

диске и росту интенсивности течения в нем. Во-вторых, при монотонном изменении параметра вдува наблюдается скачкообразная перестройка течения и явление гистерезиса.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе и Ф. С. Березовскую за полезные обсуждения.

Поступила 27 VIII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Kármán T. V. Über laminare und turbulente Reibung.— Z. angew. Math. und Mech., 1924, N 1.
2. Batchelor G. K. Note on a class of solutions of the Navier — Stokes equations.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1951 vol. 4, N 29.
3. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, vol. 49, N 2.
4. Lance G. N., Rogers M. H. The axially symmetric flow of a viscous fluid between two infinite rotating disks.— Proc. Roy. Soc., 1962, vol. A266, N 1324.
5. Mellor G. L., Chapple P. J., Stokes V. K. On the flow between a rotating and a stationary disk.— J. Fluid Mech., 1968, vol. 31, N 1.
6. Rasmussen H. High Reynolds number flow between two infinite rotating disks.— J. Austral. Math. Soc., 1971, vol. 12, N 4.
7. Nguyen N. D., Ribault J. P., Florent P. Multiple solutions for flow between coaxial disks.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 68, N 2.
8. Roberts S. M., Shipman J. S. Computation of the flow between a rotating and a stationary disk.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 73, N 1.
9. Дорфман Л. А. Течения вязкой жидкости между неподвижным и обдуваемым вращающимся дисками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.

УДК 532.526

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

А. А. Бобнев

(Новосибирск)

В современной технологии широко используются высокотемпературные струи газа (плазмы), при этом струйное течение часто оказывается ламинарным (см., например, [1]). Преобразование Дородницына, применяемое при исследовании неизоэтермических струй [2], пригодно для плоских течений при определенных ограничениях, накладываемых на теплофизические свойства газа, кроме того, затруднен переход от переменных Дородницына к физическим координатам. В данной работе в приближении пограничного слоя построено точное автомодельное решение для неизоэтермического осесимметричного течения в области, где температура на оси струи значительно выше температуры на бесконечности.

Задачу, описывающую истечение неизоэтермической струи из цилиндрического отверстия в приближении пограничного слоя, можно записать в безразмерном виде

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} = \rho \left(v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = 0, \quad \rho T = 1, \quad \frac{1}{r} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} = \text{Pr} \rho \left(v \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right);$$

$$(2) \quad v = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0;$$

$$(3) \quad T = \varepsilon, \quad w = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Здесь r, z — цилиндрические координаты (r, z — внутренние координаты в асимптотическом разложении по малому параметру Re^{-1}); $\text{Re} = \sqrt{\rho_m I_{1m} / 2\pi} / \mu_m$ — некоторый аналог числа Рейнольдса; $v \text{Re}^{-1}, w$ — продольная и поперечная составляющие скорости; $\text{Pr} = c_{pm} \mu_m / \lambda_m$ — число Прандтля; ε — значение температуры на бесконечности; обозначение остальных величин общепринятое. При безраз-

меривании считались заданными величины $\bar{T}_m, \rho_m, c_{pm}, \mu_m, \lambda_m$ (масштабные величины помечены индексом m), а также масштабы полного импульса I_{1m} и потока энтальпии I_{2m} , определяемые по формулам

$$I_{1m} = 2\pi\rho_m V_m^2 L_m^2 \int_0^\infty \rho w^2 r dr, \quad I_{2m} = 2\pi c_{pm} \rho_m T_m V_m L_m^2 \int_0^\infty \rho w (T - \varepsilon) r dr.$$

В качестве масштабов скорости V_m и длины L_m выбраны

$$V_m = c_{pm} T_m I_{1m} / I_{2m}, \quad L_m = I_{2m} / (c_{pm} T_m \sqrt{2\pi\rho_m I_{1m}}).$$

При записи уравнений (1) было принято, что удельные теплоемкость, теплопроводность, динамическая вязкость являются постоянными величинами. Для задачи (1) — (3) следовало бы поставить начальные условия при $z = z_0$, однако в рамках этой работы будет рассматриваться только автомодельное решение, поэтому для замыкания задачи (1) — (3) сформулируем условия сохранения импульса и потока энтальпии

$$(4) \quad \int_0^\infty \rho w^2 r dr = 1, \quad \int_0^\infty \rho w (T - \varepsilon) r dr = 1.$$

