

УДК 532.546  
DOI: 10.15372/PMTF202415448

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАБОЙНОГО ДАВЛЕНИЯ В НАКЛОННО НАПРАВЛЕННОЙ СКВАЖИНЕ

Р. Р. Уразов\*, О. В. Ахметова\*, И. И. Галлямитдинов \*\*,\*\*\*,  
А. Я. Давлетбаев\*\*,\*\*\*, В. В. Сарапулова\*, А. В. Пестриков\*\*\*

\* ООО “РН-БашНИПИнефть”, Уфа, Россия

\*\* Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

\*\*\* ПАО «НК “Роснефть”», Москва, Россия

E-mails: UrazovRR@bnipi.rosneft.ru, OV\_Akhmetova@bnipi.rosneft.ru,  
II\_Galliamitdinov@bnipi.rosneft.ru, DavletbaevAY@bnipi.rosneft.ru,  
SarapulovaVV@bnipi.rosneft.ru, a\_pestrikov@rosneft.ru

Представлены решения задач о нестационарной фильтрации к несовершенной скважине с произвольным углом наклона от вертикали, позволяющие выполнять интерпретацию данных по результатам гидродинамических исследований скважин и осуществлять прогнозирование объемов добычи. Получены решения при различных условиях на кровле и подошве пласта, при этом для описания забойного давления реализовано два алгоритма: многосегментный и односегментный с определением точки эквивалентного давления. Вычислительный эксперимент показывает, что результаты расчетов, полученные с использованием односегментного и многосегментного алгоритмов, хорошо согласуются.

**Ключевые слова:** наклонно направленная скважина, фильтрация, давление, гидродинамические исследования скважины, точка эквивалентного давления

**Введение.** Модель наклонно направленной скважины (ННС) является одной из наиболее часто используемых в программных комплексах, предназначенных для анализа и интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин.

Ранние модели, описывающие поведение давления на забое ННС, основаны на решении уравнения пьезопроводности для пласта, вскрытого вертикальной скважиной (ВС). Отличие давления в ННС от давления в ВС учитывается геометрическим скин-фактором. Такой подход непригоден при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин, поскольку на диагностическом билогарифмическом графике не отражаются особенности ННС. Вследствие этого потребовалось развитие теории фильтрации для ННС. Модели нестационарного течения жидкости в пласте с ННС представлены в работах [1–7]. Анализ известных аналитико-численных моделей показывает, что в них используются два алгоритма: точный многосегментный [8] и быстрый односегментный [1, 4, 5].

В данной работе получены решения задач о нестационарной фильтрации к несовершенной скважине с произвольным углом наклона от вертикали, в которых используются указанные алгоритмы. Решения найдены методом источников, основанным на использовании функций Грина [2, 9], в комбинации с интегральным преобразованием Лапласа [1, 10].

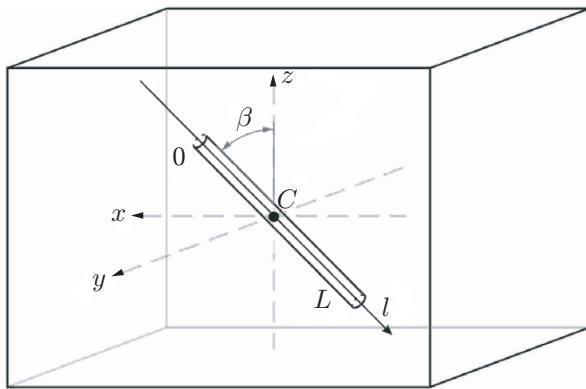


Рис. 1. Схема участка перфорации наклонной скважины

Для реализации односегментного алгоритма необходимо определить зависимость координаты точки эквивалентного давления от угла наклона скважины и от положения центра вскрытой части пласта. Для определения динамики давления используется численный алгоритм обратного преобразования Стефеста [11].

Разработанные модели ННС могут быть использованы для расчета притока к стволу как полностью, так и частично вскрывающей пласт скважины. В предельных случаях отклонения участка перфорации от вертикали ( $\beta = 0, 90^\circ$ ) расчеты по модели ННС согласуются с расчетами по моделям вертикальной и горизонтальной скважин соответственно [12].

Оба подхода к расчету забойного давления в ННС реализованы в программном комплексе “РН-ВЕГА” [13], предназначенном для анализа и интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин.

**1. Постановка задачи.** Участок перфорации наклонной скважины радиусом  $r_w$  показан на рис. 1. Угол наклона участка перфорации длиной  $L$ , измеренный в направлении от нормали  $z$  к плоскости залегания пласта  $(x, y)$ , равен  $\beta$ . Направим вспомогательную ось  $l$  вдоль оси скважины. Координаты средней точки  $C$  перфорированной части ННС обозначим  $(x_w^*, y_w^*, z_w^*)$ . Пласт полагается горизонтальным с мощностью  $h$ , однородным и анизотропным с горизонтальной и вертикальной компонентами тензора проницаемости  $k_h$  и  $k_v$  соответственно. Предполагается, что пористость пласта  $\varphi$ , вязкость флюида  $\mu$  и общая сжимаемость пластовой системы  $c_t$  не зависят от давления и пространственных координат. На верхней и нижней границах анизотропного пласта могут быть заданы условия непротекания или постоянного давления в различных комбинациях. Модели, представленные в данной работе, построены в пренебрежении гравитационными эффектами.

**2. Модель течения в скважине.** В зависимости от режима течения изменение давления в наклонном стволе описывается законом Хагена — Пуазейля или Дарси — Вейсбаха. Теоретический анализ и эксперименты показывают, что перепад давления вдоль ННС незначителен по сравнению с перепадом давления при фильтрации флюида в пористой среде. Поэтому наклонный ствол скважины рассматривается как линейный источник бесконечной проводимости [4].

Начало отсчета совместим с верхней точкой перфорированного участка ствола скважины. Тогда условие отсутствия сопротивления в трубе можно записать в виде

$$p(t, l) = p_w(t), \quad l \in [0; L], \quad (1)$$

где  $p$  — давление на перфорированном участке скважины в произвольный момент времени;  $p_w$  — регистрируемое забойное давление;  $t$  — время работы скважины.

