

На фиг. 1 показано изменение переохлаждения потока ΔT , а на фиг. 2—степени конденсации y и отношения T/T_e в зависимости от аргумента $x_c = x_c^0 \zeta; x_c^0$, см. (T_c —температура в точке насыщения).

Результаты расчета показывают высокую точность корреляции максимального переохлаждения потока по параметрам S_0 и φ . При этом корреляция распределения газодинамических функций справедлива как для начальной стадии, так и для всей зоны спонтанной конденсации и обладает высокой степенью точности в широком диапазоне параметров торможения.

На основе полученной корреляции можно построить простую и достаточно точную методику инженерного расчета скачков конденсации.

Поступила 28 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Daum F. L., Gyarmathy G. Condensation of Air and Nitrogen in Hypersonic Wind Tunnels.—«J. AIAA», 1968, vol. 6, N 3. Рус. пер.—«Ракетн. техн. и космонавтика», 1968, № 3.
2. Салтанов Г. А. Сверхзвуковые двухфазные течения. Минск, «Вышешая школа», 1972.
3. Phinney R. Nondimensional Solutions of Flows with Vibrational Relaxation.—«J. AIAA», 1964, vol. 2, N 2. Рус. пер.—«Ракетн. техн. и космонавтика», 1964, № 2.
4. Чиркин А. В. Метод расчета температуры замораживания течения азота в гиперзвуковом сопле.—«Учен. зап. ЦАГИ», 1971, № 6.
5. Агафонов В. П., Вертушкин В. К., Гладков А. А., Полянский О. Ю. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М., «Машгиз», 1972.
6. Hagena O. F., Obert W. Cluster Formation in Expanding Supersonic Jets: Effect of Pressure, Temperature, Nozzle Sise and Test Gas.—«J. Chem. Phys.», 1972, vol. 56, N 5.
7. Баханов В. П. Спонтанная конденсация водяного пара при течении в сверхзвуковом сопле.—«Труды Укр. НИГМИ», 1972, вып. 118, с. 46—59.
8. Griffin J. L., Sherman P. M. Computer Analysis of condensation in Highly Expanded Flows.—«J. AIAA», 1965, vol. 3, N 10. Рус. пер.—«Ракетн. техн. и космонавтика», 1965, № 10.

УДК 534.29

ВЛИЯНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ

B. A. Murga

(Новосибирск)

Рассмотрена задача о нахождении вторичного стационарного течения в плоском канале при условии, что на невозмущенное сжимаемое ламинарное течение накладывается звуковое поле. Показано, что при некоторых упрощающих условиях распределение скорости вторичного течения в пристенной области дается простым аналитическим выражением. В остальной области канала задача сводится к решению линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (в комплексных переменных); решение этой задачи получено численным методом. Для случая больших чисел Рейнольдса Re невозмущенного потока указанное уравнение преобразуется к уравнению Эйри. Результаты представлены графически.

1. Известно, что периодические возмущения скорости влияют на стационарное (осредненное) течение вязкой жидкости. Это происходит вследствие нелинейности уравнений гидродинамики. Нахождение осред-

ненных течений представляет большой интерес, но связано в общем случае с исключительными математическими трудностями.

Линь [1] с помощью упрощающих условий получил уравнение для определения результирующего осредненного ламинарного течения вблизи поверхности твердого тела в случае, когда на пульсационное движение жидкости наложено стационарное течение. При этом пульсационные компоненты, входящие в рейнольдсовы напряжения, могут быть определены независимо от стационарного течения.

В данной работе идея Линя используется для нахождения осредненного течения в плоском канале. Пусть на невозмущенное ламинарное стационарное течение вязкой сжимаемой жидкости действуют звуковые возмущения так, что на оси канала направление колебательного движения частиц жидкости параллельно стенкам канала; предполагается, что на оси канала пульсационная компонента скорости задается выражением

$$(1.1) \quad u_1 = A \cos kx \cdot \cos \omega t,$$

где u_1 — пульсационная продольная скорость; A — амплитуда пульсаций скорости; $k = \omega/c$ — волновое число; ω — угловая частота; t — время; c — скорость звука; x — продольная координата. Течение предполагается двумерным. Силы тяжести отсутствуют. Принимаются следующие допущения:

$$(1.2) \quad \begin{cases} 1) \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1, \rho = \rho_0 + \rho_1, p = p_0 + p_1; \\ 2) p_1 = \rho_1 c^2; \\ 3) \text{все величины заметно меняются в продольном направлении на расстояниях, не меньших длины звуковой волны;} \\ 4) \text{динамический коэффициент вязкости } \mu \text{ является постоянной величиной.} \end{cases}$$

Здесь индекс 0 обозначает стационарную величину; индекс 1 — пульсационную, т. е. такую, которая при осреднении по большому промежутку времени дает нуль; \mathbf{V} — скорость; p — давление; ρ — плотность.

