

УДК 519.6

Об апостериорной оценке нормы погрешности численного расчета на ансамбле независимых решений

А.К. Алексеев, А.Е. Бондарев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Миусская пл., 4, Москва, 125047

E-mails: aleksey.k.alekseev@gmail.com (Алексеев А.К.), bond@keldysh.ru (Бондарев А.Е.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 13, 2020.

Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Об апостериорной оценке нормы погрешности численного расчета на ансамбле независимых решений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 3. — С. 233–248.

Ансамбль численных решений, полученных с использованием независимых алгоритмов, позволяет построить вокруг численного решения гиперсферу, которая содержит истинное решение. Основой данного анализа служат геометрические соображения, такие как неравенство треугольника и концентрация меры в пространствах большой размерности. В результате возникает возможность построения неинтрузивного постпроцессора, позволяющего на ансамбле решений определить погрешность расчета на фиксированной сетке. Представлены численные расчеты для двумерных сжимаемых уравнений Эйлера, демонстрирующие возможности данного постпроцессора.

DOI: 10.15372/SJNM20200301

Ключевые слова: погрешность расчета, ансамбль численных решений, концентрация меры, уравнения Эйлера.

Alekseev A.K., Bondarev A.E. On a posteriori estimation of the approximation error norm for an ensemble of independent solutions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 3. — P. 233–248.

An ensemble of independent numerical solutions enables one to construct a hypersphere around the approximate solution that contains the true solution. The analysis is based on some geometry considerations, such as the triangle inequality and the measure concentration in the spaces of large dimensions. As a result, there appears the feasibility for non-intrusive postprocessing that provides the error estimation on the ensemble of solutions. The numerical tests for two-dimensional compressible Euler equations are provided that demonstrates properties of such postprocessing.

Keywords: discretization error, ensemble of numerical solutions, measure concentration, Euler equations.

Введение

Количественная оценка погрешности численного расчета систем уравнений в частных производных представляет существенный практический интерес, однако в задачах газодинамики такая оценка получается достаточно редко, чем и мотивирована представляемая работа. Обозначим систему уравнений в частных производных как $Au = f$, а ее конечно-мерную аппроксимацию как $A_h u_h = f_h$. Локальная погрешность аппроксимации

(погрешность усечения) δu получается разложением в ряд Тейлора дискретного решения [1]. Ее асимптотическая зависимость от шага сетки h выражается как $\delta u = O(h^n)$. Ошибка усечения порождает ошибку аппроксимации (расчета) $\Delta u = u_h - u$. Для линейных проблем $\Delta u = O(h^n)$ обе эти ошибки имеют один порядок n (порядок аппроксимации) по теореме Лакса [2] (если выполнен ряд существенных ограничений).

Оценке погрешности расчета в настоящее время посвящено огромное количество работ, опирающихся на большой набор разнообразных методов [3, 4]. Они делятся на два обширных подкласса априорного и апостериорного анализа погрешности. Априорный анализ имеет фундаментальный характер и связывает погрешность расчета с локальной погрешностью аппроксимации (погрешностью усечения) по теореме Лакса [2]. С практической точки зрения априорный анализ обосновывает современную практику измельчения сетки. Норма погрешности расчета при априорном анализе представляется в форме $\|\Delta u\| < Ch^n$, содержащей неизвестную константу. Именно наличие этой неизвестной константы является основным недостатком априорного подхода, препятствующим получению вычислимых оценок погрешности расчета.

Апостериорная оценка погрешности имеет более прикладной характер и может быть представлена в форме $\|\Delta u\| \leq \eta_h(u_h)$, где вычисляемый индикатор ошибки $\eta_h(u_h)$ зависит от численного решения u_h . В настоящее время наибольший успех достигнут для эллиптических и параболических уравнений в конечно-элементном анализе [5, 6] и с помощью экстраполяции Ричардсона [7], что связано с достаточной гладкостью соответствующих решений. Для задач газодинамики получение апостериорной оценки погрешности в функциональном стиле [5, 6] более затруднено, что связано с их гиперболичностью, нелинейностью и формированием разрывов в поле течения. Для этих задач наблюдается зависимость локального порядка сходимости от элемента течения [8–10]. В частности, на скачках уплотнения и контактных разрывах порядок аппроксимации не зависит от номинального порядка схемы и принадлежит интервалу $n \in (0.5, 1.0)$. В этой связи метод Ричардсона должен быть модифицирован так, чтобы определять переменный в поле течения порядок сходимости [11–13]. Это требует использования трех последовательных сгущений расчетной сетки. С учетом проверки попадания последовательности решений в асимптотический интервал необходимо использование не менее четырех последовательных сгущений сетки. Это требует очень больших вычислительных ресурсов и затрудняет практическое применение метода Ричардсона.

В качестве альтернативы в данной работе рассмотрен вычислительно дешевый (на одной сетке) алгоритм оценки нормы глобальной погрешности. Он использует то, что в настоящее время для решения задач газодинамики применяется обширный набор численных методов разного порядка аппроксимации. Методы разного порядка имеют линейно независимую локальную погрешность аппроксимации. Это влечет независимость глобальной погрешности аппроксимации и представляет возможности для ее оценки, основанные на использовании геометрических свойств ансамбля численных расчетов.

1. Некоторые свойства геометрии ансамбля численных решений

Рассмотрим ансамбль численных решений, полученных схемами разного порядка аппроксимации на одной и той же сетке для некоторой (достаточно произвольной) задачи, описанной системой уравнений в частных производных. Обозначим численное решение как вектор (сеточную функцию) $u^{(i)} \in R^N$ (i — номер схемы, $N = N_S N_g$ — число дискретных переменных (произведение числа узлов сетки N_S на число газодинамических

переменных N_g), а значения неизвестного истинного решения в узлах сетки как вектор $\tilde{u} \in R^N$, тогда погрешность расчета $\Delta u^{(i)} = u^{(i)} - \tilde{u} \in R^N$. Используем метрику $d(u, v)$ в пространстве решений. Неизвестное отклонение истинного решения в узлах сетки от численного решения (величину погрешности расчета) обозначим как $d(u^{(i)}, \tilde{u}) = \delta_{0,i}$ (например $d(u^{(i)}, \tilde{u}) = \|u^{(i)} - \tilde{u}\|_{L_2}$). Таким образом, мы применяем как норму погрешности $\|\Delta u^{(i)}\|_{L_2}$, так и величину погрешности $d(u^{(i)}, \tilde{u})$, что вызвано использованием в работе метрик, не сводящихся к нормам, а также неравенства треугольника, имеющего метрическую природу. В частности, неравенство треугольника элементарно позволяет получить следующую теорему. Она сформулирована для двух численных решений $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, для которых априори известно соотношение величин ошибок (расстояний между точным и численным решением) $\delta_{0,1} \geq 2\delta_{0,2}$.

