

34. Steiger W.R., Matsushita S. Photographs of the high-altitude nuclear explosion 'Teak' // J. Geophys. Res. — 1960. — V. 65, N 2.
35. Reynolds D.A. Fireball observation via satellite // Proc. of the Near-Earth-Object Interception Workshop. — Los Alamos, 1993.
36. Jacobs C., Spalding R. Fireball observation by satellitebased Earth-monitoring optical sensors // Int. Conf. on Hazards due to Comets and Asteroids, Tucson, Arizona, 1993.

117979, г. Москва, ИДГ РАН

Поступила в редакцию 27/IX 1993

УДК 629.198.6, 629.198.62, 629.198.624, 629.19

А.В. Федоров, В.М. Фомин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПОПУЛЯЦИИ ИСКУССТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Безопасность функционирования космических аппаратов (КА) определяется двумя группами факторов: обусловленные внутренними процессами и связанные с внешними воздействиями. Интерес к последним существовал уже на ранних этапах развития космонавтики (например, исследования по противометеоритной защите). Изучалась возможность столкновений КА с мелкими частицами естественного происхождения, механизмы этих взаимодействий, последствия гиперзвуковых соударений. Наблюдениями [1, 2] установлено, что на данном этапе космической деятельности количество мелких частиц естественного происхождения много меньше, чем искусственного. Поэтому ниже рассматриваются проблемы эволюции популяции КА в околоземном пространстве.

Остановимся кратко на составе такой популяции. К составляющим данную совокупность объектам относятся:

- искусственные спутники Земли (ИСЗ),
- верхние ступени ракет-носителей,
- фрагменты этих аппаратов, полученные вследствие катастрофических и запланированных взрывов, столкновений,
- мелкие частицы несгоревшего топлива,
- частицы теплозащитных покрытий, красок и т.д.

Из приведенного перечня следует, что размеры искусственных космических объектов в ближнем космосе изменяются в широких пределах: от долей микрометров до десятков метров.

К настоящему времени считается установленным, что на орбитах имеется около 7000 индивидуализированных объектов размером более 0,1 м, от 30 до 70 тысяч — более 0,0001 м, которые являются обломками крупных, подвергнутых действию взрывов и столкновений [1—3]. Вследствие увеличения размера популяции (количества объектов ее составляющих), достигаемого за счет роста числа запусков, изменяется обстановка в пространстве. В частности, уменьшается расстояние между объектами, увеличивается частота столкновений.

В результате возможно катастрофическое нарастание размера популяции, образование искусственного кольца обломков высокой числовой плотности, движущихся вокруг Земли и препятствующих безопасности космических полетов.

В этой связи встает задача предсказания времени задержки образования волны дробления объектов популяции космического мусора, т.е. времени, в течение которого катастрофически нарастает размерность популяции, на основе выявления микро- и макромеханизмов явления.

Вторая задача — определение понятия и выяснение основных особенностей распространения волны катастрофического разрушения составляющих популяции. Движением этой волны назовем процесс самоподдерживающегося

© А.В. Федоров, В.М. Фомин, 1994.

ся распространения области дробления в популяции, который приводит к недопустимо высокой ее размерности с неприемлемым риском столкновения между объектами вновь образованной совокупности и запускаемыми космическими аппаратами [2, 3].

Математическое описание околоземной популяции с учетом катастрофических столкновений