Задача решается при следующих условиях:

$$(1.3) \quad \begin{cases} 1) M_0 \ll 1; \\ 2) M_1 \ll 1; \\ 3) \rho_1 \ll \rho_0; \\ 4) \omega \lambda^2 / v \gg 1, \omega h^2 / v \gg 1, \end{cases}$$

где M — число Маха; λ — длина звуковой волны; v — коэффициент кинематической вязкости; h — полуширина канала.

В работе [2] была сделана попытка решить эту задачу с перечисленными допущениями и условиями, однако полученное здесь уравнение для осредненного течения неправильное.

2. В качестве исходных используем уравнения

$$(2.1) \quad \rho [\partial \mathbf{V} / \partial t + (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + (1/3) \mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V});$$

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

К этим уравнениям, вообще говоря, надо добавить уравнение баланса энергии и уравнение состояния, однако ниже будет показано, что при сформулированных условиях и допущениях осредненное течение можно рассматривать как несжимаемое на расстояниях порядка длины звуковой волны вдоль по каналу, а пульсационное течение (сжимаемое) полностью определяется в данной постановке задачи.

Величины \mathbf{V} , p , ρ представляем суммами стационарных и пульсационных компонент, подставляем их в (2.1), затем после обычных операций осреднения по времени и вычитания осредненных уравнений из полных получаем, отбрасывая малые величины с помощью (1.2), (1.3), систему уравнений для пульсационных компонент

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \rho_0 \partial \mathbf{V}_1 / \partial t &= -\nabla p_1 + \mu \Delta \mathbf{V}_1; \\ \partial \rho_1 / \partial t + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 &= 0; \quad p_1 = \rho_1 c^2. \end{aligned}$$

Последнее уравнение в (2.2) взято из (1.2). Решение уравнений (2.2), удовлетворяющее условию прилипания на стенке и условию (1.1), имеет вид (с учетом (1.3)) [3]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_1 &= A \cos kx [\cos \omega t - \exp(-\eta) \cdot \cos(\omega t - \eta)]; \\ v_1 &= -(k/\beta)^{\sqrt{2}} A \sin kx [\cos(\omega t - \pi/4) - \exp(-\eta) \cdot \cos(\omega t - \eta - \pi/4)], \end{aligned}$$

где u_1 , v_1 — продольная и поперечная компоненты вектора \mathbf{V}_1 ; $\beta = \sqrt{\omega/2v}$; $\eta = y\beta$; y — расстояние от стенки. Выражение для v_1 в (2.3) справедливо только вблизи стенки (на расстояниях порядка $\sqrt{v/\omega}$), так как соотношения (2.3) получены с помощью приближения пограничного слоя.

Определим стационарное течение. Видно, что невозмущенное стационарное течение можно считать несжимаемым, т. е. течением Пуазейля на расстояниях порядка длины волны звука вдоль по каналу. Действительно, из выражения для течения Пуазейля приближенно имеем (с учетом того, что $\rho_1/\rho_n \sim M_1$)

$$|\partial p_n / \partial x| \sim U_0 \mu / h^2 \sim (M_n/M_1)(v/\omega h^2) \rho_1 c \omega,$$

(где p_n , ρ_n , M_n — давление, плотность и число Маха в невозмущенном течении);

$$|\partial p_1 / \partial x| \sim |p_1/\lambda| \sim \rho_1 c \omega.$$

Сравнивая написанные выражения, получаем для конечных значений M_n/M_1 (или M_0/M_1)

$$|\partial p_n / \partial x| \ll |p_1/\lambda|,$$

так как $v/\omega h^2 \ll 1$ по условию. Следовательно, перепад давления p_n на расстоянии λ вдоль канала мал по сравнению с перепадом пульсационного давления p_1 . Это означает, что и плотность ρ_n также слабо меняется на расстоянии λ по сравнению с изменением пульсационной плотности ρ_1 , т. е. невозмущенное течение можно считать течением Пуазейля на отрезке длиной λ вдоль канала.

