

УДК 519.653

Формулы численного дифференцирования функций с большими градиентами^{*†}

А.И. Задорин

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

E-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 16, 2023.

Задорин А.И. Формулы численного дифференцирования функций с большими градиентами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 1. — С. 17–26.

Исследуется вопрос численного дифференцирования функций с большими градиентами. Предполагается, что функция содержит составляющую, известную с точностью до множителя и отвечающую за большие градиенты функции. Применение к таким функциям классических формул для вычисления производных может приводить к существенным погрешностям. Исследуются специальные формулы численного дифференцирования на равномерной сетке, точные на выделенной погранслоистой составляющей. Сформулированы условия, при выполнении которых оценка погрешности разностной формулы для производной не зависит от градиентов погранслоистой составляющей. В случае экспоненциально пограничного слоя при вычислении производной произвольно заданного порядка получены оценки погрешности, равномерные по малому параметру. Приведены результаты численных экспериментов.

DOI: 10.15372/SJNM20230102

Ключевые слова: функция одной переменной, большие градиенты, специальная формула численного дифференцирования, оценка погрешности.

Zadorin A.I. Formulas for numerical differentiation of functions with large gradients // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 1. — P. 17–26.

Numerical differentiation of functions with large gradients is investigated. It is assumed that a function contains a component known up to a factor and responsible for the large gradients of the function. Application of classical formulas for calculating derivatives to such functions may lead to significant errors. Special-purpose formulas are studied for numerical differentiation on a uniform grid which are exact for a boundary layer component. Conditions are formulated under which an error estimate of a difference formula for a derivative does not depend on the gradients of the boundary layer component. In the case of an exponential boundary layer, when calculating a derivative of an arbitrarily given order error estimates that are uniform with respect to a small parameter are obtained. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: function of one variable, large gradients, special formula for numerical differentiation, error estimate.

1. Введение

Применение классических полиномиальных формул численного дифференцирования [1] при наличии пограничного слоя, где функция имеет большие градиенты, может

^{*}Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0016).

[†]Работа была представлена на международной конференции “Марчуковские научные чтения – 2022”.

приводить к значительным погрешностям [2]. В связи с этим возникает необходимость в построении формул численного дифференцирования, погрешность которых не растет в области пограничного слоя. В [3] предполагается, что у исходной функции с точностью до множителя выделена составляющая, отвечающая за большие градиенты функции. Такая декомпозиция функции с выделением регулярной и погранслошной составляющих обосновывалась в [4] для решения сингулярно возмущенной задачи. В [3] построена интерполяционная формула с произвольно заданным числом узлов интерполяции, точная на погранслошной составляющей. Равномерная по погранслошной составляющей оценка погрешности этой формулы получена в [5].

В [3] дифференцированием построенного интерполанта получены разностные формулы для производных, точные на погранслошной составляющей. Однако в [3] нет оценок погрешности построенных формул численного дифференцирования. В [6, 7] получены оценки погрешности формул из [3], равномерные по градиентам выделенной погранслошной составляющей, при вычислении первой и второй производных.

Отметим, что можно использовать и альтернативный подход, когда классические разностные формулы для вычисления производных применяются на сетках, сгущающихся специальным образом в области больших градиентов. В [8] показано, что в случае экспоненциального пограничного слоя погрешность таких формул становится равномерной по малому параметру, если их применять на сетке Шишкина [9].

В предлагаемой работе рассматривается вопрос оценивания погрешности формулы из [3] при вычислении производной произвольного порядка. Погранслошная составляющая будет рассматриваться как функция общего вида, поэтому может отражать различные особенности дифференцируемой функции.

Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от погранслошной составляющей $\Phi(x)$, ее производных и от шага сетки. В случае экспоненциального погранслоя эти постоянные не зависят от малого параметра ε и шага сетки h . Различные величины будем ограничивать одной постоянной C_j , если понятно по тексту.

2. Постановка задачи

Пусть исходная функция $u(x)$ является достаточно гладкой и имеет представление:

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $p(x)$ — регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, $\Phi(x)$ — погранслошная составляющая, являющаяся функцией общего вида и имеющая большие градиенты. Составляющая $\Phi(x)$ предполагается известной, $p(x)$ и γ не заданы.

В случае

$$\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1] \quad (2)$$

декомпозиция (1) справедлива [4] для решения сингулярно возмущенной задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B,$$

где $a_1(x) \geq C_0 > 0$, $a_2(x) \geq 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $\alpha = a_1(0)$, функции a_1, a_2, f — достаточно гладкие.