1. Основное уравнение столкновительной модели

Рассмотрим околоземное пространство, в котором проводится активная человеческая деятельность — запуск КА. Пусть N — общее число объектов, находящихся в некотором высотном поясе (шаровой слой, нижняя поверхность которого находится на высоте h от поверхности Земли, верхняя на высоте $H > h$). Скорость, с которой изменяется количество этих объектов, складывается из следующих источников и стоков:

$$\frac{dN}{dt} = q_1 + q_2 + q_3, \quad (1)$$

где

$$q_1 = a_1 \exp(-N_1/N)/\tau_1$$

— источник числа объектов, обусловленный соударениями между составляющими популяций*,

$$q_i = (-1)^i a_i (N - N_i)/\tau_i, \quad i = 2, 3,$$

$i = 2$ — источник, соответствующий запуску космических аппаратов;
 $i = 3$ — сток, возникающий за счет гибели объектов популяции за счет аэродинамического торможения в достаточно плотных слоях атмосферы и других причин;

$$\tau_i, \quad i = 1, 2, 3 —$$

время релаксации соответствующих процессов;

$$a_i, \quad N_i, \quad i = 1, 2, 3 —$$

некоторые заданные функции числа объектов N . При этом N_1 характеризует уровень популяции, начиная с которого наступает катастрофическое дробление, N_2, N_3 — предельные значения размерности популяции, определяющие конечные равновесные состояния (возможно неединственные) при условии отсутствия перекрестных эффектов.

2. Бесстолкновительная модель околоземной популяции космических аппаратов

Допустим, что размерность популяции достаточно мала, так что столкновениями КА можно пренебречь. Математическим выражением этого факта служит равенство $a_1 = 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{dN}{dt} = -a(N - \tilde{N})/\tau, \quad (2)$$

* Принято, что функция $q_1(N)$ по аналогии с задачами математической теории биологических систем [4], обладает естественными свойствами функционального отклика популяции одного сообщества на плотность популяции другого.

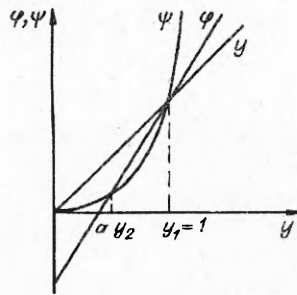


Рис. 1.

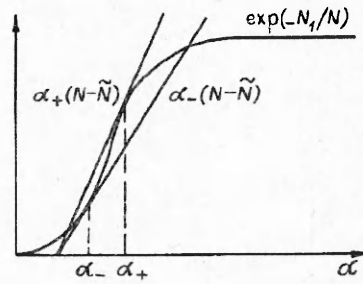


Рис. 2.

где

$$a/\tau = \frac{a_2}{\tau_2} - \frac{a_3}{\tau_3},$$

$$\tilde{N} = \tau(a_2 N_2 / \tau_2 - a_3 N_3 / \tau_3) / a -$$

некоторые средние величины, характеризующие время релаксации и предельный размер популяции, не испытывающей катастрофических столкновений.

Если величины a/τ , $\tilde{N}$ положительны, то количество запускаемых объектов превышает число объектов, выпадающих за счет аэродинамического торможения. Тем самым популяция КА возрастает со временем и насыщается на предельном значении N , если все τ_i , a_i , N_i суть константы для $i = 1, 2, 3$.

Для (2) естественным условием Коши является

$$N(0) = 0, \quad (3)$$

что позволяет определить решение (2) в виде

$$N = \tilde{N}(1 - \exp(-at/\tau)). \quad (4)$$

Определим величины τ , a , $\tilde{N}$. Для этого воспользуемся следующими соображениями. По данным [1] к 1989 году общее количество объектов популяции космических аппаратов в околоземном пространстве равнялось примерно $N_* = 35000$. Кроме того, там же высказано соображение, что некоторая базовая популяция (критическая для возникновения реакции столкновений), превышающая в два-три раза существующую, может быть достигнута в течение последующих 20—50 лет. Авторы [1] при этом считали, что темпы человеческой деятельности — темпы роста популяции — сохранятся на прежнем уровне.

Выберем в качестве времени t_* в течение которого достигается данное значение N_* , величину $t_* = 1989 - 1957 \approx 30$ лет. В качестве времени, близкого к времени насыщения популяции, примем $t_{**} = nt_*$, а $N(t_{**}) = mN_*$.

