = \varkappa_3(\omega, s)\varkappa_1(\omega, s) - \alpha\omega^4\Lambda, \qquad P_{130}(\omega, s) = -i\omega\alpha D, \\ P_{110}(\omega, s) = -\mu\varkappa_3(\omega, s), \qquad P_{120}(\omega, s) = i\omega[\alpha\omega^2\Lambda - \lambda\varkappa_3(\omega, s)], \end{gathered}$$

$$P_{310}(\omega, s) = -i\omega^3\mu\Lambda, \quad P_{320}(\omega, s) = -\omega^2\Lambda[\varkappa_2(\omega, s) - \lambda\omega^2], \quad P_{330}(\omega, s) = D\varkappa_1(\omega, s),$$
$$P_n(\omega, s) = (s^2 + \mu k_{4n})\Pi_n(k_{4n}, s), \qquad \Pi_n(x, s) = s^3 + xs(Ds + 1) + (D - \alpha\Lambda)x^2,$$
$$P_{11n}(\omega, s) = -2\mu(k_{2n}k_{3n} - \alpha\lambda_n^2\Lambda k_{4n}), \qquad P_{13n}(\omega, s) = -2i\omega D\alpha[\lambda_n^2(\lambda + \mu) - k_{2n}],$$
$$P_{12n}(\omega, s) = -2i\omega[\alpha(\lambda + \mu)\Lambda\lambda_n^2 k_{4n} - \alpha k_{4n}k_{2n} - \lambda_n^2(\lambda + \mu)k_{3n} + k_{3n}k_{2n}\lambda],$$
$$P_{21n}(\omega, s) = 2i\omega\lambda_n\mu[(\lambda + \mu)k_{3n} - \alpha k_{4n}], \qquad P_{23n}(\omega, s) = 2\alpha D\lambda_n[k_{1n} - \omega^2(\lambda + \mu)],$$
$$P_{22n}(\omega, s) = 2\lambda_n\{k_{1n}k_{3n} - \alpha k_{4n}(\mu\omega^2 + k_{1n}) - \lambda\omega^2[(\lambda + \mu)k_{3n} - \alpha k_{4n}]\},$$
$$P_{31n}(\omega, s) = 2i\omega\mu k_{4n}[(\lambda + \mu)\lambda_n^2 - k_{2n}],$$
$$P_{32n}(\omega, s) = -2k_{4n}[\omega^2(\lambda + \mu)^2\lambda_n^2 - \omega^2\lambda k_{2n} - k_{1n}(\lambda_n^2 - k_{2n})],$$
$$P_{33n}(\omega, s) = -2D[\omega^2\lambda_n^2(\lambda + \mu)^2 - k_{1n}k_{2n}].$$

3. Определение оригиналов функций влияния. Обращая преобразование Лапласа, из (2.17) получаем

$$G^F_{lm1}(\omega, x_2, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G^F_{lm1n}(\omega, \tau)\cos(\lambda_n x_2) \qquad (l = 1, 3),$$
$$G^F_{2m1}(\omega, x_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G^F_{2m1n}(\omega, \tau)\sin(\lambda_n x_2). \tag{3.1}$$

Функции G^{FL}_{km1n} являются правильными рациональными дробями аргумента s, поэтому переход в пространство оригиналов можно осуществить с помощью вычетов. Поскольку в реальных материалах $\alpha\Lambda \ll D < 1$, с помощью критерия Рауса — Гурвица можно показать, что многочлены $P_0(\omega, s)$, $\Pi_n[k_{4n}(\omega), s]$ имеют следующие нули: $s_{1n} = \bar{s}_{2n} = \gamma_n + i\beta_n$, $\gamma_n < 0$, $s_{3n} < 0$, $s_{3n} \in \mathbb{R}$ (i — мнимая единица). Для многочлена $P_n(\omega, s)$ к ним добавляются мнимые нули: $s_{4n} = \bar{s}_{5n} = i\varepsilon_n$, $\varepsilon_n^2 = \mu k_{4n}(\omega)$. Следовательно, коэффициенты рядов имеют вид

$$G^F_{km10}(\omega, \tau) = e^{\gamma_0\tau}(A^{(1)}_{km0}\cos(\beta_0\tau) - A^{(2)}_{km0}\sin(\beta_0\tau)) + A^{(3)}_{km0}e^{s_{30}\tau},$$
$$G^F_{km1n}(\omega, \lambda_n, \tau) = e^{\gamma_n\tau}(A^{(1)}_{kmn}\cos(\beta_n\tau) - A^{(2)}_{kmn}\sin(\beta_n\tau)) + A^{(3)}_{kmn}e^{s_{3n}\tau} + A^{(4)}_{kmn}\cos(\varepsilon_n\tau) - A^{(5)}_{kmn}\sin(\varepsilon_n\tau), \tag{3.2}$$