Теорема. Пусть расстояние $\delta_{1,2}$ между двумя численными решениями $u^{(1)} \in R^N$, $u^{(2)} \in R^N$ известно из расчета, а также известно соотношение величин ошибок

$$\delta_{0,1} \geq 2\delta_{0,2}, \quad (1)$$

тогда точное решение находится внутри гиперсферы радиуса $\delta_{1,2}$ с центром в более точном решении $u^{(2)}$:

$$\delta(u^{(2)}, \tilde{u}) \leq \delta_{1,2}. \quad (2)$$

Доказательство. Неравенство треугольника [14] для расстояний $\delta_{0,1}$, $\delta_{1,2}$, $\delta_{0,2}$ между точками $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ и \tilde{u} имеет вид $\delta_{0,1} \leq \delta_{1,2} + \delta_{0,2}$ и $\delta_{0,1} - \delta_{0,2} \leq \delta_{1,2}$. Учитывая (1) в форме $\delta_{0,1} - \delta_{0,2} \geq \delta_{0,2}$, получим $\delta_{0,2} \leq \delta_{0,1} - \delta_{0,2} \leq \delta_{1,2}$ и выражение $\delta_{0,2} \leq \delta_{1,2}$. \square

Строго говоря, существует более общая форма этой теоремы, а именно, если $\delta_{0,1} > (1 + \alpha)\delta_{0,2}$ ($\alpha > 0$), то $\delta_{0,2} < \delta_{1,2}/\alpha$. Однако при малых α оценки ошибки могут расхожиться. Мы выбираем $\alpha = 1$ как единственный вариант, при котором оценка погрешности выражается через расстояние между решениями без искажений. Это позволит нам соотносить этот результат с другими результатами геометрической природы.

Выполнение соотношения $\delta(u^{(2)}, \tilde{u}) \leq \delta_{1,2}$ мы в дальнейшем будем обозначать как “захват” истинного решения.

Очевидной слабостью теоремы является предположение о том, что погрешность решений упорядочена по величине. Это связано с тем, что схемы более высокого порядка аппроксимации более точны только в асимптотическом смысле (в случае задач с разрывами даже это может не выполняться). Поэтому важно найти возможность проверки упорядоченности величины погрешности в расчетах. Простейший анализ показывает, что в некоторых случаях набор расстояний между решениями $\delta_{i,j}$ позволяет выделить как близкие, так и удаленные решения.

Рассмотрим случай, когда решение $u^{(1)}$ существенно менее точно, чем любое из остальных ($\delta_{0,1} \gg \delta_{0,i}$). Легко видеть, что набор расстояний $\delta_{i,j}$ расщепляется на

- а) кластер больших расстояний $\delta_{1,j}$ (от точных решений до грубого) и
- б) кластер малых расстояний $\delta_{i,j}$ ($i \neq 1$) (между более точными решениями).

Обозначим максимальную ошибку на подмножестве более точных решений как $\delta_{0,i}^{\max}$.

Максимальное значение из $\delta_{i,j}$ ($i \neq 1$) примем как верхнюю границу первого кластера d_1 (набора расстояний между “точными” решениями).

Минимальное значение из $\delta_{1,j}$ примем как нижнюю границу второго кластера d_2 (расстояний между “точными” решениями и наиболее неточным).

В этом случае вместо теоремы можно использовать следующее эвристическое правило.

Критерий. Если $d_2 - d_1 > d_1$, тогда истинное решение расположено внутри гиперсферы радиуса $\delta_{1,i}$ с центром в $u^{(i)}$: $\delta_{0,i} \leq \delta_{1,i}$, где $u^{(i)}$ принадлежит кластеру более точных решений, а $u^{(1)}$ — максимально неточное решение.

В основе этого критерия лежат предположения о том, что размер кластера точных решений (расстояние от нуля до границы кластера) равен удвоенной максимальной ошибке в этом кластере $d_1 = 2\delta_{0,i}^{\max}$, а кластер неточных решений принадлежит интервалу $(\delta_{0,1} - \delta_{0,i}^{\max}, \delta_{0,1} + \delta_{0,i}^{\max})$ и, соответственно, его нижняя граница $d_2 = \delta_{0,1} - \delta_{0,i}^{\max}$. Эти выражения соответствуют коллинеарным векторам ошибки. Если считать их верными, соотношение размера кластера точных решений и расстояния между кластерами $d_2 - d_1 > d_1$ примет форму $\delta_{0,1} - \delta_{0,i}^{\max} > 4\delta_{0,i}^{\max}$. Это ведет к выполнению условий теоремы для решений $u^{(1)}$, $u^{(i)}$ с некоторым запасом ($\delta_{0,1} > 5\delta_{0,i}^{\max}$). Несмотря на то, что этот критерий не является строгим, численные эксперименты для двумерных невязких сверхзвуковых течений со скачками уплотнения указывают на его практическую применимость.

Другим обоснованием оценки погрешности по ансамблю решений может служить “благословение размерности” (“blessing of dimensionality”) [15–17]. Как локальная погрешность аппроксимации $\delta u^{(i)} \in R^N$, так и погрешность расчета $\Delta u^{(i)} = u^{(i)} - \tilde{u} \in R^N$ принадлежат пространству очень высокой размерности. Для стандартных задач газодинамики $N \sim 10^5 \div 10^6$ и выше.

В пространствах такой большой размерности расстояние $\delta_{1,2}$ между двумя независимыми численными решениями $u^{(1)} \in R^N$ и $u^{(2)} \in R^N$ (известное из расчета) “с вероятностью близкой к 1” больше расстояния от точного решения до численного (погрешности решения):

$$\delta(u^{(i)}, \tilde{u}) \leq \delta_{1,2} \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Это вызвано тем обстоятельством, что хорда в таких пространствах “почти всегда больше радиуса” [16], а два независимо выбранных вектора “почти всегда” ортогональны [17].

Следует отметить, что, несмотря на разные исходные предпосылки, выражение (3) достаточно близко к выражению (2), хотя и несколько сильнее. С другой стороны, выражение (2) имеет детерминированный характер, а выражение (3) выполняется “с вероятностью 1”.