Задачу (1) — (4) будем рассматривать при $\varepsilon \rightarrow 0$. В нулевом приближении по ε задача (1) — (4) преобразуется к системе уравнений (1), граничным условиям (2) и

$$(5) \quad w = T = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty;$$

интегральные условия (4) при этом имеют вид

$$(6) \quad \int_0^\infty \rho w^2 r dr = 1, \quad \int_0^\infty w r dr = 1.$$

Автомодельное решение для задачи (1), (2), (5), (6) будем искать в виде

$$(7) \quad w(r, z) = z^{\alpha_w} u(x), \quad v(r, z) = z^{\alpha_v} f(x), \quad T(r, z) = z^{\alpha_T} \theta(x), \quad r = z^\alpha x,$$

где константы автомодельности α_w, \dots, α определяются из уравнений (1), интегральных условий (6) и равны

$$(8) \quad \alpha_w = \alpha_T = -1, \quad \alpha = 1/2, \quad \alpha_v = -3/2.$$

Подставив (7), (8) в задачу (1), (2), (5), (6), можно получить

$$(9) \quad (1/x)(xu')' = (1/\theta)[fu' - u(u + (1/2)xu')], \quad (1/x)(xf/\theta)' - (1/2)(u/\theta)' = 0, \quad (1/x)(x\theta')' = \text{Pr}(1/\theta)[f\theta' - u(\theta + (1/2)x\theta')];$$

$$(10) \quad f = u' = \theta' = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$(11) \quad \theta = u = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$(12) \quad \int_0^\infty \frac{u^2}{\theta} x dx = 1, \quad \int_0^\infty u x dx = 1.$$

Отметим, что решения задачи (9) — (11) инвариантны к преобразованию

$$(13) \quad x \rightarrow ax, \quad \theta \rightarrow b\theta, \quad u \rightarrow a^{-2}bu, \quad f \rightarrow a^{-1}bf,$$

где a, b — произвольные постоянные, т. е. краевую задачу (9) — (11) можно свести к задаче Коши, задав произвольным образом недостающие начальные условия при $x = 0$, например

$$(14) \quad \theta = u = 1 \text{ при } x = 0.$$

Затем, проинтегрировав систему (9) с начальными значениями (10), (14), следует узнать, удовлетворяет ли полученное решение задачи Коши граничным условиям на бесконечности (11). Если решение задачи Коши

удовлетворяет этим условиям, то оно и является нетривиальным решением задачи (9)—(11), которое можно с помощью инвариантных свойств (13) привести к виду, удовлетворяющему интегральным условиям (12). Системе уравнений (9) преобразуем к виду

$$(15) \quad (1/x)(xu')' = (1/\theta)(su'/\text{Pr} - u^2), \quad (1/x)(x\theta')' = \\ = \theta's/\theta - \text{Pr} u, \quad (1/x)(xs)' = \theta's/\theta - \text{Pr} u,$$

где

$$(16) \quad s = \text{Pr}(f - (1/2)xu).$$

Граничные условия (10), (11) теперь запишем в виде

$$(17) \quad \theta' = u' = s = 0 \text{ при } x = 0, \quad \theta = u = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Из задачи (16), (17) можно видеть, что уравнения и граничные условия для s и θ' совпадают, значит,

$$(18) \quad \theta' = s.$$

Решение для u будем искать в виде

$$(19) \quad u = \theta^\beta.$$

Подставив (19) в первые два уравнения системы (15) и имея в виду (18), получим

$$(20) \quad (1/x)(x\theta')' = (\theta'/\theta)(1/\text{Pr} - \beta + 1) - (1/\beta)\theta^\beta, \\ (1/x)(x\theta')' = \theta'^2/\theta - \text{Pr}\theta^\beta.$$

Два уравнения системы (20) будут непротиворечивы, если положить

$$(21) \quad \beta = 1/\text{Pr}.$$

Тогда с учетом (18), (19), (21) задача (15), (17) сведется к более простой, описываемой одним уравнением второго порядка

$$(22) \quad (1/x)(x\theta')' = \theta'^2/\theta - \text{Pr}\theta^{1/\text{Pr}}$$