Для определения τ , $\tilde{N}$ составим уравнения

$$N_* = \tilde{N}(1 - \exp(-t_*/\tau)),$$

$$mN_* = \tilde{N}(1 - \exp(-ht_*/\tau)). \quad (5)$$

Здесь $m \in (m_1, m_2)$, $n \in (n_1, n_2)$, $n > m$. Следствием (5) является уравнение

$$\psi(y) = y^n = \varphi(y) = my - (m - 1),$$

где $y = \exp(-t_*/\tau) < 1$, $1 > a = (m - 1)/m$. Поведение функций ψ , φ , изображенное на рис. 1, указывает на наличие двух корней $y = y_1 = 1$,

$y = y_2 \in (a, 1)$. После определения $y_2 \in (a, 1)$ найдем

$$\begin{aligned} -t_*/\tau &= \ln(y_2) < 0, \\ \tau &= -t_*/\ln(y_2), \\ \tilde{N} &= N_*/(1 - y_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tau, \tilde{N}$ положительны.

Таким образом, решение (4) с величинами $\tau, \tilde{N}$, определенными по (6), может описывать динамику популяции КА в околоземном пространстве в ближнем космосе в ближайшие 50—80 лет в предположении отсутствия дробления.

3. Описание околоземной популяции КА с учетом катастрофических столкновений

Допустим, что на фоне человеческой деятельности в околоземном пространстве, описываемой предложенной выше математической моделью, развивается процесс столкновений между объектами популяции. В этом случае, считая $a = N^*$, $\tau, \tilde{N}$, определенными по (6), запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{dN}{dt} = N^k \exp(-N_1/N) / \tau_1 N_2^{k-1} - (N - \tilde{N})/\tau. \quad (7)$$

Качественное поведение решения этого уравнения при $k = 0$ хорошо известно (см., например, теорию теплового взрыва Н.Н. Семенова) и может быть проиллюстрировано путем исследования стационарных точек (7). Таких точек может быть одна, две, три, как это изображено на рис. 2 в виде их зависимости $N_0(\alpha)$ от бифуркационного параметра $\alpha = \tau_1/\tau$.

Точки пересечения прямой с экспонентой на рис. 2 и дают стационарные состояния для (7). Как видно из рис. 2, при изменении параметра α значения $N_0(\alpha)$ имеют следующий вид (рис. 3). У неоднозначной функции $N_0(\alpha)$ имеются две точки разворота при $\alpha = \alpha_-, \alpha_+$, которые можно определить из условия касания соответствующих кривых в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{-,+} &= \exp(-N_1/N_{-,+}) / (N_{-,+} - \tilde{N}), \\ N_{-,+} &= (N_1 \mp (N_1^2 - 4\tilde{N}N_1)^{0.5})/2. \end{aligned} \quad (8)$$

Величины, определенные по (8), задают на зависимости $N_0(\alpha)$ три ветви: нижнюю (1), среднюю (2), верхнюю (3). Будем интересоваться решениями задачи Коши для (7) с начальными данными $N(0) = N_0$ нескольких типов. Результаты соответствующего анализа можно свести в

Утверждение. Если

$$\alpha \in (0, \alpha_-), \quad N_0 \leq N_0(\alpha)3,$$

$$\alpha \in (\alpha_-, \infty), \quad N_0 \leq N_0(\alpha)1,$$

то решение задачи Коши стабилизируется при значениях N , принадлежащих ветвям $N_0(\alpha)3, N_0(\alpha)1$ соответственно.

Если

$$\alpha \in (0, \alpha_+), \quad N_0 \geq N_0(\alpha)3,$$

$$\alpha \in (\alpha_+, \infty), \quad N_0 \geq N_0(\alpha)1,$$

то решение задачи Коши стабилизируется при значениях N , принадлежащих ветвям $N_0(\alpha)3, N_0(\alpha)1$ соответственно.