Ключевым фактором для применения “благословения размерности” является независимость погрешности численных решений. С помощью дифференциального приближения [1] не сложно показать, что погрешности аппроксимации схем разного порядка $\delta u^{(i)}$ линейно независимы (основной член погрешности содержит производные разного порядка). Лагранжевы коэффициенты, присутствующие в дифференциальном приближении, также принадлежат пространству R^N огромной размерности и, соответственно, демонстрируют на удивление регулярное поведение [18], подтверждающее связь многомерной геометрии с вероятностью [17]. Применительно к задачам газодинамики вопрос о независимости погрешностей расчета $\Delta u^{(i)} = A_h^{-1} \delta u^{(i)}$ (и ее ортогональности в пространствах большой размерности) нуждается в дополнительном исследовании, так как современные алгоритмы практически всегда содержат некоторые нелинейные диссипативные элементы (ограничители потоков и т. д.), которые влияют на $\delta u^{(i)}$ и $\Delta u^{(i)}$.

2. Некоторые метрики на ансамбле численных решений

Теорема и критерий сформулированы для расстояний, заданных некоторой метрикой. Представляет интерес, оказывает ли выбор метрики влияние и какая из метрик лучше подходит для оценки величины погрешности расчета. Для этого мы сравним метрики, задаваемые нормами L_1 , L_2 , H^{-1} , а также метрику, имитирующую относительную погрешность (далее обозначаемую как REM- L_2) и метрику IMED из работы [19], напрямую не связанные с нормами. В данной работе мы рассматриваем двумерные уравнения Эйлера, имеющие четыре компоненты (плотность, компоненты скорости, внутреннюю энергию) $u^{(i)} = \{\rho^{(i)}, U^{(i)}, V^{(i)}, e^{(i)}\}$. Для метрики, порожденной нормой L_2 , расстояние между решениями имеет вид

$$\begin{aligned} \|u^{(i)} - u^{(m)}\|_{L_2} &= \|\rho^{(i)} - \rho^{(m)}, U^{(i)} - U^{(m)}, V^{(i)} - V^{(m)}, e^{(i)} - e^{(m)}\|_{L_2} \\ &= \left(\frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{N_S} (\Delta\rho_k^2 + \Delta U_k^2 + \Delta V_k^2 + \Delta e_k^2) \right) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вектор решения содержит элементы с различным физическим смыслом. Их прямое сопоставление, строго говоря, может быть проблематичным. Поэтому параллельно выражению (4) расстояние между решениями рассчитывалось с использованием нормализованного выражения

$$\|u^{(i)} - u^{(m)}\|_{\text{REM-}L_2} = \left\| \frac{\rho^{(i)} - \rho^{(m)}}{\|\rho^{(i)}\|}, \dots, \frac{e^{(i)} - e^{(m)}}{\|e^{(i)}\|} \right\|_{L_2}, \quad (5)$$

которое имитирует относительную погрешность (REM- L_2). Выражение (5) соответствует метрике Махаланобиса [20]:

$$(\Delta u, M \Delta u) = (M_{jk} \Delta u_j \Delta u_k)^{1/2}. \quad (6)$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Это расстояние определено метрическим тензором с диагональной матрицей $M_{j,k}$. С учетом представления $M = A^* A$ (верного для симметричной положительно определенной матрицы) можно выразить $(\Delta u, M \Delta u) = (\Delta u, A^* A \Delta u)^{1/2} = (A \Delta u, A \Delta u)^{1/2}$, что соответствует норме L_2 в трансформированном пространстве.

Расчеты показывают, что вышеописанные метрики чувствительны к малым вариациям поля течения, таким, например, как сдвиг положения ударной волны на одну ячейку. При этом два численных решения, порожденных таким сдвигом, воспринимаются как удаленные и описывающие разные течения, хотя с практической точки зрения такие течения почти идентичны. Поэтому эти расстояния не оптимальны для оценки структурной близости между решениями. С этой точки зрения более удобна Евклидова метрика, модифицированная для анализа изображений (IMage Euclidean Distance (IMED)) [19], которая описывается следующим метрическим тензором:

$$M_{ij} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{|P_i - P_j|^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (7)$$

где $|P_i - P_j|$ — расстояние между узлами P_i и P_j на сетке, σ — параметр сглаживания (в расчетах $\sigma \geq 0.5$), обеспечивающий некоторое размазывание и, соответственно, устойчивость оценки расстояния к малым вариациям переменных в поле течения. Для нашей

двумерной задачи расстояние между решениями рассчитывалось с помощью выражения (представленного здесь только для плотности)

$$(\Delta\rho^{(i)}, M\Delta\rho^{(i)}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(j-m)^2 + (k-l)^2}{2\sigma^2} \right\} \Delta\rho_{j,k}^{(i)} \Delta\rho_{m,l}^{(i)} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Здесь индексы j, k, l, m изменяются от 1 до N_S . Это расстояние соответствует усредненной по пространству погрешности. IMED тоже является метрикой типа Махалонобиса. Асимптотически IMED стремится к L_2 при $\sigma \rightarrow 0$.

Метрика, порожденная Соболевской нормой отрицательного порядка (H^{-1}), также представляет интерес для разрывных решений уравнений Эйлера. В соответствии с [21, 22], Соболевская норма H^{-1} может быть представлена как

$$\|u\|_{H^{-1}} = \sup_{\|v\|_{H^1}=1} |(u, v)|. \quad (9)$$

Она рассчитывалась в соответствии с [22] с помощью выражения

$$\|u\|_{H^{-1}} = (u, v)_{L_2}, \quad (10)$$

где v — решение экранированного уравнения Пуассона

$$\lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v = u. \quad (11)$$

Здесь коэффициент λ определяет сглаживающие свойства преобразования $u \rightarrow v$. Величина λ варьировалась в диапазоне от 10^{-4} до 10^{-6} . Для решения уравнения (11) использовался интегро-интерполяционный метод [23] и установление.

Нормы и метрики, имеющие потенциал для сравнения течений, не исчерпываются указанными выше, поэтому поиск оптимальной метрики представляет существенный интерес. Одним из требований к метрикам служит их совместимость с обобщенным неравенством Коши–Буняковского, позволяющим перебросить мостик от глобальной погрешности решения к погрешности в терминах проблемно-ориентированных функционалов (используемых практиками), т. е. нормы, порождающие метрики, должны быть индуцированы некоторым внутренним произведением, что существенно ограничивает применимость, например L_1 . Однако эта тема далеко выходит за рамки данной работы.