с граничными условиями

$$(23) \quad \theta'|_{x=0} = 0, \quad \theta|_{x \rightarrow \infty} = 0.$$

Задача (22), (23) при $\text{Pr} = 1$ допускает весьма простое решение

$$(24) \quad \theta = A_0 x^A \exp(-x^2/4).$$

Предполагая, что на оси струи температура ограничена и отлична от нуля, положим $A = 0$, а постоянную A_0 определим из условий нормировки (12). Тогда, согласно (19), (21), из формулы (24) при $\text{Pr} = 1$ можно получить

$$(25) \quad u = \theta = (1/2) \exp(-x^2/4),$$

а радиальная скорость, как следует из выражений (16), (18), равна нулю

$$(26) \quad f = \theta' - (1/2)x\theta = 0.$$

Таким образом, при $\text{Pr} = 1$ во всей области течения высокотемпературной струи сохраняется величина u/θ или (см. выражения (7), (8)) $\rho w = 1$, т. е. увеличение температуры вызывает пропорциональное увеличение осевой скорости, при этом радиальная скорость (26) остается равной нулю.

При $\text{Pr} \neq 1$ решение задачи (22), (23) получить существенно сложнее. Укажем схему его построения. Пусть $\theta = g^{\text{Pr}/(1-\text{Pr})}$, тогда уравнение (22) преобразуется к виду

$$(27) \quad (1/x)(xg')' = g'^2/g - (1 - \text{Pr})g^2.$$

Уравнение (27) после введения новой функции $g = \exp(y)$ переписывается в виде

$$(28) \quad (1/x)(xy')' = -(1 - \text{Pr}) \exp(y).$$

Уравнение (28) есть частный вид уравнения Эмдена — Фаулера [3]. Схема решения его (вида (28)) такова. Введением новой функции $\eta(t)$ и аргумента t

$$(29) \quad \eta(t) = xy', \quad t = x^2 \exp(y)$$

из уравнения (28) можно получить

$$(30) \quad \eta^2 + 4\eta + 2(1 - \text{Pr})t + 4c = 0,$$

где c — некоторая постоянная, в дальнейшем определяемая коэффициентом при g^2 в уравнении (27). Воспользовавшись выражениями (29), с помощью (30), (28) получим уравнение Риккати $2x^2y'' - 2xy' - x^2y'^2 - 4c = 0$, которое преобразованием $y' = -2q'/q$ можно привести к уравнению Эйлера

$$(31) \quad x^2q'' - xq' + cq = 0.$$

Решение уравнения (31) очевидно: $q = C_1x^{1+\sqrt{1-c}} + C_2x^{1-\sqrt{1-c}}$. Если совершить обратный переход к функции θ , то можно получить

$$(32) \quad \theta = \left(C_1x^{1+\sqrt{(1-\text{Pr})/(8C_1C_2)}} + C_2x^{1-\sqrt{(1-\text{Pr})/(8C_1C_2)}} \right)^{-2\text{Pr}/(1-\text{Pr})}.$$

Полагая, что величина θ ограничена и не равна нулю при $x = 0$, в формуле (32) следует приравнять нулю показатель степени при x :

$$(33) \quad 1 - \sqrt{(1 - \text{Pr})/(8C_1C_2)} = 0.$$

Определив из формулы (33) C_1 и подставив в (32), получим

$$(34) \quad \theta = (C_2 + ((1 - \text{Pr})/8C_2)x^2)^{-2\text{Pr}/(\text{Pr}-1)}.$$

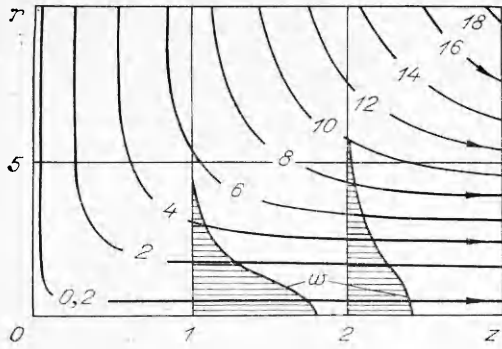
Из формулы (34) следует, что при $\text{Pr} > 1$ убывающих при $x \rightarrow \infty$ решений уравнения (22) не существует. Это можно пояснить следующими возможными причинами: 1) автомодельное решение (34) приемлемо в ограниченном интервале изменения переменной x (т. е. в задаче (1), (2), (5), (6) граничные условия $w = T = 0$ ставятся не при $r \rightarrow \infty$, а при ограниченной величине r , или, другими словами, толщина пограничного слоя конечна); 2) автомодельного решения задачи (1), (2), (5), (6) в виде (7), (8) не существует.