Условие однородности давления в безразмерных переменных в пространстве изображений Лапласа [1] принимает вид

$$\tilde{p}_D(s, l_D) = \tilde{p}_{wD}(s), \quad l_D \in [0; L_D], \quad (2)$$

где  $l_D = l/L$ ;  $p_D = (2\pi k_h h/(\mu q))(p_i - p)$ ;  $q$  — дебит скважины;  $p_i$  — начальное пластовое давление;  $\tilde{p}_D$ ,  $\tilde{p}_{wD}$  — изображения Лапласа соответствующих функций-оригиналов в (1);  $s$  — параметр Лапласа.

**3. Модель течения в пласте.** В соответствии с методом источников, основанным на использовании функций Грина [14], давление в любой точке анизотропного пласта, содержащего ННС, описывается выражением

$$p_{fD}(t_D, x_D, y_D, z_D) = \int_0^{t_D} \int_0^{L_D} q_{fD}(\tau, l_D) G(\tau, l_D, x_D, y_D, z_D) dl_D d\tau, \quad (3)$$

где  $x_D = x/L$ ;  $y_D = y/L$ ;  $z_D = (z/L)\sqrt{k_h/k_v}$ ;  $t_D = k_h t/(\varphi \mu c_t L^2)$ ;  $q_{fD}(\tau, l_D) = q_f(\tau, l_D)/(q/L)$  — безразмерная интенсивность притока;  $G(\tau, l_D, x_D, y_D, z_D)$  — функция Грина, описывающая возмущение давления, создаваемое точечным источником в точке с координатами  $(x_D, y_D, z_D)$ .

Применяя преобразование Лапласа для (3), получаем

$$\tilde{p}_{fD}(s, x_D, y_D, z_D) = \int_0^{L_D} \tilde{q}_{fD}(s, l_D) \tilde{G}(s, l_D, x_D, y_D, z_D) dl_D. \quad (4)$$

Здесь  $\tilde{q}_{fD}$ ,  $\tilde{G}$  — изображения Лапласа соответствующих функций-оригиналов.

Условие непрерывности давления в пласте и на перфорированной части стенки скважины имеет вид

$$\tilde{p}_{fD}(l_D, s) = \tilde{p}_D(l_D, s). \quad (5)$$

Из выражений (2), (4), (5) следует уравнение, связывающее интенсивность притока  $\tilde{q}_{fD}(s, l_D)$  и забойное давление  $\tilde{p}_{wD}(s)$ :

$$\int_0^{L_D} \tilde{q}_{fD}(s, l_D) \tilde{G}(s, l_D, x_D, y_D, z_D) dl_D = \tilde{p}_{wD}(s). \quad (6)$$

В безразмерных переменных закон сохранения массы флюида в ННС в пространстве Лапласа принимает вид

$$\int_0^{L_D} \tilde{q}_{fD}(s, l_D) dl_D = \frac{1}{s}, \quad (7)$$

где  $1/s$  — полный безразмерный дебит скважины.

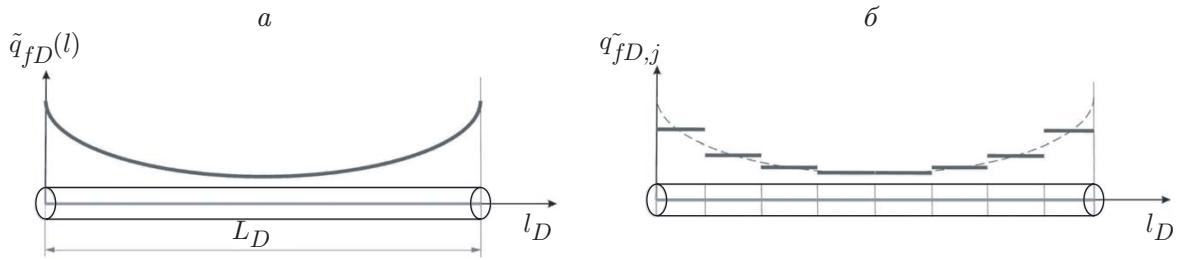


Рис. 2. Функция плотности притока (а) и ее дискретное представление (б)

**4. Метод решения.** Аналитический вид зависимости функции плотности притока  $\tilde{q}_{fD}(s, l_D)$  (рис. 2, а) от осевой координаты априори неизвестен, что вызывает затруднения при решении системы (6), (7).

В работе [8] в качестве метода решения системы (6), (7) предложен подход, в соответствии с которым ствол скважины разбивается по длине на  $N$  сегментов с равномерным притоком (рис. 2, б). Система уравнений записывается в дискретном виде для каждого из  $N$  сегментов и решается относительно неизвестных плотностей притока сегментов  $\tilde{q}_{fD,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  и забойного давления  $\tilde{p}_{wD}$ . В отличие от работы [8] в данной работе система (6), (7) решается относительно безразмерных дебитов (в пространстве Лапласа)  $\tilde{q}_{D,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Обозначим через  $L_{ND} = L_D/N$  длину сегмента, через  $l_j = [l_{D,j-1}; l_{D,j}]$  — координаты концов сегментов. При этом будем учитывать, что координаты начала и конца участка перфорации равны  $l_{D,0} = 0$  и  $l_{D,N} = L_D$ . Плотность притока из пласта в пределах сегмента считаем постоянной и связанной с безразмерным дебитом следующим соотношением:

$$\tilde{q}_{fD,j} = \tilde{q}_{D,j}/L_{ND}.$$

При использовании этого соотношения решаемая система уравнений для  $N$  сегментов принимает вид

$$\sum_{j=1}^N \tilde{q}_{D,j} \tilde{F}_{i,j}(s, x_{wD,i}, y_{wD,i}, z_{wD,i}, x_{wD,j}, y_{wD,j}, z_{wD,j}) = \tilde{p}_{wD}(s), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^N \tilde{q}_{D,j} = \frac{1}{s}, \quad (9)$$

где  $\tilde{F}_{i,j} = \frac{1}{L_{ND}} \int_{l_{D,j-1}}^{l_{D,j}} \tilde{G}(s, l_D, x_{wD,i}, y_{wD,i}, z_{wD,i}) dl_D$  — функция линейного источника, определяющая возмущение давления, создаваемое сегментом  $j$  в центре сегмента  $i$  с координатами  $x_{wD,i}, y_{wD,i}, z_{wD,i}$ . Вид функции  $\tilde{F}_{i,j}$  зависит от типа границ, заданных на кровле и подошве пласта.