3. Тестовые задачи

Ниже представлены результаты оценки величины погрешности расчета для течений, описываемых двумерными уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U^k)}{\partial x^k} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial (\rho U^i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U^k U^i + P \delta_{ik})}{\partial x^k} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^k h_0)}{\partial x^k} = 0. \quad (14)$$

Здесь $i, k = 1, 2$, $U^1 = U$, $U^2 = V$ — компоненты скорости, $h_0 = (U^2 + V^2)/2 + h$, $h = \gamma/(\gamma - 1)(P/\rho) = \gamma e$, $e = RT/(\gamma - 1)$, $E = (e + (U^2 + V^2)/2)$ — энтальпии и энергии, $P = \rho RT$ — уравнение состояния, $\gamma = C_p/C_v$.

В качестве тестовых примеров были рассмотрены косой скачок уплотнения, а также взаимодействие ударных волн I и VI типов по классификации Edney [24]. Все течения стационарны, рассчитывались установлением. Для этих задач достаточно просто построить аналитические решения, проекции которых на расчетную сетку мы рассматриваем как “истинные” решения. Это позволяет тестировать работоспособность предлагаемого метода оценки погрешности и захвата истинного решения.

Расчеты проводились при $C_p/C_v = 1.4$ в достаточно широком диапазоне параметров течения (чисел Маха $M = 3 \div 5$ и углов отклонения потока $\alpha = 10^\circ \div 30^\circ$). На рисунке 1 представлено распределение плотности для течения типа Edney-I ($M = 3$, углы $\alpha_1 = 20^\circ$ и $\alpha_2 = 15^\circ$). Поле течения определяется пересекающимися скачками уплотнения и линией контактного разрыва.

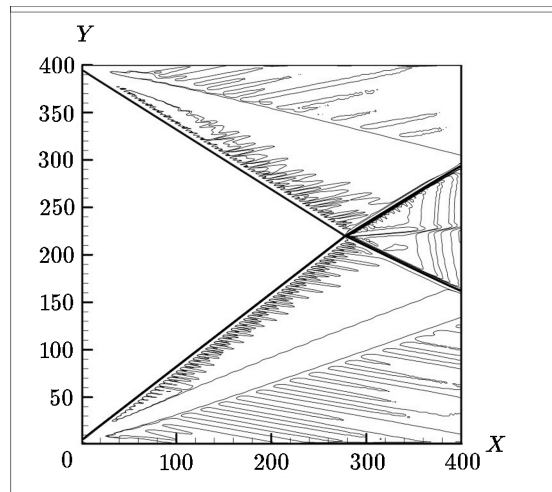


Рис. 1. Поле плотности. Edney-I

На рис. 2 представлено распределение плотности для течения типа Edney-VI ($M = 4$, два последовательных отклонения потока на углы $\alpha_1 = 10^\circ$ и $\alpha_2 = 15^\circ$). Поле течения определяется сливающимися скачками уплотнения, линией контактного разрыва и веером волн разрежения.

В работе анализировался ансамбль численных расчетов поля течения, полученных следующими методами:

- схема 1** порядка точности типа CIR (Courant Isaacson Rees) [25] в варианте [26], обозначенная как S1;
- схема 2** порядка точности, основанная на методе MUSCL [27] (использующая на границах AUFS [28]), обозначенная как S2;
- схема 3** порядка точности — модификация метода Chakravarthy–Osher — S3 [29, 30];
- схема 4** порядка точности [31], обозначенная как S4.

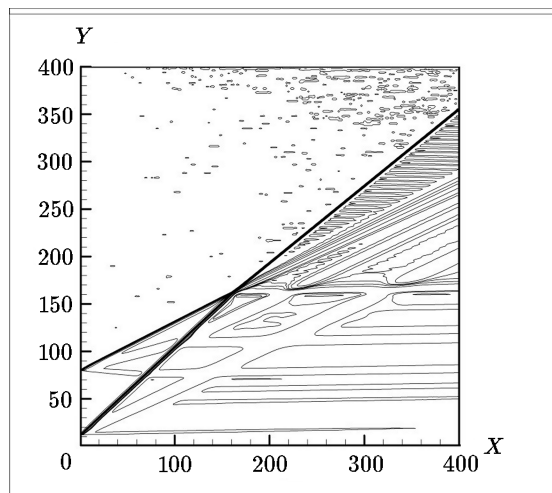


Рис. 2. Поле плотности. Edney-VI

Использовалась также TVD-схема релаксационного типа [32], имеющая второй порядок аппроксимации и отличающаяся по алгоритму от S2.

Расчеты проводились на равномерных сетках, содержащих 100×100 , 200×200 и 400×400 пространственных узлов.

Методы S1, S2, S3, S4 (1, 2, 3 и 4 номинальных, заявленных разработчиками, порядков аппроксимации) демонстрировали реальный порядок сходимости около $n = 1/2$ в нормах L_2 и L_1 , что обусловлено наличием в поле течения скачков уплотнения и линий контактного разрыва.

По набору численных решений проверялось выполнение критерия из п. 1 и далее проверялся захват истинного решения. Захват считался успешным, если оценка погрешности была больше истинной погрешности, полученной при сравнении с аналитическим решением $d(\tilde{u}, u^{(i)}) \leq d(u^{(1)}, u^{(i)})$, т. е., если истинное решение $\tilde{u} \in R^N$ находится внутри гиперсферы $d(\tilde{u}, u^{(i)}) \leq d(u^{(1)}, u^{(i)})$. С точки зрения индекса эффективности [6], это соответствует условию $I_{\text{eff}} = d(u^{(1)}, u^{(i)})/d(\tilde{u}, u^{(i)}) = \|du_{\text{max}}\|/\|\Delta u\| \geq 1$.

Численные эксперименты показывают, что схема S1 (“неточная”) и схемы S2, S3, S4 (“точные”) позволяют найти окрестность численного решения, содержащую истинное решение с использованием критерия. Сравнение схем S2, S3, S4 не позволяет выделить кластеры и использовать критерий, соответственно не удается и захватить точное решение. Погрешности этих схем близки по величине, и расщепления на кластеры не происходит. TVD-схема [32] в части расчетов на грубых сетках позволяла захватывать точное решение, что свидетельствует о том, что независимость погрешностей расчета может определяться не только различиями в порядке аппроксимации, но и различиями в алгоритме.

В целом расчеты, проведенные для течений, соответствующих уединенному косому скачку уплотнения, а также взаимодействию скачков I и VI типов по Edney, демонстрируют возможность определения величины погрешности, если критерий удовлетворен. Например, рис. 3 показывает, что набор расстояний между численными решениями $\|du_{i,k}\|_{L_2} = \|u^{(i)} - u^{(k)}\|_{L_2}$ распадается на два кластера для схем взаимодействия скачков VI-го типа по Edney (поле течения представлено на рис. 2).