Ниже будет показано, что стационарная «добавка» к скорости течения Пуазейля по порядку величины равна u_1^2/c . Тогда

$$(2.4) \quad |\operatorname{div} \mathbf{V}_0| \sim \frac{u_1^2}{\lambda}.$$

Из уравнения неразрывности в (2.2) получаем

$$(2.5) \quad |\operatorname{div} \mathbf{V}_1| \sim \omega \rho_1 / \rho_0.$$

Из (2.4), (2.5) следует, что

$$\frac{|\operatorname{div} \mathbf{V}_0|}{|\operatorname{div} \mathbf{V}_1|} \sim \frac{u_1^2}{\omega^2 \lambda^2 M_1} \sim M_1.$$

Так как $M_1 \ll 1$ по условию, то $|\operatorname{div} \mathbf{V}_0| \ll |\operatorname{div} \mathbf{V}_1|$, поэтому можно положить $\operatorname{div} \mathbf{V}_0 = 0$.

С учетом сказанного уравнения для стационарного течения запишется в виде

$$(2.6) \quad \rho_0(\mathbf{V}_0 \nabla) \mathbf{V}_0 = -\nabla p_0 + \mu \Delta \mathbf{V}_0 - \langle \rho_1 \partial \mathbf{V}_1 / \partial t \rangle - \langle \rho_0(\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1 \rangle; \\ \operatorname{div} \mathbf{V}_0 = 0,$$

где угловые скобки означают осреднение по периоду колебаний. Скорость \mathbf{V}_0 на стенке канала должна обращаться в нуль; кроме того, необходимо задать расход жидкости через поперечное сечение канала (расход определяется заданным течением Пуазейля). Пусть \mathbf{V}_2 обозначает скорость вторичного течения (u_2 и v_2 — продольная и поперечная компоненты), так что полная осредненная скорость \mathbf{V}_0 есть сумма \mathbf{V}_2 и \mathbf{u}_0 (вектор скорости течения Пуазейля, имеющий направление, параллельное стенке канала). Тогда, введя функцию тока ψ ($u_2 = \partial \psi / \partial y$, $v_2 = -\partial \psi / \partial x$) и вычислив члены в угловых скобках, перепишем (2.6) в виде

$$(2.7) \quad (u_0 + \partial \psi / \partial y)(\partial \Delta \psi / \partial x) - (\partial \psi / \partial x)(d^2 u_0 / dy^2 + \partial \Delta \psi / \partial y) = v \Delta \Delta \psi + f(y) \times \\ \times \sin 2kx,$$

где

$$f(y) = -(A^2 k \beta / 2)[-2 \exp(-\eta) \cos \eta - \exp(-\eta) \sin \eta + \exp(-2\eta)],$$

с граничными условиями

на стенке ($y=0$)

$$\psi = \partial \psi / \partial y = 0;$$

на оси канала ($y=h$)

$$\psi = \partial^2 \psi / \partial y^2 = 0.$$

Функция $f(y)$ заметно отличается от нуля только в пристенной области шириной $\sim \sqrt{v/\omega}$. Эта область много тоньше ширины канала, так как $v/\omega h^2 \ll 1$. Поэтому можно предположить, что искомое вторичное течение образует в пристенной области пограничный слой (это предположение оправдывается результатом). Тогда, сравнив члены левой части уравнения (2.7) с членом $v \Delta \Delta \psi$, убедимся, что все они по абсолютной величине много меньше последнего. Например, первый член в (2.7) по порядку величины равен

$$|u_0 \partial \Delta \psi / \partial x| \sim |u_0 \psi| / \delta^2 \lambda,$$

(где $\delta = \sqrt{2 v / \omega}$); а

$$|v \Delta \Delta \psi| \sim |v \psi| / \delta^4 \sim |\omega \psi| / \delta^2.$$

Отсюда видно, что

$$\frac{|u_0 \partial \Delta \psi / \partial x|}{|v \Delta \Delta \psi|} \sim u_0 / \lambda \omega \sim M_0.$$