**5. Функция линейного источника.** Найдем функцию линейного источника для случая непроницаемых границ на кровле и подошве анизотропного пласта. В этом случае функция  $\tilde{G}$  для точечного источника имеет вид [2–4, 14]

$$\tilde{G} = K_0(r_D \sqrt{s}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(r_D \sqrt{s_n}) \cos\left(\pi n \frac{z_{wD}}{h_D}\right) \cos\left(\pi n \frac{z_D}{h_D}\right). \quad (10)$$

В (10) используются следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} r_{wD} &= \frac{r_w}{L}, \quad x_{wD} = \frac{x_w}{L}, \quad y_{wD} = \frac{y_w}{L}, \quad r_D = \sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2}, \\ z_{wD} &= \frac{z_w}{L} \sqrt{\frac{k_h}{k_v}}, \quad h_D = \frac{h}{L} \sqrt{\frac{k_h}{k_v}}, \quad s_n = s + \frac{\pi^2 n^2}{h_D^2} \end{aligned} \quad (11)$$

( $x, y, z$  — координаты произвольной точки пласта;  $x_w, y_w, z_w$  — координаты точечного источника).

Отклик давления, соответствующий отбору жидкости из  $j$ -го линейного источника, может быть получен путем интегрирования (10) вдоль оси наклонной скважины. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j &= \frac{1}{L_{DN}} \int_{l_{D,j-1}}^{l_{D,j}} \tilde{G} dl_D = \\ &= \frac{1}{L_{DN}} \int_{l_{D,j-1}}^{l_{D,j}} \left[ K_0(r_D \sqrt{s}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(r_D \sqrt{s_n}) \cos \left( \pi n \frac{z_{wD}}{h_D} \right) \cos \left( \pi n \frac{z_D}{h_D} \right) \right] dl_D. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$dl_D = \sqrt{(dx_{wD})^2 + (dz_{wD})^2},$$

и выполняя интегрирование по  $x_{wD}$ , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j &= \frac{1}{L_{DN}} \int_{x_{wD,j} - (L_{DN}/2) \sin \beta}^{x_{wD,j} + (L_{DN}/2) \sin \beta} \sqrt{1 + \left( \frac{dz_{wD}}{dx_{wD}} \right)^2} \times \\ &\quad \times \left[ K_0(r_D \sqrt{s}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(r_D \sqrt{s_n}) \cos \left( \pi n \frac{z_{wD}}{h_D} \right) \cos \left( \pi n \frac{z_D}{h_D} \right) \right] dx_{wD}. \end{aligned} \quad (12)$$

На наклонном линейном источнике должны выполняться условия

$$z_w = z_{w,j} - (x_w - x_{w,j}) \operatorname{ctg} \beta, \quad y_w = 0, \quad (13)$$

где  $z_{w,j}, x_{w,j}$  — координаты центра сегмента.

Подставляя (11) в (13), получаем

$$x_{wD} = \operatorname{tg} \beta' (z_{wD,j} - z_{wD}) + x_{wD,j}, \quad \operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} \beta \sqrt{k_v/k_h}. \quad (14)$$

Выражение (12) с учетом (13) принимает вид

$$\tilde{F}_j = \tilde{F}_{j,1} + \tilde{F}_{j,2}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{j,1} &= \frac{\operatorname{cosec} \beta}{L_{DN}} \int_{x_{wD,j} - (L_{DN}/2) \sin \beta}^{x_{wD,j} + (L_{DN}/2) \sin \beta} K_0(\sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + y_D^2} \sqrt{s}) dx_{wD}, \\ \tilde{F}_{j,2} &= \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_{DN}} \int_{x_{wD,j} - (L_{DN}/2) \sin \beta}^{x_{wD,j} + (L_{DN}/2) \sin \beta} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + y_D^2} \sqrt{s_n}) \cos(\psi_1) \cos(\psi_2) dx_{wD}, \\ \psi_1 &= \pi n \frac{z_{wD,j} - (x_{wD} - x_{wD,j}) / \operatorname{tg} \beta'}{h_D}, \quad \psi_2 = \pi n \frac{z_D}{h_D}. \end{aligned}$$

Для вычисления давления, создаваемого  $j$ -м источником в центре  $i$ -го сегмента с координатами  $(x_{wD,i}, y_{wD,i} = r_{wD}, z_{wD,i})$ , введем переменную  $n_{ij} = |i - j|$ , тогда

$$\tilde{F}_{i,j} = \tilde{F}_{i,j,1} + \tilde{F}_{i,j,2}. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i,j,1} &= \frac{\operatorname{cosec} \beta}{L_{DN}} \int_{(n_{ij}-1/2)L_{DN} \sin \beta}^{(n_{ij}+1/2)L_{DN} \sin \beta} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s}) d\tilde{x}_{wD}, \\ \tilde{F}_{i,j,2} &= \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_{DN}} \int_{(n_{ij}-1/2)L_{DN} \sin \beta}^{(n_{ij}+1/2)L_{DN} \sin \beta} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \cos(\psi_{1,i}) \cos(\psi_{2,i}) d\tilde{x}_{wD}, \\ \tilde{x}_{wD} &= x_{wD,i} - x_{wD}, \\ \psi_{1,i} &= \pi n \frac{z_{wD,j} - [(i-j)L_{DN} \sin \beta - \tilde{x}_{wD}]/\operatorname{tg} \beta'}{h_D}, \quad \psi_{2,i} = \pi n \frac{z_{wD,i}}{h_D}. \end{aligned}$$