Это позволяет захватить точное решение (см. рис. 4). Следует обратить внимание на

то, что для удобства на рисунках 3 и 4 по обеим осям расположена норма погрешности, хотя анализируемые данные одномерны.

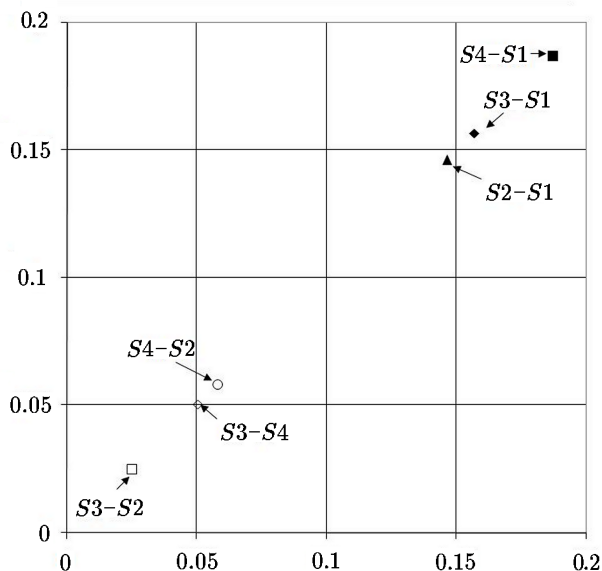


Рис. 3. Кластеры расстояний для течения Edney-VI (100×100). Набор расстояний между численными решениями $d = \|u^{(i)} - u^{(k)}\|_{L_2}$ обозначен S_i-S_k ($i, k = 1, \dots, 4$)

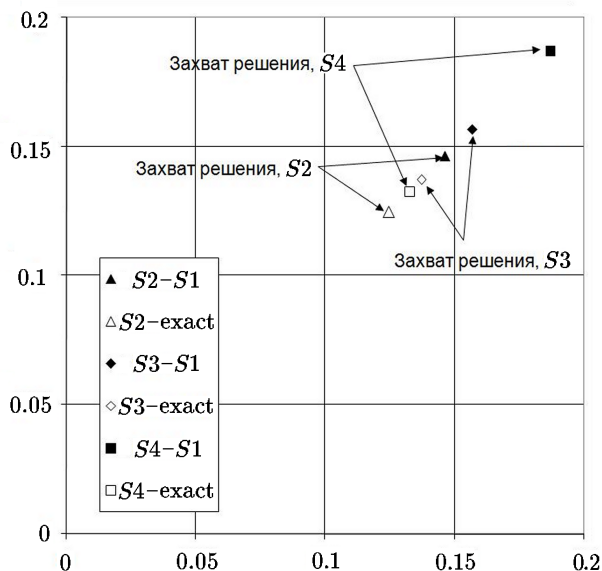


Рис. 4. Захват истинного решения для Edney-VI (100×100). Набор расстояний между численными решениями $d = \|u^{(i)} - u^{(k)}\|_{L_2}$ обозначен S_i-S_k ($i, k = 1, \dots, 4$), расстояние между численным и аналитическим (“истинным”) решениями $d = \|u^{(i)} - \tilde{u}\|_{L_2}$ обозначено как S_i -exact

В таблицах 1 и 2 представлены результаты расчетов для Edney-VI ($M = 4, \alpha_1 = 10^\circ, \alpha_2 = 15^\circ, 100 \times 100$). Таблица 1 демонстрирует разбиение набора решений на кластеры,

табл. 2 представляет качество захвата истинного решения, нормы погрешности и истинной погрешности, индекс эффективности. В табл. 2 представлены также результаты оценки погрешности с помощью метода Ричардсона ($L_2(\text{RE})$) в варианте переменного порядка аппроксимации [13] (следует обратить внимание, что метод Ричардсона дает величины S_i -exact без использования расстояний между решениями S_i-S_k). Таблицы 1 и 2 дополняют рисунки 3 и 4 данными по другим нормам.

Таблица 1. Расстояния между решениями для течения типа Edney-VI. Сетка 100×100

Метрики	S4-S2	S3-S2	S4-S3	S2-S1	S3-S1	S4-S1
L_1	0.023	0.0098	0.021	0.0668	0.072	0.0874
L_2	0.059	0.025	0.051	0.149	0.16	0.191
H^{-1}	0.028	0.0107	0.0127	0.0976	0.0928	0.121
REM- L_2	0.051	0.0189	0.041	0.136	0.145	0.170
IMED	0.043	0.0195	0.035	0.179	0.192	0.171

Удивительная на первый взгляд близость оценок в L_2 (4) и REM- L_2 (5) вызвана использованием безразмерных переменных в программах расчета.

Таблица 2. Оценка погрешности для течения типа Edney-VI. Сетка 100×100

Метрики	S2-S1	S2-exact	S3-S1	S3-exact	S4-S1	S4-exact
L_1	0.0668	0.046	0.072	0.046	0.0874	0.0375
$I_{\text{eff}}(L_1)$	–	1.45	–	1.56	–	2.32
L_2	0.149	0.128	0.16	0.138	0.191	0.133
$I_{\text{eff}}(L_2)$	–	1.16	–	1.16	–	1.44
H^{-1}	0.0976	0.055	0.0928	0.0603	0.121	0.0607
$I_{\text{eff}}(L_2)$	–	1.77	–	1.54	–	2.0
REM- L_2	0.136	0.0898	0.145	0.093	0.170	0.0846
$I_{\text{eff}}(\text{REM-}L_2)$	–	1.51	–	1.56	–	2.0
IMED	0.179	0.076	0.192	0.084	0.171	0.098
$I_{\text{eff}}(\text{IMED})$	–	2.3	–	2.3	–	1.75
$L_2(\text{RE})$	–	0.139	–	0.137	–	0.141
$I_{\text{eff}}(L_2(\text{RE}))$	–	1.2	–	1.0	–	0.98

Данные расчетов для уединенного скачка близки к результатам для течения типа Edney-VI. Для течения типа Edney-I наблюдаются самые плохие результаты (низкий индекс эффективности) в сравнении с уединенным косым скачком и течением типа Edney-VI. Таблицы 3 и 4 представляют результаты для схемы течения Edney-I ($M = 3$, углы отклонения потока $\alpha_1 = 20^\circ$ и $\alpha_2 = 15^\circ$, размер сетки 100×100).