Данное отношение много меньше единицы, так как $M_0 \ll 1$ по условию. Итак, в пристенной области шириной $\sim \delta$ уравнение (2.7) упрощается

$$(2.8) \quad v(\partial^4\psi/\partial y^4) = -f(y) \sin 2kx.$$

Решение уравнения (2.8), удовлетворяющее условию прилипания на стенке и ограниченное в пристенной области, имеет вид

$$(2.9) \quad u_2 = (A^2 k \sin 2kx / 4v\beta^2) [-(1/2) \exp(-\eta) \cos \eta - (3/2) \exp(-\eta) \sin \eta - (1/4) \exp(-2\eta) + 3/4],$$

где $u_2 = \partial\psi/\partial y$. Мы не выписываем выражения для поперечной компоненты v_2 , так как в дальнейшем оно не понадобится.

Подставляя (2.9) в (2.7), убеждаемся в том, что все члены в левой части (2.7) по абсолютной величине меньше, чем $|v\Delta\Delta\psi|$. На внешней границе пристенной области ($\eta \rightarrow \infty$) имеем из (2.9)

$$u_2 = (3/8)(A^2/c) \sin 2kx.$$

Во внешней области, т. е. всюду, за исключением пристенной области шириной $\sim \delta$, справедливо уравнение

$$(2.10) \quad (u_0 + \partial\psi/\partial y)(\partial\Delta\psi/\partial x) - (\partial\psi/\partial x)(d^2u_0/dy^2 + \partial\Delta\psi/\partial y) = v\Delta\Delta\psi,$$

и следующие граничные условия:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \psi &= 0, \quad \partial\psi/\partial y = (3/8)(A^2/c) \sin 2kx \text{ при } y=0; \\ \psi &= 0, \quad \partial^2\psi/\partial y^2 = 0 \text{ при } y=h. \end{aligned}$$

Ошибка авторов работы [2] состоит в том, что они полагали уравнение (2.8) справедливым как в пристенной, так и во внешней областях; в данной постановке задачи оснований для такого заключения нет.

Из (2.10), (2.11) видно, что значение функции $\partial\psi/\partial y = u_2$ по порядку величины равно A^2/c ; отсюда следует, что

$$(2.12) \quad |u_2/U_0| \sim A^2/c U_0 = (M_1/M_0)^2 M_0,$$

где U_0 — максимальное значение скорости течения Пуазейля. При конечных значениях $(M_1/M_0)^2$ отношение $|u_2|$ к $|U_0|$ мало, так как $M_0 \ll 1$. Характерными линейными масштабами задачи (2.10), (2.11) являются длина волны звука λ и полуширина канала h . Следовательно, можно произвести оценку членов уравнения (2.10), которая показывает, что нелинейные члены в левой части малы по сравнению с линейными; тогда это уравнение линеаризуется и приобретает вид

$$(2.13) \quad u_0 \partial\Delta\psi/\partial x - (d^2u_0/dy^2)(\partial\psi/\partial x) = v\Delta\Delta\psi.$$

Соотношения (2.13), (2.11) описывают вторичное течение во внешней области, т. е. всюду, за исключением узкой пристенной зоны шириной $\sim \delta$, в которой вторичная продольная скорость u_2 дается выражением (2.9).

Решение задачи (2.13), (2.11) ищем в виде

$$(2.14) \quad \psi(x, y) = \operatorname{Real} \Phi(y) \exp(-2ikx).$$

Введем безразмерные переменные следующим образом (чертак над буквой обозначает безразмерную величину):

$$\bar{\Phi} = 8\Phi c/3hA^2; \bar{y} = y/h; \bar{u}_0 = u_0/U_0.$$

После подстановки (2.14) в (2.13) и (2.11) получаем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\bar{\Phi}$

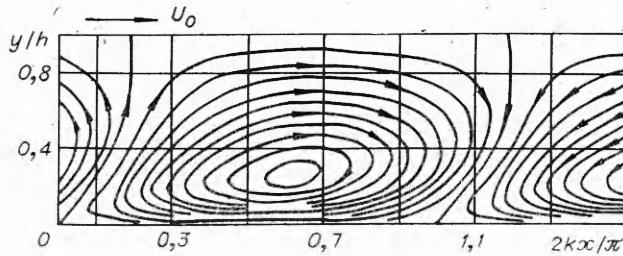
$$(2.15) \quad \bar{\Phi}'''' - \bar{\Phi}''(8\alpha^2 - 2i\alpha \operatorname{Re} \bar{u}_0) + \bar{\Phi}(16\alpha^4 + 4i\alpha \operatorname{Re} - 8i\alpha^3 \operatorname{Re} \bar{u}_0) = 0$$

и граничные условия

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi} &= 0, \quad \bar{\Phi}' = i \text{ при } \bar{y} = 0; \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Phi}'' = 0 \text{ при } \bar{y} = 1, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по \bar{y} ; $\alpha = kh$; $\operatorname{Re} = U_0 h / v$.