Аналогично получены формулы для расчета давления, создаваемого  $j$ -м источником в центре  $i$ -го источника, при других типах границ на кровле и подошве анизотропного пласта:

— постоянное давление на кровле и подошве:

$$\tilde{F}_{i,j} = \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_{DN}} \int_{(n_{ij}-1/2)L_{DN} \sin \beta}^{(n_{ij}+1/2)L_{DN} \sin \beta} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \sin(\psi_{1,i}) \sin(\psi_{2,i}) d\tilde{x}_{wD};$$

— непроницаемая граница на кровле и граница с постоянным давлением на подошве:

$$\tilde{F}_{i,j} = \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_{DN}} \int_{(n_{ij}-1/2)L_{DN} \sin \beta}^{(n_{ij}+1/2)L_{DN} \sin \beta} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \sin(\psi_{3,i}) \sin(\psi_{4,i}) d\tilde{x}_{wD},$$

$$\psi_{3,i} = \pi(2n-1) \frac{z_{wD,j} - [(i-j)L_{DN} \sin \beta - \tilde{x}_{wD}]/\operatorname{tg} \beta'}{2h_D}, \quad \psi_{4,i} = \pi(2n-1) \frac{z_{wD,i}}{2h_D};$$

— граница с постоянным давлением на кровле и непроницаемая граница на подошве:

$$\tilde{F}_{i,j} = \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_{DN}} \int_{(n_{ij}-1/2)L_{DN} \sin \beta}^{(n_{ij}+1/2)L_{DN} \sin \beta} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \cos(\psi_{3,i}) \cos(\psi_{4,i}) d\tilde{x}_{wD}.$$

Интегралы в формулах для функции линейного источника рассчитываются численно методом трапеций.

**6. Общий вид системы уравнений.** Система уравнений (8), (9) записывается в матричной форме

$$AX = B, \quad (17)$$

где  $X$  — вектор-столбец неизвестных переменных:

$$X = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{wD} \\ \tilde{q}_{D,1} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{D,N} \end{pmatrix},$$

$\tilde{p}_{wD}$  — давление в стволе скважины;  $\tilde{q}_{D,1}, \tilde{q}_{D,2}, \dots, \tilde{q}_{D,N}$  — образы безразмерных дебитов  $N$  сегментов скважины.

Матрица системы и вектор-столбец в правой части (17) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \tilde{F}_{1,1} & \cdots & \tilde{F}_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \tilde{F}_{N,1} & \cdots & \tilde{F}_{N,N} \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/s \end{pmatrix}.$$

Решение системы (17) позволяет найти изображение забойного давления в ННС в отсутствие сопротивления течению в трубе. Последующее вычисление безразмерного забойного давления  $p_{wD}$  осуществляется численно методом обратного преобразования Степфеста [11]. Таким образом, забойное давление определяется по формуле, учитывающей работу скважины с переменным дебитом:

$$p_w(t) = p_i - \frac{\mu B}{2\pi kh} \sum_{j=1}^M (q_j - q_{j-1}) p_{wD}(t_D - t_{D,j}).$$

Здесь  $B$  — объемный коэффициент;  $M$  — количество замеров дебита.

**7. Приближенное решение.** Реализованный в программном комплексе “РН-ВЕГА” приближенный односегментный метод расчета забойного давления в ННС основан на идее, описанной в [4]. Эта идея заключается в том, что скважина не сегментируется, а представляется в виде одного линейного источника с равномерным притоком. При этом забойное давление рассчитывается в точке эквивалентного давления, подобранной таким образом, чтобы решение для давления в линейном источнике с равномерным притоком наиболее точно аппроксимировало решение для давления в стволе скважины без сопротивления.

Впервые координаты точки эквивалентного давления для полностью перфорированной ННС были получены в работе [5]. В [1] приведены формулы для определения координат точки эквивалентного давления, но не пояснен способ их получения. Корреляционная зависимость положения точки эквивалентного давления была представлена в [7]. В работе [4] координаты точки эквивалентного давления модифицированы для частично перфорированных ННС (рис. 3):

$$x_D = \pm x_{eq} \frac{L_D}{2} \sin \beta, \quad y_D = r_{wD}, \quad z_D = z_{wD}^* \mp x_{eq} \frac{L_D}{2} \cos \beta.$$

Здесь  $x_{eq} = 0,6$  — расстояние от центра скважины до точки эквивалентного давления, выраженное волях  $L_D/2$ .

Тестирование решения, полученного в [4], подтвердило его вычислительную эффективность. При этом точность решения уменьшается при смещении центра участка перфорации вдоль оси  $z$  и изменении угла  $\beta$ . Погрешности решения с использованием алгоритма

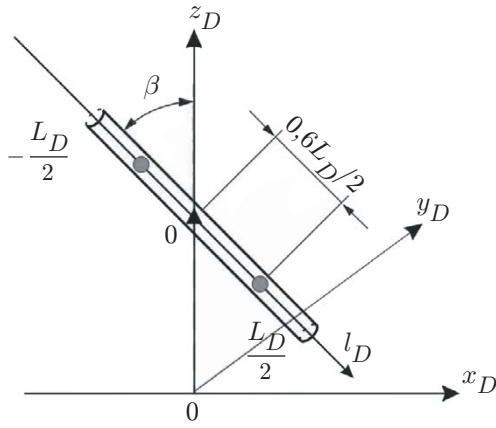


Рис. 3. Положение точек эквивалентного давления [4] при симметричном расположении вскрытого участка относительно середины пласта  $z_{wD}^* = h_D/2$  и одинаковых условиях на кровле и подошве

из [4] обусловлены тем, что положение точки эквивалентного давления получено для частного случая непроницаемых границ на кровле и подошве. Эта точка определяется одним параметром, равным 0,6, т. е. не зависит от ориентации скважины в пространстве и положения участка перфорации.

Исследования, выполненные авторами данной работы, показали, что параметр  $x_{eq}$  зависит от положения центра перфорированного участка скважины  $z_{wD}^*$  и угла наклона  $\beta$  этого участка.