Если

$$\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+), \quad N_0 \in (N_0(\alpha)2, N_0(\alpha)3),$$

$$\alpha \in (\alpha_+, \infty), \quad N_0 \in (N_0(\alpha)1, N_0(\alpha)2),$$

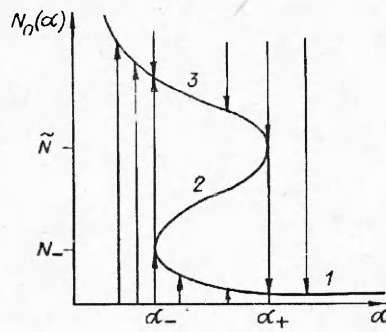


Рис. 3.

то решение задачи Коши стабилизируется при значениях, принадлежащих ветвям $N_0(\alpha)3$, $N_0(\alpha)1$ соответственно.

Утверждение легко доказывается путем анализа характерного масштаба времени уравнения (7) $t_0/\tau = -N_\infty^3 / (N_\infty - N_+)(N_\infty - N_-)$, где N_∞ принадлежит соответствующей ветви бифуркационной диаграммы.

На основании данного утверждения можно дать классификацию типов поведения популяции КА.

Первый вид динамики популяции имеет место при $\alpha \in (\alpha_+, \infty)$, $N_0 \leq N_0(\alpha)1$ и характеризует регулярное развитие популяции, которое дает приемлемое значение ее размерности в равновесном состоянии. Вторым определяется переходом к катастрофическому развитию численности популяции: $\alpha \in (0, \alpha_-)$, $N_0 \leq N_0(\alpha)3$. Третий возникает при $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ и может характеризовать процесс переключения популяции, находящейся в момент времени $t = -\infty$ на неустойчивой ветви $N_0(\alpha)2$, к одному из двух устойчивых состояний. В том случае, если за счет случайных флуктуаций при $t = -\infty$ число объектов равняется $N_0(\alpha)2 + 0$, то развитие приведет к устойчивому состоянию $N_0(\alpha)3$ с возможно неприемлемым уровнем популяции. Если же начальное значение популяции равно $N_0(\alpha)2 - 0$, то совокупность КА разовьется в низкоразмерную популяцию с приемлемым уровнем ее стационарного состояния. Четвертый тип поведения популяции имеет место для множества КА с высоким значением размерности $N_0 > N_0(\alpha)3$, $\alpha \in (\alpha_+, \infty)$ и определяет процесс внезапного очищения космоса.

Условием перехода популяции к катастрофическому дроблению является условие касания кривой рождения объектов за счет дробления и прямой гибели ($N \geq N$) за счет сгорания в верхних слоях атмосферы и других причин. В этой точке имеет место равенство q_1 и $q_2 + q_3$, т.е. равенство источников и стоков КА. Кроме того данная точка характеризуется равенством скоростей изменения источников и стоков популяции в зависимости от числа объектов. Два сформулированных условия и определяют сначала величину N_- , а затем и $\alpha_- = \alpha_-(N_-, N_1, N)$ (8), характеризующую для данной популяции предельные условия катастрофического дробления. При достижении в популяции величины $\alpha \leq \alpha_-$ происходит переход на верхнюю ветвь стационарного решения $N_0(\alpha)3$ (утверждение). Это является математическим выражением процесса дробления как невозможности существования равновесия между образованием новых объектов, возникающих от разрушения при столкновениях, и ухода КА с орбиты за счет трения в верхних слоях атмосферы и других причин.