Решение задачи (2.15), (2.16) численным методом не составляет труда при не очень больших значениях параметра $\operatorname{Re} \alpha$. Линейная краевая задача сводится к системе задач Коши [4], эта система может быть проинтегрирована, например, методом Рунге — Кутта.

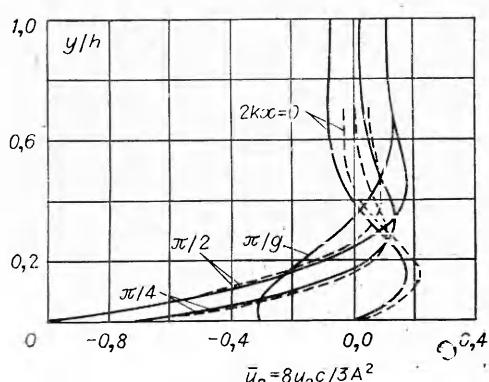


Фиг. 1

На фиг. 1—3 представлены результаты решения задачи (2.15), (2.16). На фиг. 1 показана картина линий тока вторичного течения при $\operatorname{Re} = 50$, $\alpha = 1$, где нуль оси ординат — внешняя граница пристенного пограничного слоя толщиной $\sim \delta$, единица — середина канала. На фиг. 2, 3 представлены профили безразмерной

продольной скорости $\bar{u}_2 = 8u_2c/3A^2$ в различных сечениях канала при $\operatorname{Re} = 50$ и 1000 соответственно (сплошные линии) и при $\alpha = 1$. Профили \bar{u}_2 в сечениях канала, соответствующих $2kx > \pi$, не представлены, так как в этом случае \bar{u}_2 меняет знак, т. е. $\bar{u}_2(2kx + \pi) = -\bar{u}_2(2kx)$ (2.14).

3. При больших значениях $\operatorname{Re} \alpha$ в численном счете задачи (2.15), (2.16) возникают трудности, связанные с малостью параметра $1/\operatorname{Re} \alpha$ при старшей производной в уравнении (2.15). Однако



Фиг. 2

задача может быть упрощена. При $\text{Re } \alpha \gg 1$ вторичное течение образует пограничный слой и во внешней области (это видно на фиг. 2,3). В пределах этого пограничного слоя выражение для скорости течения Пуазейля можно считать линейной функцией поперечной координаты. С учетом сказанного можно сравнить члены в уравнении (2.15) аналогично тому, как это делается при выводе уравнений Прандтля; после отбрасывания малых уравнение (2.15) приобретает вид (в новых безразмерных переменных)

$$(3.1) \quad \tau'' - \eta\tau = 0,$$

где штрих обозначает дифференцирование по координате η ,

$$\eta = (-4i)^{1/3} \frac{y(\text{Re}\alpha)^{1/3}}{h}; \quad \tau = \bar{\Phi}''; \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi(\text{Re}\alpha)^{1/3}(-4i)^{1/3}c}{(3/8)hA^2}.$$

Границные условия для функции $\bar{\Phi}$ и ее производных следующие:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi} &= 0, \quad \bar{\Phi}' = i \quad \text{при } \eta = 0; \\ \bar{\Phi}' &= \bar{\Phi}'' = 0 \quad \text{при } |\eta| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Уравнение (3.1) является уравнением Эйри. На фиг. 2, 3 штриховыми линиями представлены профили продольной скорости \bar{u}_2 , полученные из (3.1), (3.2) и приведенные к соответствующим значениям Re и α . Видно, что при $\text{Re } \alpha = 1000$ (см. фиг. 3) решения задач (2.15), (2.16) и (3.1), (3.2) различаются незначительно.