Воспользовавшись формулами (34), (19), (21), (18), (16), инвариантными свойствами (13), с помощью интегральных условий (12) получим решения для θ , u , f при $\text{Pr} < 1$ в виде

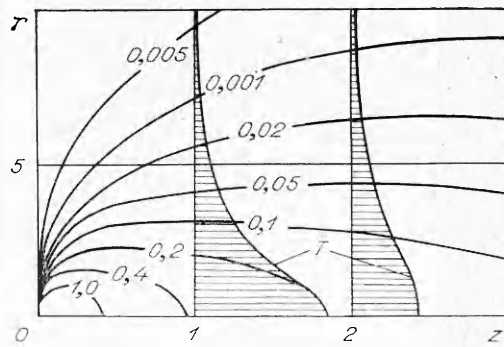
$$(35) \quad \begin{aligned} \theta &= \frac{1 + \text{Pr}}{4} \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} x^2 \right]^{-2\text{Pr}/(1 - \text{Pr})}, \\ u &= \frac{3 - \text{Pr}}{4} \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} x^2 \right]^{-2/(1 - \text{Pr})}, \\ f &= \frac{3 - \text{Pr}}{8} x \left\{ \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} x^2 \right]^{-2/(1 - \text{Pr})} - \right. \\ &\quad \left. - \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} x^2 \right]^{-\frac{1 + \text{Pr}}{1 - \text{Pr}}} \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (7), (8), перейдем к переменным r , z и функциям w , T , v с помощью выражений (35):

$$(36) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1 + \text{Pr}}{4} \frac{1}{z} \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} \frac{r^2}{z} \right]^{-2\text{Pr}/(1 - \text{Pr})}, \\ w &= \frac{3 - \text{Pr}}{4} \frac{1}{z} \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} \frac{r^2}{z} \right]^{-2/(1 - \text{Pr})}, \end{aligned}$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

$$v = \frac{3 - \text{Pr}}{8} \frac{r}{z^2} \left\{ \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} \frac{r^2}{z} \right]^{-2/(1 - \text{Pr})} - \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} \frac{r^2}{z} \right]^{-\frac{1 + \text{Pr}}{1 - \text{Pr}}} \right\}.$$

Введя функцию тока

$$(37) \quad \psi = \int_0^r r \omega dr$$

и используя формулы (36), получим

$$(38) \quad \psi = \frac{4}{1 - \text{Pr}} z \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} \frac{r^2}{z} \right]^{-1} \right\}.$$

При $\text{Pr} \rightarrow 1$ функция тока (37) не зависит от z :

$$(39) \quad \lim_{\text{Pr} \rightarrow 1} \psi = \lim_{\text{Pr} \rightarrow 1} \frac{4z}{1 - \text{Pr}} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})}{8(1 + \text{Pr})} \frac{r^2}{z} \right]^{-1} \right\} = \frac{r^2}{2}.$$

Устремив в формуле для ψ (38) r к бесконечности, получим

$$(40) \quad \psi|_{r \rightarrow \infty} = 4/(1 - \text{Pr}),$$

где $\psi|_{r \rightarrow \infty}$ можно интерпретировать как массу жидкости, протекающей в струе за единицу времени, или полный расход, определенный с точностью до множителя 2π . Из формулы (40) следует, что полный расход, как и в случае несжимаемой жидкости, увеличивается с удалением от сопла. При $\text{Pr} \rightarrow 1$ полный расход неограниченно возрастает, и формула (40) при $\text{Pr} = 1$ становится непригодной. Для этого случая, как следует из выражения (39), функция тока от z не зависит, а полный расход становится бесконечно большим.