Пусть Ω^h — равномерная сетка интервала $[0, 1]$:

$$\Omega^h = \{x_j : x_j = jh, j = 0, 1, \dots, N, Nh = 1\}.$$

Предполагаем, что функция $u(x)$ задана в узлах сетки Ω^h , $u_j = u(x_j)$.

Покажем, что если функция $u(x)$ имеет представление (1), то погрешность классических формул для производной на равномерной сетке может быть существенной. Пусть $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$, $x \in [0, 1]$. Выпишем формулу для производной:

$$u'(x) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \quad (3)$$

В данном случае производная $u'(x)$ в области пограничного слоя является величиной, порядка $O(1/\varepsilon)$, поэтому в соответствии, например, с [10, 11, 8] оценивается относительная погрешность при вычислении первой производной, получаемая умножением абсолютной погрешности на малый параметр ε . Заметим, что в этих работах оценка погрешности равномерна по параметру ε , потому что формула для производной применяется на сетке Шишкина [9]. В случае формулы (3) на равномерной сетке при $\varepsilon = h$ имеем

$$\varepsilon \left| \frac{u_1 - u_0}{h} - u'(0) \right| = e^{-1}.$$

Таким образом, погрешность формулы значительна, если $\varepsilon = h$, несмотря на малость h . Задача построения формул численного дифференцирования функций, имеющих представление (1), актуальна.

Для построения формул численного дифференцирования применяем интерполяционную формулу, точную на составляющей $\Phi(x)$, отвечающей за большие градиенты функции $u(x)$. На произвольном интервале $[x_m, x_{m+k-1}]$ с k узлами сетки Ω^h в [3] построена интерполяционная формула

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_{k-1}(u, x) + \frac{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]u}{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]\Phi} [\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)], \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}], \quad (4)$$

где $[x_m, \dots, x_{m+k-1}]u$ — разделенная разность для функции $u(x)$ [1], $k \geq 2$, $L_{k-1}(u, x)$ — многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с $(k-1)$ узлами интерполяции $x_m, \dots, x_{m+k-2}$. Для корректного задания формулы (4) задаем ограничение

$$\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0, \quad x \in (x_m, x_{m+k-1}). \quad (5)$$

В [12] формула (4) представлена в виде

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_k(u, x) + \frac{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]u}{[x_m, \dots, x_{m+k-1}]\Phi} [\Phi(x) - L_k(\Phi, x)], \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}]. \quad (6)$$

Эквивалентность формул (4) и (6) устанавливается на основе соотношения [1, с. 46]:

$$L_k(u, x) = L_{k-1}(u, x) + (x - x_m) \cdots (x - x_{m+k-2}) [x_m, \dots, x_{m+k-1}]u.$$

Из (6) следует, что эта формула является интерполяционной с узлами интерполяции $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}$ и точной на многочленах степени $(k-2)$ и на функции $\Phi(x)$.

На основе (6) зададим формулу численного дифференцирования:

$$u^{(n)}(x) \approx L_{\Phi,k}^{(n)}(u, x) = L_k^{(n)}(u, x) + \frac{\Delta^{k-1}u_m}{\Delta^{k-1}\Phi_m} \left[\Phi^{(n)}(x) - L_k^{(n)}(\Phi, x) \right], \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}], \quad (7)$$

где $n < k$, $\Delta^{k-1}u_m$ — конечная разность для функции $u(x)$ [1, с. 65], определяемая соотношениями: $\Delta u_m = u_{m+1} - u_m$, $\Delta^j u_m = \Delta(\Delta^{j-1}u_m)$. Отметим, что формула (7) является точной на составляющей $\Phi(x)$.

В работе оценим погрешность формулы (7), применяемой к функции $u(x)$ вида (1).

3. Оценка погрешности формулы для производной

Лемма 1. Пусть для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция (1), $1 \leq n < k$. Пусть найдется D_n такое, что $0 < 1/D_n \leq C_1$ и для некоторой постоянной C_2 справедлива оценка

$$G = \frac{h^{n-1}}{D_n} \left| L_k^{(n)}(\Phi, x) - \Phi^{(n)}(x) \right| / |\Delta^{k-1}\Phi_m| \leq C_2. \quad (8)$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\frac{1}{D_n} \left| L_{\Phi,k}^{(n)}(u, x) - u^{(n)}(x) \right| \leq C_1 \left| L_k^{(n)}(p, x) - p^{(n)}(x) \right| + C_2 \frac{|\Delta^{k-1}p_m|}{h^{n-1}}, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}]. \quad (9)$$