Для того чтобы определить адекватное расстояние от центра скважины до точки эквивалентного давления, представим решение для линейного источника с равномерным притоком (15) в следующем виде:

$$\tilde{F} = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= \frac{\operatorname{cosec} \beta}{L_D} \left( \int_0^{(L_D/2) \sin \beta + x_D} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s}) d\tilde{x}_{wD} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{(L_D/2) \sin \beta - x_D} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s}) d\tilde{x}_{wD} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2 &= \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta + x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \cos(\psi_1) \cos(\psi_2) \right) d\tilde{x}_{wD} + \\ &\quad + \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta - x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \cos(\psi_3) \cos(\psi_2) \right) d\tilde{x}_{wD}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \pi n \frac{z_{wD}^* - (x_D - \tilde{x}_{wD}) / \operatorname{tg} \beta'}{h_D}, & \psi_2 &= \pi n \frac{z_{wD}^* - x_D / \operatorname{tg} \beta'}{h_D}, \\ \psi_3 &= \pi n \frac{z_{wD}^* - (x_D + \tilde{x}_{wD}) / \operatorname{tg} \beta'}{h_D}, & x_D &= x_{eq} \frac{L_D}{2} \sin \beta. \end{aligned}$$

При выводе (18) учтено, что  $x_{wD,j} = x_{wD}^* = 0$ ,  $\tilde{x}_{wD} = x_D - x_{wD}$  и  $y_D = r_{wD}$ .

Аналогично (18) получаются функции линейного источника для случаев со следующими типами границ на кровле и подошве:

— постоянное давление на кровле и подошве:

$$\tilde{F} = \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta + x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \sin(\psi_1) \sin(\psi_2) \right) d\tilde{x}_{wD} + \\ + \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta - x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \sin(\psi_3) \sin(\psi_2) \right) d\tilde{x}_{wD};$$

— непроницаемая граница на кровле и граница с постоянным давлением на подошве:

$$\tilde{F} = \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta + x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \sin(\psi_4) \sin(\psi_5) \right) d\tilde{x}_{wD} + \\ + \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta - x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \sin(\psi_6) \sin(\psi_5) \right) d\tilde{x}_{wD},$$

$$\psi_4 = \pi(2n-1) \frac{z_{wD}^* - (x_D - \tilde{x}_{wD})/\operatorname{tg} \beta'}{h_D}, \quad \psi_5 = \pi(2n-1) \frac{z_{wD}^* - x_D/\operatorname{tg} \beta'}{h_D}, \\ \psi_6 = \pi(2n-1) \frac{z_{wD}^* - (x_D + \tilde{x}_{wD})/\operatorname{tg} \beta'}{h_D};$$

— граница с постоянным давлением на кровле и непроницаемая граница на подошве:

$$\tilde{F} = \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta + x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \cos(\psi_4) \cos(\psi_5) \right) d\tilde{x}_{wD} + \\ + \frac{2 \operatorname{cosec} \beta}{L_D} \int_0^{(L_D/2) \sin \beta - x_D} \left( \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{\tilde{x}_{wD}^2 + r_{wD}^2} \sqrt{s_n}) \cos(\psi_6) \cos(\psi_5) \right) d\tilde{x}_{wD}.$$

При использовании односегментного подхода изображение забойного давления в ННС вычисляется как произведение дебита скважины и функции линейного источника:

$$\tilde{p}_{wD}(s) = \tilde{q}_D \tilde{F}(s, x_D, y_D, z_D) \quad (19)$$

( $\tilde{q}_D = 1/s$  — полный безразмерный дебит скважины в пространстве Лапласа).

Зависимость  $x_{eq}(\beta, z_{wD}^*)$  установлена методом наилучшего совмещения динамики забойного давления, рассчитанной с помощью аппроксимирующего решения (19), и соответствующей динамики забойного давления, определенной методом сегментации (17). При использовании многосегментного подхода скважина разбивается на 10 сегментов. Таким образом, система линейных алгебраических уравнений (17) содержит 11 уравнений, позволяющих определить 10 дебитов сегментов и забойное давление. Для решения системы уравнений (17) использован матричный метод.

В табл. 1 представлены результаты расчета забойного давления при добыче с дебитом из ННС при  $\beta = 25, 50, 75^\circ$ . Другие расчетные параметры имели следующие значения: толщина пласта — 10 м, пористость — 0,2, радиус скважины — 0,1 м, вязкость — 2 сП,

Таблица 1

Результаты расчета забойного давления  $p_w$  для ННС с использованием односегментного и многосегментного алгоритмов

$t_D$ , сут	$p_w$ , атм					
	Многосегментный алгоритм			Односегментный алгоритм		
	$\beta = 25^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\beta = 75^\circ$	$\beta = 25^\circ$	$\beta = 50^\circ$	$\beta = 75^\circ$
0,001	319,9	320,1	320,1	319,8	320,0	320,0
0,004	293,8	295,6	296,4	293,8	295,6	296,3
0,040	269,8	272,9	274,6	269,9	273,1	274,8
0,400	251,6	254,8	256,5	251,7	255,0	256,7
1	244,5	247,7	249,5	244,6	247,9	249,6
2	239,2	242,4	244,1	239,3	242,6	244,3
3	236,0	239,3	241,0	236,2	239,5	241,2
4	233,8	237,1	238,8	234,0	237,3	239,0
5	232,1	235,4	237,1	232,3	235,5	237,3
6	230,7	234,0	235,7	230,9	234,1	235,9
7	229,5	232,8	234,5	229,7	233,0	234,7
8	228,5	231,8	233,5	228,6	231,9	233,7
9	227,6	230,9	232,6	227,7	231,0	232,7
10	226,8	230,0	231,8	226,9	230,2	231,9

сжимаемость —  $4,4 \cdot 10^{-5}$  атм $^{-1}$ , коэффициент влияния ствола скважины —  $10^{-3}$  м $^3$ /атм, длина вскрытого участка пласта — 10 м, расстояние от центра вскрытого участка до подошвы пласта — 5 м, начальное пластовое давление — 350 атм, проницаемость — 12 мД. Кровля и подошва полагались непроницаемыми.