Величина N_- — предельная размерность популяции в отсутствие дробления — может полагаться экспериментально наблюдаемой (см. формулы (6)). С ней оказывается тесно связанной другая характеристика динамики популяции t_{ind} (которую вообще говоря возможно наблюдать) — время задержки начала цепной реакции дробления КА или время индукции. Это время конечно, поскольку переход от заданной размерности N_0 к величине $N_0(\alpha)3$ всегда

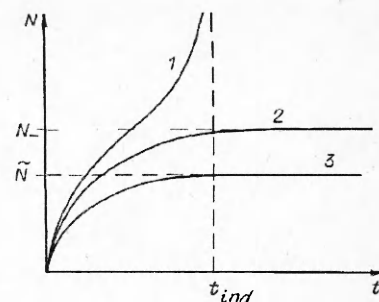
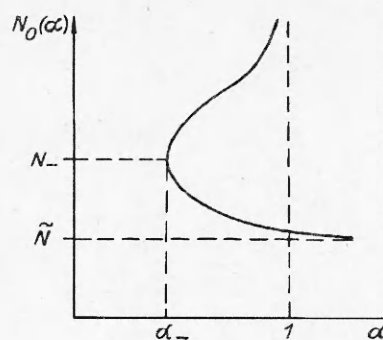


Рис. 4

Рис. 5.



должен быть связан с некоторым временем накопления достаточного числа КА, их осколков, процесса дробления. Иллюстрацией этого служит рис. 4, где кривая 1 соответствует описанию процесса катастрофического нарастания числа объектов популяции с временем индукции, в течение которого ее размерность растет до очень большого числа. Кривые 2, 3 описывают выход на приемлемое стационарное состояние.

Замечание. Управляющим параметром, как в случае катастрофического дробления, так и при внезапном самоочищении ближнего космоса, является параметр $\alpha = a(k)\tau + b(k)$. Его структурный вид, зависимость от физико-механических параметров системы, должен определяться механизмами движения КА по орбитам, гиперзвукового соударения и т.д.

Пусть $k \in [0, 1)$, тогда величины $N_{+,-}$ — определяются из уравнения

$$(1 - k)N^2 - N(N_1 - k\tilde{N}) + N_1\tilde{N} = 0.$$

Корни данного уравнения действительны и положительны при условии $(N_1 - kN)^2 \geq 4N_1\tilde{N}$. Полагая $k = 1 - \epsilon$, где $\epsilon \ll 1$, можно выписать их асимптотические значения:

$$N_{+,-} = \begin{cases} a/\epsilon + \dots, & a = N_1 - \tilde{N}, \\ N_1\tilde{N}(1 - (\tilde{N}/a)^2\epsilon)/a + \dots \end{cases}$$

Отсюда видно, что при $k \rightarrow 1$ величина $N_{+} \rightarrow \infty$, $N_{-} \rightarrow N_1\tilde{N}/a$ — конечное число. Ветвь нулевой изоклины $N_0(\alpha)$ при этом уходит далеко вверх, и в предельном случае ($k = 1$) бифуркационная диаграмма переходит в изображенную на рис. 5 с предельным значением $\alpha = \alpha_- = \exp(-N_1/N_-) \cdot N_-/(N_- - \tilde{N})$, $N_- = N_1\tilde{N}/a$, $\alpha = \alpha_{+} = 1$. Таким образом, условием наступления катастрофического дробления при $k = 1$ служит выполнение неравенства

$$\tau_i/\tau \leq \alpha_-.$$

Обсуждение численных результатов

Рассмотрим популяцию КА в околоземном пространстве, которая получила свое развитие в момент $t = 0$ в результате запусков искусственных объектов. Вследствие возрастания количества объектов в космосе может произойти процесс дробления единичного КА, так что поведение их совокупности будет описываться уравнением (7) с начальным условием (3). Таким образом, задача определения числа объектов во времени свелась к решению задачи Коши (7), (3).

При проведении численных расчетов воспользуемся значениями $\tilde{N}$, τ , найденными выше, а также тем фактом (полученным в [1]), что постоянная базовая популяция уровня 1989 г. в результате развития с учетом соударений между составляющими за три тысячи лет разовьется в совокупность размерностью $(1,5 \pm 0,35) \cdot 10^5$ единиц. Отметим, что авторы этой работы считали размерность популяции 1989 г. постоянной.