где

$$A^{(1)}_{kmn} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{P_{kmn}(\omega, s_{1n})}{P'_n(\omega, s_{1n})}, \quad A^{(2)}_{kmn} = 2\,\mathrm{Im}\,\frac{P_{kmn}(\omega, s_{1n})}{P'_n(\omega, s_{1n})}, \quad A^{(3)}_{kmn} = \frac{P_{kmn}(\omega, s_{3n})}{P'_n(\omega, s_{3n})} \quad (n \geqslant 0),$$
$$A^{(4)}_{kmn} = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{P_{kmn}(\omega, s_{4n})}{P'_n(\omega, s_{4n})}, \qquad A^{(5)}_{kmn} = 2\,\mathrm{Im}\,\frac{P_{kmn}(\omega, s_{4n})}{P'_n(\omega, s_{4n})} \quad (n \geqslant 1),$$

штрих означает производную по параметру s.

Расчеты показывают, что ряды (3.1) для функций $G^F_{321}(\omega, x_2, \tau)$, $G^F_{331}(\omega, x_2, \tau)$ сходятся медленно. Это обусловлено следующей асимптотикой при $s \to \infty$ для изображений коэффициентов рядов:

$$G^{FL}_{3210}(\omega, s) \sim -\omega^2\Lambda s^{-1}, \qquad G^{FL}_{3310}(\omega, s) \sim Ds^{-1},$$
$$G^{FL}_{321n}(\omega, s) \sim -2\Lambda k_{4n}(\omega)s^{-1}, \qquad G^{FL}_{331n}(\omega, s) \sim 2Ds^{-1} \quad (n \geqslant 1).$$

Поскольку оригиналом изображения s^{-1} является функция Хевисайда $H(\tau)$ [5], в правой полуокрестности точки $\tau = 0$ функции $G^F_{321}(\omega, x_2, \tau)$ и $G^F_{331}(\omega, x_2, \tau)$ имеют разрыв первого рода. Для выделения данной особенности изображения этих функций представим в виде

$$G^{FL}_{3m1}(\omega, x_2, s) = S^{FL}_{3m1}(\omega, x_2, s) + R^{FL}_{3m1}(\omega, x_2, s),$$

$$S^{FL}_{3m1}(\omega, x_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{FL}_{3m1n}(\omega, s) \cos(\lambda_n x_2),$$

$$R^{FL}_{3m1}(\omega, x_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{FL}_{3m1n}(\omega, s) \cos(\lambda_n x_2) \quad (m = 2, 3),$$

где

$$S^{FL}_{3210}(\omega, s) = -\frac{\omega^2 \Lambda}{\varkappa_3(\omega, s)}, \qquad S^{FL}_{3310}(\omega, s) = \frac{D}{\varkappa_3(\omega, s)},$$

$$R^{FL}_{3210}(\omega, s) = \frac{T_{320}(\omega, s)}{\varkappa_3(\omega, s) P_0(\omega, s)}, \qquad R^{FL}_{3310}(\omega, s) = \frac{T_{330}(\omega, s)}{\varkappa_3(\omega, s) P_0(\omega, s)},$$

$$T_{320}(\omega, s) = P_{320}(\omega, s)\varkappa_3(\omega, s) + \omega^2 \Lambda P_0(\omega, s) = \Lambda\omega^4[\lambda(D\omega^2 + s) - \alpha\omega^2\Lambda],$$

$$T_{330}(\omega, s) = P_{330}(\omega, s)\varkappa_3(\omega, s) - DP_0(\omega, s) = D\alpha\Lambda\omega^4,$$

$$S^{FL}_{321n}(\omega, s) = -\frac{2\Lambda k_{4n}(\omega)}{k_{3n}(\omega, s)}, \qquad S^{FL}_{331n}(\omega, s) = \frac{2D}{k_{3n}(\omega, s)},$$

$$R^{FL}_{321n}(\omega, s) = \frac{T_{32n}(\omega, s)}{k_{3n}(\omega, s) P_n(\omega, s)}, \qquad R^{FL}_{331n}(\omega, s) = \frac{T_{33n}(\omega, s)}{k_{3n}(\omega, s) P_n(\omega, s)},$$

$$T_{32n}(\omega, s) = k_{3n}(\omega, s) P_{32n}(\omega, s) + 2\Lambda k_{4n}(\omega) P_n(\omega, s),$$

$$T_{33n}(\omega, s) = k_{3n}(\omega, s) P_{33n}(\omega, s) - 2DP_n(\omega, s).$$