Уравнение (3.1) справедливо при определенных ограничениях, накладываемых на значения $\text{Re } \alpha$. Линейное уравнение (2.15) было получено из (2.10) с помощью оценочного соотношения (2.12). Однако в случае больших значений $\text{Re } \alpha$ в качестве характерной скорости невозмущенного течения нельзя использовать в (2.12) максимальную скорость течения Пуазейля U_0 , так как ширина пограничного слоя δ_e становится малой по сравнению с шириной канала. В этом случае такой характерной скоростью является величина $U_0\delta_e/h$. Для линеаризации уравнения (2.10) необходимо выполнение условия (аналогичного условию (2.12))

$$(3.3) \quad |u_2 h / U_0 \delta_e| \ll 1.$$

Поскольку

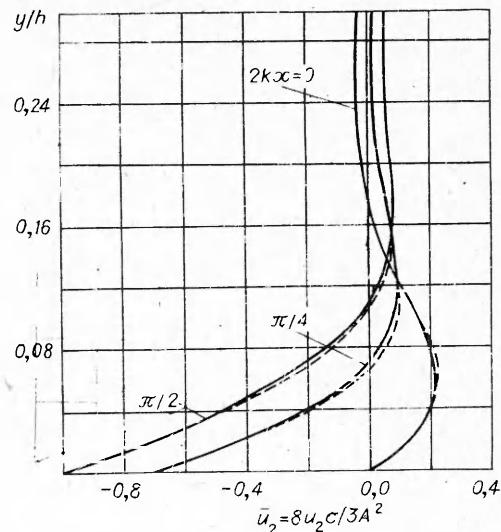
$$\delta_e h \sim 1/(\text{Re } \alpha)^{1/3},$$

(3.3) можно переписать в виде

$$(\text{Re } \alpha)^{1/3} \ll (M_0/M_1)^2 (1/M_0).$$

Автор благодарен В. Е. Накорякову за полезные замечания и внимание к работе.

Поступила 20 I 1975



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
2. Purdy K. R., Jackson T. W., Gorton C. W. Viscous fluid flow under the influence of a resonant acoustic field. Trans. ASME, 1964, C 86, N 1, 97—106. Рус. пер. Порди, Джексон, Гортон. Влияние резонансного акустического поля на течение вязкой жидкости.—«Теплопередача», 1964, т. 86, № 1.
3. Physical acoustics. Vol. II., pt. B. Properties of polymers and nonlinear acoustics. Academic press. N. Y.—L., 1965. Рус. пер. Физическая акустика под ред. У. Мэона. Т. II, ч. Б. Свойства полимеров и нелинейная акустика. М., 1969, гл. 5.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970, с. 261.

УДК 532.51

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ В АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

O. A. Лихачев

(Новосибирск)

Исследуется характер потери устойчивости течения в пограничном слое от отсосом по отношению к малым, но конечным возмущениям. Показано, что для рассматриваемого течения осуществляется жесткое возбуждение автохолебаний. Неустойчивый автоколебательный режим существует в некоторой окрестности нейтральной кривой в области устойчивости исходного течения при всех числах Рейнольдса Re .

Использование внешних управляемых факторов (отрицательный градиент давления, отсос, поперечное магнитное поле в случае проводящей среды и т. д.) позволяет затянуть ламинарный режим течения в пограничном слое до довольно больших чисел Рейнольдса, что достигается большей заполненностью профилей скорости. В то же время оказывается, что такой затянутый ламинарный режим взрывообразно теряет устойчивость по отношению к конечным возмущениям при числах Рейнольдса, меньших критического, вычисленного по линейной теории.

После потери устойчивости исходное стационарное течение сменяется периодическим по однородным переменным автоколебательным режимом. Существование таких автоколебаний, как решения уравнений Навье — Стокса, ответвляющиеся от стационарного решения, было доказано в работе [1]. Автоколебания ответвляются при числах Рейнольдса, соответствующих точкам нейтральной кривой по линейной теории устойчивости. В работе [2] исследована нелинейная устойчивость течения в плоском канале и доказан жесткий характер потери устойчивости исходного течения.

1. При однородном отсосе с постоянной скоростью v_0 асимптотический профиль пограничного слоя, построенный по толщине вытеснения $\delta_* = v/|v_0|$ и скорости на бесконечности u_∞ , имеет вид

$$(1.1) \quad u = 1 - e^{-y}.$$

Причем (1.1) является точным решением уравнений Навье — Стокса для случая плоскопараллельного движения [3]. С учетом поперечной ком-