На рис. 6 приведена зависимость числа объектов от времени. Ломаная линия — данные [1], гладкая — расчет по модели данной работы. Как видно, модель [1] дает немонотонное поведение числа объектов во времени. Здесь присутствуют как высокочастотные колебания (мелкая рябь), так и низкочастотные. Сглаживание высокочастотных колебаний приводит к ха-

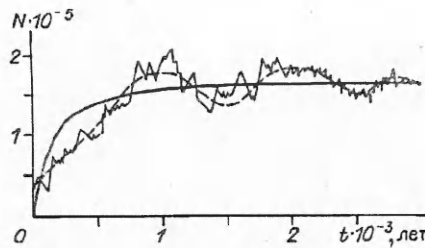


Рис. 6.

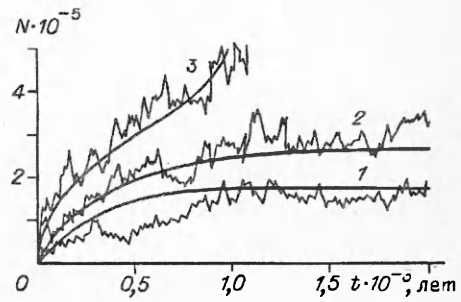


Рис. 7.

рактерному колебательному профилю (штриховая линия). Амплитуда низкочастотных колебаний с течением времени уменьшается, размерность популяции стремится к некоторому равновесному значению $N_{\infty} \approx 1,85 \cdot 10^5$. Подобное поведение, исключая наличие колебаний, характерно и для нашей расчетной кривой (сплошная линия). В этом случае популяция также стремится к N_{∞} . Предложенная модель описывает интегральные характеристики процесса N_{∞} , t_{st} , где t_{st} — время выхода на стационарный режим.

На рис. 7 приведены данные расчетов при различных темпах космической деятельности, кривые 1, 2, 3, соответствуют $\tau = 78, 46$ и $18,7$ лет, что соответствует увеличению базовой популяции (популяция, имеющаяся в наличии в 1989 году, $\tau = 78$) в 1,5 и 2,5 раза. Как видно, предложенная модель явления описывает не только регулярные режимы установления равновесной популяции (кривые 1, 2), но верно передает и переход к режиму катастрофического дробления (кривая 3). Время индукции дробления в нашей модели совпадает с данными [3] в пределах 5 %.

Расчетные данные были получены при $k = 1$, $\alpha = at + b$. При этом в популяции наблюдались следующие типы динамики: развитие, характеризующееся приемлемым уровнем равновесной популяции, катастрофическое развитие.

Последнее определяется в случае $k = 1$ обращением числа объектов в бесконечность за конечное время развития.

Приведем кривую $N_0(\alpha)$, схематически изображенную на рис. 5, в виде табл. 1.

Аналог утверждения для случая $k = 1$, устанавливаемый на основе анализа характерного масштаба времени в виде $t_0/\tau =$

Т а б л и ц а 1

Зависимость $N_0(\alpha)$ 1, 2 от параметра α

α	$10^{-5} \cdot N_0(\alpha)1$	α	$10^{-5} \cdot N_0(\alpha)2$
0,897	3,0	0,897 - ε	3,1
0,897 + ε	2,9	0,903	4,0
0,898	2,8	0,913	5,0
0,9	2,7	0,923	6,0
0,902	2,6	0,931	7,0
0,905	2,5	0,948	10
0,909	2,4	0,972	20
0,915	2,3	0,981	30
0,923	2,2	0,985	40
0,934	2,1	0,988	50
0,988	2,0	0,99	60
0,968	1,9	0,991	70
0,996	1,8	0,992	80
		0,999	1000

$= N_{\infty}/(N_1 - \tilde{N})(N_{\infty} - N_-)$, позволяет получить и третий режим динамики популяции КА. Данный тип существует для $N_0 \in (N_0(\alpha))$, $N_0(\alpha)2$, $\alpha \in (\alpha_-, 1)$ и представляет переход от большеразмерного стационарного состояния $N_0(\alpha)2$ к низкоразмерному $N_0(\alpha)1$. Поскольку $N_0(\alpha)1$ является приемлемым с точки зрения риска соударений, то переход от $N_0/10^5 = 7 - 0$ к $N_{\infty}/10^5 = 2,1$ может трактоваться как процесс самоочищения космоса при $\alpha = 0,9325$. Если $\alpha = 0,923$, то происходит переход от $N_0/10^5 = 6 - 0$ к $N_{\infty}/10^5 = 2,2$.