С использованием таблиц и суммирования рядов [5, 6] находим оригиналы по Лапласу функций $S^{FL}_{3m1}(\omega, x_2, s)$:

$$S^F_{321}(\omega, x_2, \tau) = -\omega^2 \Lambda \,\mathrm{e}^{-D\omega^2\tau}\, \theta_3\Big(\frac{x_2}{2}, \mathrm{e}^{-D\pi^2\tau}\Big) + \frac{\Lambda}{D}\, \mathrm{e}^{-D\omega^2\tau}\, \frac{\partial}{\partial\tau}\Big[\theta_3\Big(\frac{x_2}{2}, \mathrm{e}^{-D\pi^2\tau}\Big)\Big],$$

$$S^F_{331}(\omega, x_2, \tau) = D\,\mathrm{e}^{-D\omega^2\tau}\, \theta_3\Big(\frac{x_2}{2}, \mathrm{e}^{-D\pi^2\tau}\Big)$$

($\theta_3(x, q)$ — тета-функция Якоби).

Обращение преобразования Лапласа коэффициентов $R^{FL}_{3m1n}(\omega, s)$ как рациональных функций проводится аналогично (3.2) с учетом того, что появляется дополнительный полюс $s_{6n} = -D(\omega^2 + \lambda_n^2)$.

Обращение преобразования Фурье проводится для изображений, полученных из (2.6):

$$u^F_i(\omega, x_2, \tau) = \sum_{m=1}^{3} G^F_{im1}(\omega, x_2, \tau) * f^F_{m1}(\omega, \tau),$$

$$\eta^F(\omega, x_2, \tau) = \sum_{m=1}^{3} G^F_{3m1}(\omega, x_2, \tau) * f^F_{m1}(\omega, \tau).$$

Например, оригинал первой функции имеет вид

$$u_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} G_{1m1}^F(\omega, x_2, \tau) * f_{m1}^F(\omega, \tau) \, \mathrm{e}^{i\omega x_1} \, d\omega. \tag{3.3}$$

Для того чтобы вычислить входящие в (3.3) интегралы, запишем их следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{km1}^F * f_{m1}^F \, \mathrm{e}^{i\omega x_1} \, d\omega = \int_{-\infty}^{-a} G_{km1}^F * f_{m1}^F \, \mathrm{e}^{i\omega x_1} \, d\omega + \int_{-a}^{a} G_{km1}^F * f_{m1}^F \, \mathrm{e}^{i\omega x_1} \, d\omega + \\ + \int_{a}^{\infty} G_{km1}^F * f_{m1}^F \, \mathrm{e}^{i\omega x_1} \, d\omega$$

(a — некоторая промежуточная точка (в расчетах полагается $a = 1$)).

Второй интеграл вычисляется с помощью формулы средних прямоугольников, первый и третий с помощью замен $\omega = -a^2/(a+\nu)$ и $\omega = a^2/(a-\nu)$ сводятся к интегралам по конечным промежуткам $[-a, 0]$, $[0, a]$ соответственно, после чего также вычисляются с помощью формулы средних прямоугольников.

Заметим, что функции G_{111}^F, G_{221}^F, G_{331}^F, G_{231}^F, G_{321}^F являются четными, остальные функции G_{km1}^F — нечетными по ω. Если функции f_{m1}^F также обладают свойством четности (нечетности), то преобразование (3.3) сводится к синус- или косинус-преобразованию Фурье, что уменьшает объем вычислений.