Относительное отклонение приближенного решения, полученного с использованием односегментного алгоритма, от более точного решения, полученного с помощью многосегментного алгоритма, не превышает 0,2 %. Кроме того, вычислительные эксперименты показали, что использование односегментного алгоритма позволяет значительно (в 100 раз) уменьшить время решения прямой задачи.

Совмещение кривых забойного давления осуществлялось путем варьирования значения параметра  $x_{eq}$ . В результате решения оптимизационных задач получена зависимость положения точки эквивалентного давления от угла наклона  $\beta$  при различных значениях координаты  $z_{wD}^*$  середины ННС (рис. 4).

В случае непроницаемых границ на кровле и подошве задача определения зависимости  $x_{eq}(\beta, z_{wD}^*)$  симметрична относительно середины пласта, поэтому искомая зависимость исследовалась только в диапазоне  $z_{wD}^* \in [0,5h_D; h_D]$ . Для интервала  $z_{wD}^* \in [0; 0,5h_D]$  зависимость может быть установлена путем зеркального отображения рассматриваемой зависимости относительно середины пласта. Выбор максимального значения  $z_{wD}^* = 0,625$  для представленных на рис. 4 кривых обусловлен тем, что кривые, рассчитанные при  $z_{wD}^* > 0,625$ , совпадают с кривой  $z_{wD}^* = 0,625$ .

Эмпирически установлено, что поведение кривых на рис. 4 достаточно точно описывается уравнением

$$x_{eq} = 0,682 - a e^{-\beta/b} \sin \left( \frac{\beta}{bc} + d \right), \quad (20)$$

где  $a, b, c, d$  — неизвестные коэффициенты, зависящие от  $z_{wD}^*$ . Исключение составляет кривая 1 ( $z_{wD}^* = 0,5h_D$ ), которая имеет особенность при  $\beta < 5^\circ$ , поэтому рассматривается отдельно и в расчетах аппроксимируется кусочно-постоянной функцией.

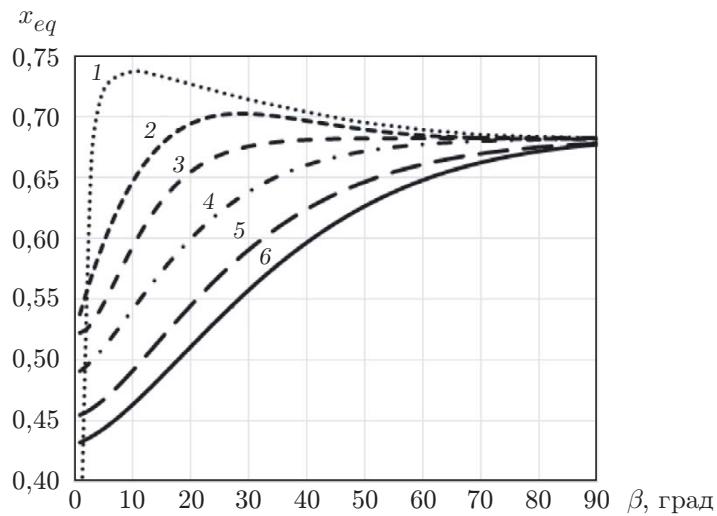


Рис. 4. Зависимость положения точки эквивалентного давления от угла наклона  $\beta$  при различных значениях координаты  $z_{wD}^*$  середины перфорированного участка НС:

1 —  $z_{wD}^* = 0,5h_D$ , 2 —  $z_{wD}^* = 0,505h_D$ , 3 —  $z_{wD}^* = 0,515h_D$ , 4 —  $z_{wD}^* = 0,530h_D$ , 5 —  $z_{wD}^* = 0,570h_D$ , 6 —  $z_{wD}^* = 0,625h_D$

Таблица 2  
Значения коэффициентов эмпирического уравнения (20)

$z_{wD}^*$	$a$	$b$	$c$	$d$
0,505	0,203	0,266	1,153	2,223
0,515	0,632	0,114	3,350	0,253
0,530	1,574	0,197	9,290	0,123
0,570	1,863	0,273	8,795	0,123
0,625	0,466	0,413	1,840	0,571

Неизвестные параметры уравнения (20) для остальных кривых также найдены путем решения оптимизационной задачи. В результате получены значения, представленные в табл. 2. Заметим, что зависимости вида (20) были получены также для случаев, когда НС вскрывает пласт с другими типами границ на кровле и подошве.

Полученные решения предоставляют широкие возможности при интерпретации результатов гидродинамических исследований наклонно направленных скважин, в том числе несовершенных, поскольку позволяют достаточно точно описать поведение забойного давления.

**8. Обсуждение результатов.** Результаты исследования динамики давления при различных длине и положении внутри пласта участка перфорации наклонно направленной скважины позволяют выявить основные закономерности формирования забойного давления.

На рис. 5–7 приведены результаты расчетов давления с использованием односегментного и многосегментного алгоритмов при отборе жидкости из НС в течение 10 сут с дебитом 50 м<sup>3</sup>/сут. Расчеты проведены при указанных выше значениях параметров, за исключением случаев, оговоренных особо.

На рис. 5 приведена зависимость давления на забое скважины от угла наклона перфорированного участка к оси  $z$ . Видно, что с течением времени депрессия увеличивается.