Таблица 3. Расстояния между решениями для течения Edney-I. Сетка 100×100

Метрики	S4-S2	S3-S2	S4-S3	S2-S1	S3-S1	S4-S1
L_1	0.017	0.018	0.019	0.0563	0.0673	0.0721
L_2	0.044	0.043	0.045	0.107	0.128	0.141
H^{-1}	0.0164	0.0154	0.0129	0.0609	0.0705	0.075
REM- L_2	0.05	0.039	0.043	0.122	0.14	0.159
IMED	0.028	0.028	0.022	0.126	0.148	0.159

Таблица 4. Оценки погрешности для Edney-I. Сетка 100×100

Метрики	S2-S1	S2-exact	S3-S1	S3-exact	S4-S1	S4-exact
L_1	0.0563	0.0436	0.0673	0.050	0.0721	0.039
$I_{\text{eff}}(L_1)$	–	1.3	–	1.35	–	1.83
L_2	0.107	0.124	0.128	0.146	0.141	0.139
$I_{\text{eff}}(L_2)$	–	0.86	–	0.88	–	1.02
H^{-1}	0.0609	0.0512	0.0705	0.587	0.075	0.0597
$I_{\text{eff}}(H^{-1})$	–	1.2	–	1.2	–	1.25
REM- L_2	0.122	0.163	0.14	0.178	0.159	0.176
$I_{\text{eff}}(\text{REM-}L_2)$	–	0.75	–	0.79	–	0.9
IMED	0.126	0.114	0.148	0.0902	0.159	0.129
$I_{\text{eff}}(\text{IMED})$	–	1.1	–	1.64	–	1.23

Данные таблиц 1–4 соответствуют грубой сетке 100×100 . Аналогичное поведение набора расстояний наблюдается для более мелких сеток (200×200 и 400×400). В частности, таблицы 5 и 6 представляют данные для Edney-I ($M = 3$, углы $\alpha_1 = 20^\circ$ и $\alpha_2 = 15^\circ$) для сетки 400×400 (их полезно сравнить с данными таблиц 3, 4).

Таблица 5. Расстояния между решениями для Edney-I. Сетка 400×400

Метрики	S4-S2	S3-S2	S4-S3	S2-S1	S3-S1	S4-S1
L_1	0.0061	0.0052	0.0068	0.0169	0.0202	0.0223
L_2	0.0217	0.0226	0.0227	0.0545	0.0655	0.0709
H^{-1}	0.0148	0.0157	0.0135	0.0649	0.0764	0.0820
REM- L_2	0.026	0.020	0.022	0.0644	0.0739	0.0830
IMED	0.014	0.0145	0.011	0.0615	0.0764	0.0815

Таблица 6. Оценка ошибки для Edney-I. Сетка 400×400

Метрики	S2-S1	S2-exact	S3-S1	S3-exact	S4-S1	S4-exact
L_1	0.0169	0.0122	0.0202	0.0147	0.0223	0.0123
$I_{\text{eff}}(L_1)$	–	1.37	–	1.37	–	1.82
L_2	0.0545	0.0680	0.0655	0.0802	0.0709	0.0760
$I_{\text{eff}}(L_2)$	–	0.8	–	0.82	–	0.93
H^{-1}	0.0458	0.0456	0.0546	0.0548	0.0577	0.0521
$I_{\text{eff}}(H^{-1})$	–	1.0	–	1.0	–	1.08
REM- L_2	0.0644	0.0662	0.0739	0.0767	0.0830	0.0754
$I_{\text{eff}} \text{ REM-}L_2$	–	0.97	–	0.96	–	1.08
IMED	0.0615	0.0527	0.0764	0.0638	0.0815	0.0625
$I_{\text{eff}}(\text{IMED})$	–	1.17	–	1.2	–	1.3

Для ансамбля описанных выше численных решений максимум расстояния между решениями при выполнении условий критерия может служить верхней оценкой погрешности дискретизации с индексом эффективности $I_{\text{eff}} \sim 0.75 \div 2.3$.

В целом наблюдается зависимость индекса эффективности от выбора метрики:

- метрика, порожденная L_1 , дает оценки с $I_{\text{eff}} \sim 1.3 \div 2.3$;
- метрика, порожденная H^{-1} , дает результаты $I_{\text{eff}} \sim 1.0 \div 2.0$;
- метрика IMED [19] дает $I_{\text{eff}} \sim 1.1 \div 2.3$;

- метрика, порожденная L_2 , дает $I_{\text{eff}} \sim 0.8 \div 1.5$;
- метрика REM- L_2 , имитирующая относительную погрешность, дает $I_{\text{eff}} \sim 0.75 \div 2.0$.

Согласно [6], индекс эффективности в диапазоне от 1 до 3 рассматривается как приемлемый. С этой точки зрения у части метрик есть проблемы с надежностью, поскольку оценки не являются гарантированными из-за нарушения неравенства $I_{\text{eff}} \geq 1$.

Среди метрик, допускающих неравенство Коши–Буняковского, приемлемые результаты дают H^{-1} и IMED [19]. Однако надо учесть, что IMED гораздо проще в численной реализации.

Дробление сетки не оказывает заметного влияния на величину индекса эффективности, хотя и снижает общий уровень погрешности.

4. Обсуждение

Стандартный контроль сходимости по сетке основывается на правиле Рунге [6], по которому, если разность двух приближенных решений на грубой сетке T_h и на мелкой сетке $T_{h,\text{ref}}$ мала, тогда $u_{h,\text{ref}}$ и u_h вероятно близки к точному решению. С точки зрения практики хотелось бы иметь оценку $\|u_h - \tilde{u}\| \leq \delta$ с вычислимой δ . Такую оценку дает метод Ричардсона. К сожалению, во многих задачах вычислительной газодинамики порядок ошибки в поле течения переменен, что существенно повышает требования к вычислительным ресурсам (не менее четырех последовательных сгущений сетки) при использовании метода Ричардсона.

В данной работе (и в [33–35]) мы рассматриваем некоторую альтернативу методу Ричардсона. Она использует ансамбль расчетов, выполненных на одной и той же сетке с помощью независимых численных методов (например, разного порядка аппроксимации). Величина погрешности расчета $\delta(u_h, \tilde{u}) \leq \delta$ оценивается в некоторой метрике (или в норме $\|u_h - \tilde{u}\| \leq \delta$) по информации о расстояниях между численными решениями. Рассматриваемый метод используется в форме постпроцессора. Он не нуждается в измельчении сетки и может применяться вне асимптотического диапазона, хотя и уступает экстраполяции Ричардсона в качестве результатов.

Следует отметить, что качество захвата решения (индекс эффективности) в данном подходе практически не зависит от размера сетки. Это верно для тех схем, у которых порядок аппроксимации не меняется при изменении шага сетки (для схемы из [32] это не так, но это исключение). Если захват решения есть на грубой сетке, он будет и на мелкой, естественно, с другим уровнем ошибки.