Начальные данные в популяции, лежащие выше кривой

Т а б л и ц а 2

Зависимость характерных параметров популяции $N_{\pm}$, $\bar{N}_{\pm}$ от показателя k

k	$\bar{N}_{+} \cdot 10^{-5}$	$N_{+} \cdot 10^{-5}$	$N_{-} \cdot 10^{-5}$	$\delta, (\%)$	α_{+}	α_{-}
0,95	8,66	11,8	4,22	—	0,845	0,84
0,96	12,0	14,7	3,80	18,3	0,865	0,854
0,97	17,2	19,6	3,54	12,2	0,889	0,865
0,98	27,2	29,5	3,36	7,8	0,916	0,876
0,99	56,8	59	3,21	2,0	0,950	0,886
0,999	587	590	3,11	0,2	0,992	0,896

$N_0(\alpha)2$, приводят к режиму катастрофического дробления. Более ярко режим внезапного очищения космоса от космического мусора проявляется для популяций, описываемых математической моделью с $k \in (0,1)$.

В табл. 2 ($\bar{N}_{+}$ — приближенное значение $N_{+}(k)$, δ — погрешность) приведены количественные данные, характеризующие популяцию, которая может демонстрировать упомянутый режим.

Так, например, по табл. 2 найдем, что при $k = 0,95$ и начальном состоянии популяции $N_0/10^5 > 8,66$ при $\alpha > 0,845$ в совокупности КА по истечению некоторого времени задержки произойдет внезапное очищение пространства.

Таким образом, для описания поведения популяции космических аппаратов и их обломков в работе предложена математическая модель. На ее основе определены три типа поведения совокупности данных объектов; регулярное развитие популяции, предельная размерность которой есть приемлемое с точки зрения риска столкновений число; катастрофическое нарастание численности множества орбитальных объектов; регулярное или катастрофическое развитие популяции к больше- или малоразмерному равновесному состоянию из неустойчивого равновесного состояния популяции.

Дано определение катастрофического засорения и внезапного очищения ближнего космоса и указаны количественные критерии их наступления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eicher P., Rex D. Debris chain reactions // AIAA Pap. — 1990. — N 1365. — 9 p.
2. Space debris // The report of the ESA Space Debris Working Group. — 1988. — P. 1—71.
3. Мозжорин Ю.А., Чекалин С.В., Гафаров А.А. // Энергия. — 1990. — № 8. — С. 25—29.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976.

630090, г. Новосибирск, ИТПМ РАН

Поступила в редакцию 2/IX 1993

УДК 539.89+637.226+678

А.М. Молодец, Е.Н. Еремченко

ОБОБЩЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ПОЛИМЕРНОЙ ПЬЕЗОПЛЕНКИ ОТ ДАВЛЕНИЯ УДАРНОГО СЖАТИЯ

Представлена модель электрического отклика полимерного электрета при одномерном ударно-волновом нагружении, учитывающая нелинейные эффекты при возникновении электрического отклика электрета во время ударного нагружения. На примере поливинилиденфторида показано, что модель дает качественное и количественное истолкование экспериментальных данных по электрическому отклику полимерного электрета до давлений одномерного ударно-волнового сжатия 60 ГПа.

Электретные пьезодатчики на основе поляризованных полимерных пленок (особенно поливинилиденфторида (ПВДФ) [1]) находят все более ши-

© А.М. Молодец, Е.Н. Еремченко, 1994.