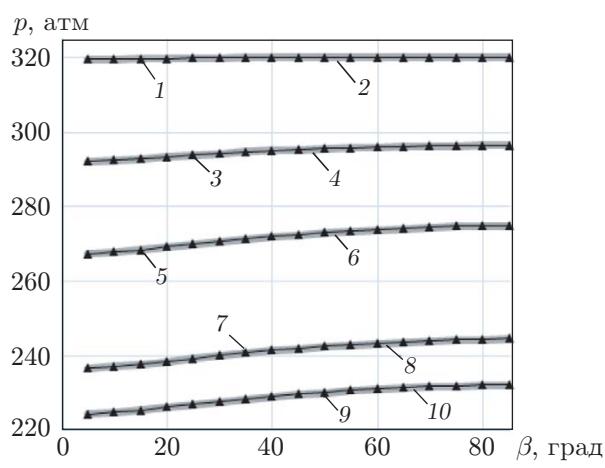


Рис. 5

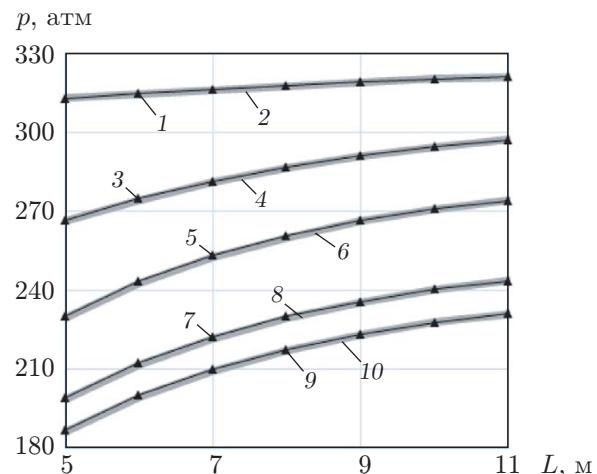


Рис. 6

Рис. 5. Расчетные зависимости давления от угла  $\beta$  между участком перфорации и нормалью к плоскости залегания пласта, полученные с использованием односегментного (1, 3, 5, 7, 9) и многосегментного (2, 4, 6, 8, 10) алгоритмов: 1, 2 —  $t = 0,001$  сут, 3, 4 —  $t = 0,004$  сут, 5, 6 —  $t = 0,04$  сут, 7, 8 —  $t = 2$  сут, 9, 10 —  $t = 10$  сут

Рис. 6. Расчетные зависимости давления от длины участка перфорации, полученные с использованием односегментного (1, 3, 5, 7, 9) и многосегментного (2, 4, 6, 8, 10) алгоритмов:

1, 2 —  $t = 0,001$  сут, 3, 4 —  $t = 0,004$  сут, 5, 6 —  $t = 0,04$  сут, 7, 8 —  $t = 2$  сут, 9, 10 —  $t = 10$  сут

Изменение угла  $\beta$  с 5 до  $85^\circ$  приводит к уменьшению депрессии на 6,3 % через 10 сут. Из рис. 5 следует, что результаты моделирования поведения давления в ННС с использованием односегментного и многосегментного алгоритмов достаточно близки.

На рис. 6 показана зависимость давления от длины вскрытого участка  $L$ . В расчетах принято, что угол  $\beta = 30^\circ$ , а середина вскрытого участка равноудалена от кровли и подошвы. Из рис. 6 следует, что с уменьшением длины вскрытого участка и с течением времени депрессия увеличивается. Сравнение результатов расчетов, выполненных с использованием односегментного и многосегментного подходов, показывает, что они хорошо согласуются.

Относительное различие результатов расчетов, полученных с использованием односегментного и многосегментного подходов (см. рис. 5, 6), не превышает 0,2 %.

На рис. 7 приведена зависимость забойного давления от расстояния от центра участка перфорации до подошвы пласта при  $\beta = 30^\circ$ ,  $L = 4$  м. Расчеты показывают, что наименьшая депрессия соответствует расположению участка перфорации в центре пласта, по мере удаления участка перфорации по направлению к непроницаемым кровле или подошве она увеличивается.

Относительное различие результатов расчетов, полученных с использованием односегментного и многосегментного подходов (см. рис. 7), не превышает 2,1 %.

Решения, полученные в безразмерном виде с использованием односегментного подхода, а также решения в безразмерном виде, полученные в работах [1, 5], приведены на рис. 8.

Из рис. 8 следует, что результаты расчетов с использованием разработанной теории удовлетворительно согласуются с известными данными.

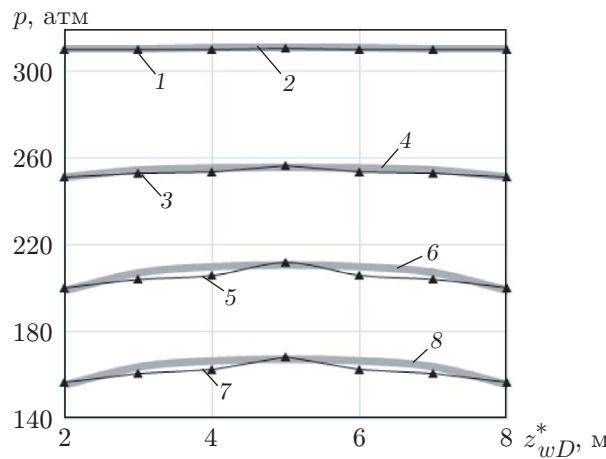


Рис. 7. Расчетные зависимости давления от расстояния от центра участка перфорации до подошвы пласта  $z_{wD}^*$ , полученные с использованием односегментного (1, 3, 5, 7) и многосегментного (2, 4, 6, 8) алгоритмов:

1, 2 —  $t = 0,001$  сут, 3, 4 —  $t = 0,004$  сут, 5, 6 —  $t = 0,04$  сут, 7, 8 —  $t = 10$  сут