4. Примеры. Положим, что $L = 1$ м, $T_0 = 773$ K, а материалом слоя являются алюминий, имеющий характеристики $\rho = 2700$ кг/м^3, $\lambda = 5{,}55 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu = 3{,}50 \times 10^{10}$ Н/м^2, $D = 6{,}70 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, которым соответствуют безразмерные величины $\mu = 0{,}279$, $\lambda = 0{,}442$, $D = 1{,}06 \cdot 10^{-9}$, $\alpha = 10^{-4}$, $\Lambda = 1{,}78 \cdot 10^{-6}$.

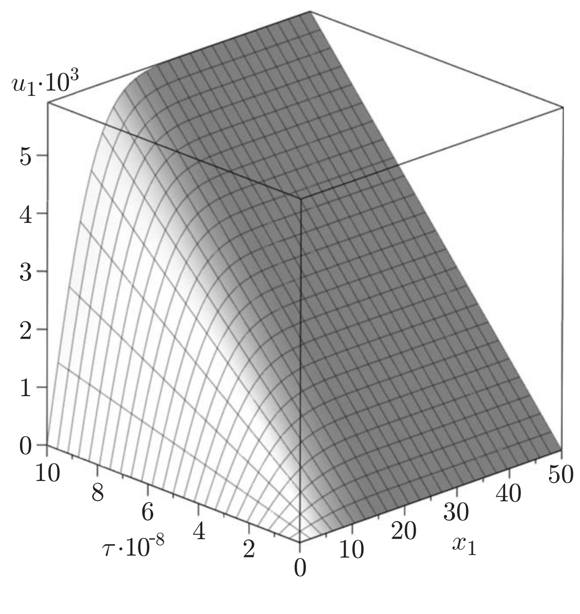

Рис. 1

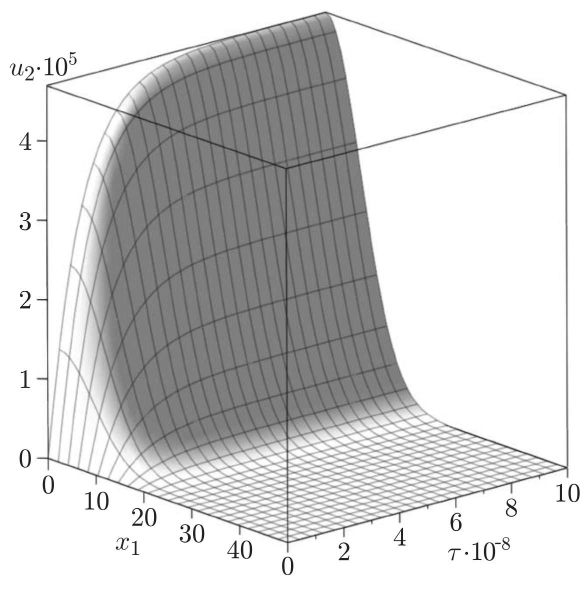

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость перемещения u_1 от x_1 и τ при $x_2 = 0{,}5$

Рис. 2. Зависимость перемещения u_2 от x_1 и τ при $x_2 = 0{,}5$

Правые части граничных условий (1.2) имеют вид

$$f_{11}(x_1,\tau) = f_{21}(x_1,\tau) = f_{12}(x_1,\tau) = f_{22}(x_1,\tau) = f_{32}(x_1,\tau) \equiv 0,$$

$$f_{31}(x_1,\tau) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x_1^2} H(\tau), \qquad \varepsilon = 0{,}01.$$

Результаты вычислений приведены на рис. 1, 2. Расчеты проводились при количестве членов ряда Фурье $N_y = 100$ и количестве точек разбиения для вычисления обратного преобразования Фурье $N_x = 100$. Заметим, что при уменьшении шага разбиения в два раза графики практически совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гачкевич А. Р., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.** Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 52–59.
2. **Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V.** Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer // J. Math. Sci. 2014. V. 203, iss. 2. P. 221–238.
3. **Давыдов С. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.** Двухкомпонентное упругодиффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экол. вестн. науч. центров Черномор. эконом. сотрудничества. 2014. № 2. С. 31–38.
4. **Tarlakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V.** Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media // Encyclopedia of thermal stress. Dordrecht; Heidelberg; N. Y.; L.: Springer, 2014. V. 2. P. 1064–1071.
5. **Горшков А. Г.** Волны в сплошных средах: Учеб. пособие для вузов / А. Г. Горшков, А. Л. Медведский, Л. Н. Рабинский, Д. В. Тарлаковский. М.: Физматлит, 2004.
6. **Справочник** по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 8/VI 2015 г.