Рассматриваемый метод дает глобальную оценку погрешности, однако для локальной адаптации сетки полезной информации он не дает.

Оценка погрешности на ансамбле решений не отменяет стандартный подход, основанный на измельчении сетки, однако может дополнить его вычислительно дешевым односеточным алгоритмом.

5. Заключение

Ансамбль решений, полученных независимыми солверами, содержит информацию о погрешности расчета и расположении истинного решения.

Анализ набора расстояний между численными решениями ансамбля позволяет определить центр и радиус гиперсферы, содержащей истинное решение.

Возможно построение неинтрузивного постпроцессора, позволяющего на ансамбле решений определить погрешность расчета. В отличие от метода Ричардсона он работоспособен на одной сетке.

Вычислительные эксперименты подтвердили применимость данного подхода для набора двумерных сверхзвуковых течений, описываемых уравнениями Эйлера и содержащих скачки уплотнения и линии контактного разрыва.

Литература

1. **Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.** Метод дифференциального приближения. — Новосибирск: Наука, 1985.
2. **Richtmyer R.D. and Morton K.W.** Difference Methods for Initial Value Problems. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1967.
3. **Skell R.D.** Thirteen ways to estimate global error // Numer. Math. — 1986. — Vol. 48. — P. 1–20.
4. **Roy Ch.J.** Review of discretization error estimators in scientific computing // AIAA J. — 2010. — Vol. 126. — P. 1–29.
5. **Babuska I. and Rheinboldt W.** A-posteriori error estimates for the finite element method Int. J. Numer. Methods in Engineering. — 1978. — Vol. 12. — P. 1597–1615.
6. **Repin S.I.** A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations // Radon Series on Computational and Applied Mathematics. — Walter de Gruyter, 2008. — Vol. 4.
7. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решения разностных схем. — М.: Наука, 1979.
8. **Кузнецов Н.Н.** Точность некоторых приближенных методов расчета слабых решений квазилинейного уравнения первого порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1976. — Т. 16, № 6. — С. 1489–1502.
9. **Banks J.W., Hittinger J.A.F., Woodward C.S.** Numerical error estimation for nonlinear hyperbolic PDEs via nonlinear error transport // CMAME. — 2012. — Vol. 213–216. — P. 1–15.
10. **Carpenter M.H. and Casper J.H.** Accuracy of shock capturing in two spatial dimensions // AIAA J. — 1999. — Vol. 37, № 9. — P. 1072–1079.
11. **Banks J.W. and Aslam T.D.** Richardson extrapolation for linearly degenerate discontinuities // J. of Scientific Computing. — 2012. — Vol. 57, № 1. — P. 1–15.
12. **Roy Ch.J.** Grid convergence error analysis for mixed-order numerical schemes // AIAA J. — 2003. — Vol. 41, № 4. — P. 595–604.
13. **Alexeev A.K. and Bondarev A.E.** On some features of Richardson extrapolation for compressible inviscid flows // Mathematica Montisnigri. — 2017. — Vol. XL. — P. 42–54.
14. **Burago D., Burago Yu.D., Ivanov S.** A Course in Metric Geometry. — AMS, 2001.
15. **Gorban A.N. and Tyukin I.Y.** Blessing of dimensionality: mathematical foundations of the statistical physics of data. — 2018. — DOI: 10.1098/rsta.2017.0237.
16. **Sidiropoulos P.** N-sphere Chord Length Distribution. — 2014. — (Cornell University; arXiv:1411.5639v1).
17. **Зорич В.А.** Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность // ТВП. — 2014. — Т. 59, № 3. — С. 436–451. Перевод: Zorich V.A. Multidimensional geometry, functions of many variables and probability // Theory Probab. Appl. — 2015. — Vol. 59, № 3. — P. 481–493.
18. **Алексеев А.К., Махнев И.Н.** Использование лагранжевых коэффициентов при апостериорной оценке погрешности расчета // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. —

- Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 4. — С. 375–388. Перевод: Alekseev A.K., Makhnev I.N. On using the Lagrange coefficients for a posteriori error estimation // Num. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 2, № 4. — P. 302–313.
19. **Wang L., Zhang Y., Feng J.** On the euclidean distance of images // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 2005. — Vol. 27, № 8. — P. 1334–1339.
 20. **Mahalanobis P.Ch.** On the generalized distance in statistics // Proc. of the National Institute of Sciences of placecountry-regionIndia. — 1936. — Vol. 2, № 1. — P. 49–55.
 21. **Карчевский М.М., Павлова М.Ф.** Уравнения математической физики. Дополнительные главы. — Казань: Изд-во КГУ, 2008.
 22. **Bramble J.H., Lazarov R.D., Pasciak J.E.** A least squares approach based on a discrete minus one inner product for first order systems // Mathematics of Computation. — 1997. — Vol. 66, № 219. — P. 935–955.
 23. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
 24. **Edney B.** Effects of shock impingement on the heat transfer around blunt bodies // AIAA J. — 1968. — Vol. 6, № 1. — P. 15–21.
 25. **Courant R., Isaacson E., Rees M.** On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Comm. Pure Appl. Math. — 1952. — Vol. 5. — P. 243–255.
 26. **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
 27. **Van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. — 1979. — Vol. 32, № 1. — P. 101–136.
 28. **Sun M. and Katayama K.** An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations // JCP. — 2003. — Vol. 189. — P. 305–329.
 29. **Osher S. and Chakravarthy S.** Very high order accurate TVD schemes // Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness. — 1984. — P. 229–274.
 30. **Lin C.-T., Yeh J.-Y., Chen J.-Y.** High resolution finite volume scheme for the quantum hydrodynamic equations // JCP. — 2009. — Vol. 228, № 5. — P. 1713–1732.
 31. **Yamamoto S. and Daiguji H.** Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations // Computers and Fluids. — 1993. — Vol. 22. — P. 259–270.
 32. **Hy Trac and Ue-Li Pen** A Primer on Eulerian Computational Fluid Dynamics for Astrophysics. — 2002. — (Cornell University; arXiv:astro-ph/0210611v2).
 33. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Navon I.M.** On Estimation of Discretization Error Norm via Ensemble of Approximate solutions. — 2017. — (Cornell University; arXiv:1704.04994).
 34. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Navon I.M.** On Triangle Inequality Based Approximation Error Estimation. — 2017. — (Cornell University; arXiv:1708.04604).
 35. **Alexeev A.K., Bondarev A.E.** On exact solution enclosure on ensemble of numerical simulations // Mathematica Montisnigri. — 2017. — Vol. XXXVIII. — P. 63–77.