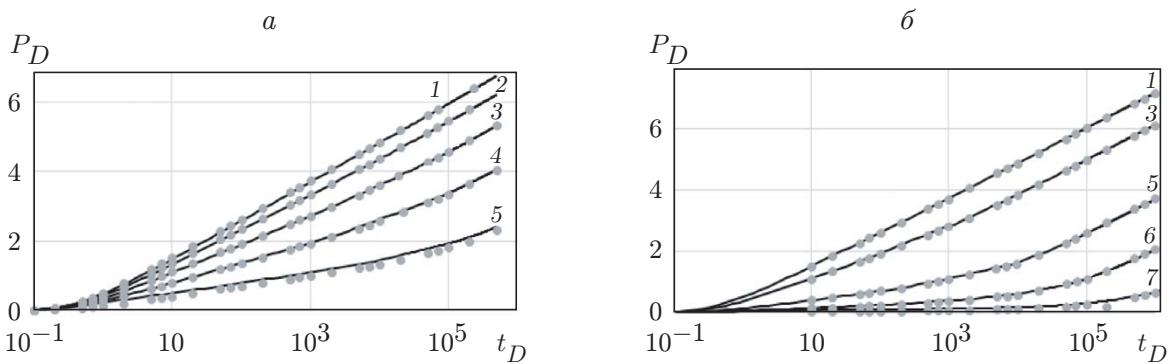


Рис. 8. Решения, полученные в безразмерном виде с использованием программного комплекса “РН-ВЕГА” (линии), и данные работ [5] (а) и [1] (б) (точки) при различных углах отклонения ННС от вертикали:

1 —  $\beta = 15^\circ$ , 2 —  $\beta = 30^\circ$ , 3 —  $\beta = 45^\circ$ , 4 —  $\beta = 60^\circ$ , 5 —  $\beta = 75^\circ$ , 6 —  $\beta = 85^\circ$ , 7 —  $\beta = 89^\circ$

**Заключение.** Найдены аналитико-численные решения задач о нестационарной фильтрации к скважине с наклонно направленным профилем, учитывающие степень вскрытия продуктивного участка и тип верхней и нижней границ пласта.

В результате определения зависимости положения точки эквивалентного давления от угла наклона скважины и от положения центра перфорированного участка ННС уточнено аппроксимирующее решение.

Полученное решение предоставляет новые возможности при интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин, поскольку позволяет достаточно точно описать поведение забойного давления.

Сопоставление результатов расчетов изменения давления в ННС, полученных с использованием односегментного и многосегментного алгоритмов, показывает, что они хорошо согласуются между собой. В предельных случаях угла отклонения участка перфорации от вертикали  $\beta = 0^\circ$  и  $\beta = 90^\circ$  эти результаты хорошо согласуются с результатами расчетов по моделям для вертикальной и горизонтальной скважин соответственно [12].

Установлено, что уменьшение угла между перфорированным участком ствола скважины и нормалью к плоскости залегания пласта приводит к росту депрессии. Увеличение длины участка перфорации обусловливает снижение депрессии.

Расположение участка перфорации в центре пласта соответствует наименьшей депрессии, которая увеличивается по мере удаления участка перфорации по направлению к непроницаемой кровле или подошве.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ozkan E., Raghavan R. A computationally efficient, transient-pressure solution for slanted wells // SPE Reservoir Evaluat. Engng. 2000. V. 3. P. 414–425. DOI: 10.2118/66206-PA.
2. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems. Pt 1. Analytical considerations // SPE Format. Evaluat. 1991. V. 6. P. 359–368. DOI: 10.2118/18615-PA.
3. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems. Pt 2. Computational considerations and applications // SPE Format. Evaluat. 1991. V. 6. P. 369–378. DOI: 10.2118/18616-PA.
4. Wang H., Zhang L., Guo J., et al. An efficient algorithm to compute transient pressure responses of slanted wells with arbitrary inclination in reservoirs // Petroleum Sci. 2012. V. 9. P. 212–222. DOI: 10.1007/s12182-012-0201-1.
5. Cinco H., Miller F. G., Ramey H. J. (Jr.) Unsteady-state pressure distribution created by a directionally drilled well // J. Petroleum Technol. 1975. V. 27, N 11. P. 1392–1400. DOI: 10.2118/5131-PA.
6. Евченко В. С. Разработка нефтяных месторождений наклонно направленными скважинами / В. С. Евченко, Н. П. Захарченко, Я. М. Каган и др. М.: Недра, 1986.
7. Abbaszadeh M., Hegeman P. S. Pressure-transient analysis for a slanted well in a reservoir with vertical pressure support // SPE Format. Evaluat. 1990. V. 5. P. 277–284.
8. Cinco H. L., Samaniego F. V., Dominguez N. A. Transient pressure behavior for a well with finite-conductivity vertical fracture // Soc. Petroleum Engrs J. 1978. V. 18. P. 253–264. DOI: 10.2118/6014-PA.
9. Гладков С. О., Табакова И. Г. О некоторых типах кинетических уравнений, сводящихся к уравнениям в частных производных // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 12–16.
10. Хабибуллин И. Л., Хисамов А. А. Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 4. С. 116–125.
11. Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5] // Comm. ACM. 1970. V. 13, N 1. P. 47–49. DOI: 10.1145/361953.361969.
12. Уразов Р. Р., Ахметова О. В., Галлямитдинов И. И. и др. Высокоскоростной метод расчета притока к наклонно направленной скважине в ПК “РН-ВЕГА” // Нефт. хоз-во. 2023. № 11. С. 37–42. DOI: 10.24887/0028-2448-2023-11-37-42.
13. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2023612604 RU. Программный комплекс “РН-ВЕГА” / Р. Р. Уразов, О. В. Ахметова, Э. И. Бабичев, С. В. Бухмастова, Ю. Р. Валеева, И. И. Галлямитдинов, А. Я. Давлетбаев, И. И. Закирьянов, И. А. Зарапутдинов, В. А. Зиганшин, Ш. Х. Ишкина, Т. А. Ишмуратов, П. Н. Козырев, А. Ф. Кунафин, Р. Р. Мардамшин, М. А. Никонов, А. Х. Нуриев, А. В. Пестриков, Э. И. Сагдеев, В. В. Сарапулова, Э. Э. Сахибгареев, А. И. Синицкий, И. А. Сорокин, В. В. Спеле, А. С. Чиглинцева, И. Р. Ямалов; правообладатель ПАО «НК «Роснефть». № 2023612604; Заявл. 25.01.2023; Опубл. 06.02.2023.
14. Ozkan E. Performance of horizontal wells: PhD diss. Tulsa: Tulsa Univ., 1988.

Поступила в редакцию 11/І 2024 г.,  
после доработки — 15/ІІ 2024 г.  
Принята к публикации 26/ІІ 2024 г.