На фиг. 1 изображены линии тока в ламинарной высокотемпературной круглой струе при $\text{Pr} = 1/2$, определенные формулой

$$(41) \quad r^2 = \frac{8(1 + \text{Pr})}{(3 - \text{Pr})(1 - \text{Pr})} z \left[\left(1 - \frac{1 - \text{Pr}}{4} \frac{\psi}{z} \right)^{-1} - 1 \right],$$

где Pr и ψ следует понимать как заданные постоянные. При $z \rightarrow \infty$, как следует из формулы (41), $r^2|_{r \rightarrow \infty} = (2(1 + \text{Pr})/(3 - \text{Pr}))\psi$, т. е. линии тока становятся параллельными оси z . При $z = z_p = ((1 - \text{Pr})/4)\psi$ функция $r^2 = r^2(z)$ имеет полюс, т. е. из бесконечности (по радиусу) вдоль поверхности $z = z_p$ вовлекается в движение и нагревается холодный газ. На фиг. 2 показаны изотермы в струе при $\text{Pr} = 1/2$, определяемые по первой из формул (36).

Поступила 26 VI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдразаков А., Жайнаков А., Жеенбаев Ж., Конавко Р. И., Энгельшт В. С. Изучение струи плазмы зондовым и теневыми методами. — В кн.: Применение плазмотрона в спектроскопии. (Материалы Всесоюз. симпоз.). Фрунзе: Илим, 1970.
2. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Т. 1. М.: Наука, 1971.

УДК 532.517.4

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОДНОТОЧЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СКОРОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. А. Сабельников

(Москва)

Предлагается и анализируется полуэмпирическое уравнение для одноточечного распределения вероятностей скорости в турбулентных потоках. Силы инерции в уравнении точно выражаются через распределение вероятностей. Остальные члены, связанные с силами давления и вязкости, не выражаются точно через искомое распределение вероятностей, и для их аппроксимации привлекаются полуэмпирические выражения. Основной производной возникает при аппроксимации члена с давлением. В работе она выбрана из условия совпадения соответствующих членов в уравнениях для вторых моментов, следующих из уравнения для распределения вероятностей и используемых в существующих полуэмпирических теориях.

Одним из основных свойств полученного уравнения является его нелокальный характер, что, по крайней мере качественно, согласуется с современными представлениями о закономерностях турбулентного переноса. Важную роль в уравнении играет скорость диссипации энергии — фундаментальная характеристика турбулентности. Она пропорциональна коэффициенту диффузии в фазовом пространстве.

В тех областях потока, где баланс энергии турбулентного движения в основном сводится к порождению и диссипации, решением уравнения является нормальное распределение. Этот вывод находится в удовлетворительном качественном соответствии с опытными данными в логарифмическом слое.

1. Основные уравнения. Точное незамкнутое уравнение для одноточечного распределения вероятностей, полученное в [1—4] из уравнений Навье — Стокса, имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_u P - \nu \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = 0,$$

где $P(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ — распределение вероятностей скорости; t — время; x_k — координаты точки ($k = 1, 2, 3$); u_k — гидродинамическая скорость;

$\varepsilon_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}$ — тензор мгновенных скоростей диссипации энергии;

ν — коэффициент молекулярной вязкости; $\pi_k = \langle \partial p / \partial x_k \rangle_u P$; p — кинематическое давление; символами $\langle \rangle$, $\langle \rangle_u$ обозначено соответственно полное (безусловное) осреднение и осреднение при заданном значении \mathbf{u} . По повторяющимся индексам здесь и далее производится суммирование от 1 до 3.

Первые два члена в (1.1) описывают силы инерции, третий — силы давления и последние два — вязкие силы. Существенно, что силы инерции точно выражаются через искомое распределение вероятностей. В этом состоит основное преимущество использования распределений вероятностей по сравнению с существующими полуэмпирическими теориями для вторых моментов. Как известно, аппроксимация третьих моментов в этих уравнениях представляет наибольшие трудности. Силы давления и вязкости не выражаются точно через $P(\mathbf{u})$, и поэтому, как и в полуэмпирических теориях для вторых моментов, аппроксимация этих членов требует привлечения нестрогих соображений. В [5—7] для этой цели использовалась аналогия с кинетической теорией. В [8] содержатся общие сообра-