Поступила в редакцию 6 сентября 2018 г.

После исправления 7 мая 2019 г.

Принята к печати 16 апреля 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Shokin Yu.I., Yanenko N.N.** Metod differentsial'nogo priblizheniya. — Novosibirsk: Nauka, 1985.

2. **Richtmyer R.D. and Morton K.W.** Difference Methods for Initial Value Problems.— N.Y.: John Wiley and Sons, 1967.
3. **Skeel R.D.** Thirteen ways to estimate global error // Numer. Math.— 1986.— Vol. 48.— P. 1–20.
4. **Roy Ch.J.** Review of discretization error estimators in scientific computing // AIAA J.— 2010.— Vol. 126.— P. 1–29.
5. **Babuska I. and Rheinboldt W.** A-posteriori error estimates for the finite element method Int. J. Numer. Methods in Engineering.— 1978.— Vol. 12.— P. 1597–1615.
6. **Repin S.I.** A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations // Radon Series on Computational and Applied Mathematics.— Walter de Gruyter, 2008.— Vol. 4.
7. **Marchuk G.I., Shaidurov V.V.** Povyshenie tochnosti resheniya raznostnykh skhem.— M.: Nauka, 1979.
8. **Kuznetsov N.N.** Tochnost' nekotorykh priblizhennykh metodov rascheta slabykh reshenii kvazilineinogo uravneniya pervogo poryadka // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.— 1976.— T. 16, № 6.— S. 1489–1502.
9. **Banks J.W., Hittinger J.A.F., Woodward C.S.** Numerical error estimation for nonlinear hyperbolic PDEs via nonlinear error transport // CMAME.— 2012.— Vol. 213–216.— P. 1–15.
10. **Carpenter M.H. and Casper J.H.** Accuracy of shock capturing in two spatial dimensions // AIAA J.— 1999.— Vol. 37, № 9.— P. 1072–1079.
11. **Banks J.W. and Aslam T.D.** Richardson extrapolation for linearly degenerate discontinuities // J. of Scientific Computing.— 2012.— Vol. 57, № 1.— P. 1–15.
12. **Roy Ch.J.** Grid convergence error analysis for mixed-order numerical schemes // AIAA J.— 2003.— Vol. 41, № 4.— P. 595–604.
13. **Alexeev A.K. and Bondarev A.E.** On some features of Richardson extrapolation for compressible inviscid flows // Mathematica Montisnigri.— 2017.— Vol. XL.— P. 42–54.
14. **Burago D., Burago Yu.D., Ivanov S.** A Course in Metric Geometry.— AMS, 2001.
15. **Gorban A.N. and Tyukin I.Y.** Blessing of dimensionality: mathematical foundations of the statistical physics of data.— 2018.— DOI: 10.1098/rsta.2017.0237.
16. **Sidiropoulos P.** N-sphere Chord Length Distribution.— 2014.— (Cornell University; arXiv:1411.5639v1).
17. **Zorich V.A.** Mnogomernaya geometriya, funktsii ochen' mnogih peremennykh i veroyatnost' // TVP.— 2014.— T. 59, № 3.— S. 436–451. Perevod: Zorich V.A. Multidimensional geometry, functions of many variables and probability // Theory Probab. Appl.— 2015.— Vol. 59, № 3.— P. 481–493.
18. **Alekseev A.K., Mahnev I.N.** Ispol'zovanie lagranzhevyykh koeffitsientov pri aposteriornoi otsenke pogreshnosti rascheta // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie.— Novosibirsk, 2009.— T. 12, № 4.— S. 375–388. Perevod: Alekseev A.K., Makhnev I.N. On using the Lagrange coefficients for a posteriori error estimation // Num. Anal. Appl.— 2009.— Vol. 2, № 4.— P. 302–313.
19. **Wang L., Zhang Y., Feng J.** On the euclidean distance of images // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.— 2005.— Vol. 27, № 8.— P. 1334–1339.
20. **Mahalanobis P.Ch.** On the generalized distance in statistics // Proc. of the National Institute of Sciences of placecountry-regionIndia.— 1936.— Vol. 2, № 1.— P. 49–55.
21. **Karchevskii M.M., Pavlova M.F.** Uravneniya matematicheskoi fiziki. Dopolnitel'nye glavy.— Kazan': Izd-vo KGU, 2008.
22. **Bramble J.H., Lazarov R.D., Pasciak J.E.** A least squares approach based on a discrete minus one inner product for first order systems // Mathematics of Computation.— 1997.— Vol. 66, № 219.— P. 935–955.

23. **Samarskii A.A.** Teoriya raznostnyh skhem. — M.: Nauka, 1977.
24. **Edney B.** Effects of shock impingement on the heat transfer around blunt bodies // AIAA J. — 1968. — Vol. 6, № 1. — P. 15–21.
25. **Courant R., Isaacson E., Rees M.** On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Comm. Pure Appl. Math. — 1952. — Vol. 5. — P. 243–255.
26. **Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu.** Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenii. — M.: Fizmatlit, 2001.
27. **Van Leer B.** Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. — 1979. — Vol. 32, № 1. — P. 101–136.
28. **Sun M. and Katayama K.** An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations // JCP. — 2003. — Vol. 189. — P. 305–329.
29. **Osher S. and Chakravarthy S.** Very high order accurate TVD schemes // Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness. — 1984. — P. 229–274.
30. **Lin C.-T., Yeh J.-Y., Chen J.-Y.** High resolution finite volume scheme for the quantum hydrodynamic equations // JCP. — 2009. — Vol. 228, № 5. — P. 1713–1732.
31. **Yamamoto S. and Daiguji H.** Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations // Computers and Fluids. — 1993. — Vol. 22. — P. 259–270.
32. **Hy Trac and Ue-Li Pen** A Primer on Eulerian Computational Fluid Dynamics for Astrophysics. — 2002. — (Cornell University; arXiv:astro-ph/0210611v2).
33. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Navon I.M.** On Estimation of Discretization Error Norm via Ensemble of Approximate solutions. — 2017. — (Cornell University; arXiv:1704.04994).
34. **Alekseev A.K., Bondarev A.E., Navon I.M.** On Triangle Inequality Based Approximation Error Estimation. — 2017. — (Cornell University; arXiv:1708.04604).
35. **Alexeev A.K., Bondarev A.E.** On exact solution enclosure on ensemble of numerical simulations // Mathematica Montisnigri. — 2017. — Vol. XXXVIII. — P. 63–77.