Доказательство. Формула (7) является точной на $\Phi(x)$, поэтому

$$\begin{aligned} \left| L_{\Phi,k}^{(n)}(u, x) - u^{(n)}(x) \right| &= \left| L_{\Phi,k}^{(n)}(p, x) - p^{(n)}(x) \right| \leq \left| L_k^{(n)}(p, x) - p^{(n)}(x) \right| + \\ &\quad \left| \frac{\Delta^{k-1}p_m}{\Delta^{k-1}\Phi_m} \left(\Phi^{(n)}(x) - L_k^{(n)}(\Phi, x) \right) \right|, \quad x \in [x_m, x_{m+k-1}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая (8), (10), условие $0 < 1/D_n \leq C_1$, получаем (9). Это доказывает лемму. $\square$

Замечание. При задании D_n таким образом, что $|\Phi^{(n)}(x)| \leq D_n$, неравенство (9) соответствует оценке относительной погрешности формулы (7). Примеры применения леммы 1 с соответствующим заданием D_n будут приведены ниже.

Уточним оценку (9), учитывая ограниченность производных функции $p(x)$. Пусть для некоторой постоянной C_3 $|p^{(j)}(x)| \leq C_3$, $j \leq k+n$. В соответствии с [1], $\Delta^{k-1}p_m/h^{k-1} = p^{(k-1)}(s)$ для некоторого s . Учитывая оценку погрешности при вычислении производной на основе дифференцирования многочлена Лагранжа [1], для некоторой постоянной C имеем

$$\left| L_k^{(n)}(p, x) - p^{(n)}(x) \right| \leq Ch^{k-n}, \quad |\Delta^{k-1}p_m| \leq Ch^{k-1}. \quad (11)$$

При задании D_n на основе выполнения условия (8), из (9), (11) для некоторой постоянной C_4 получаем

$$\frac{1}{D_n} \left| L_{\Phi,k}^{(n)}(u, x) - u^{(n)}(x) \right| \leq C_4 h^{k-n}. \quad (12)$$

Рассмотрим применение леммы 1 на примере, когда $k = 3$, $n = 1$. Тогда формула (7) принимает вид:

$$L'_{\Phi,3}(u, x) = L'_3(u, x) + \frac{u_{m+2} - 2u_{m+1} + u_m}{\Phi_{m+2} - 2\Phi_{m+1} + \Phi_m} \left(\Phi'(x) - L'_3(\Phi, x) \right), \quad x \in [x_m, x_{m+2}], \quad (13)$$

где

$$L'_3(\Phi, x) = \frac{2x - x_{m+1} - x_{m+2}}{2h^2} \Phi_m - \frac{2x - x_m - x_{m+2}}{h^2} \Phi_{m+1} + \frac{2x - x_{m+1} - x_m}{2h^2} \Phi_{m+2}. \quad (14)$$

Перейдем к проверке выполнения условия (8) с заданием ограничений на функцию $\Phi(x)$. Оценим $|L'_3(\Phi, x) - \Phi'(x)|$. Применяем разложение в ряд Тейлора с остаточным членом в интегральном виде:

$$\Phi(\eta) = \Phi(x) + (\eta - x)\Phi'(x) + \frac{(\eta - x)^2}{2}\Phi''(x) + \frac{1}{2} \int_x^\eta (\eta - s)^2 \Phi^{(3)}(s) ds. \quad (15)$$

Раскладывая в (14) Φ_m, Φ_{m+2} по формуле (15) в узле x_{m+1} , применяя формулу

$$\Phi'(x) = \Phi'_{m+1} + (x - x_{m+1})\Phi''_{m+1} + \int_{x_{m+1}}^x (x - s)\Phi^{(3)}(s) ds$$

и приводя подобные, при всех $x \in [x_m, x_{m+2}]$ получаем

$$\begin{aligned} L'_3(\Phi, x) - \Phi'(x) = & \frac{2x - x_{m+1} - x_{m+2}}{4h^2} \int_{x_{m+1}}^{x_m} (x_m - s)^2 \Phi^{(3)}(s) ds + \\ & \frac{2x - x_{m+1} - x_m}{4h^2} \int_{x_{m+1}}^{x_{m+2}} (x_{m+2} - s)^2 \Phi^{(3)}(s) ds - \int_{x_{m+1}}^x (x - s)\Phi^{(3)}(s) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) имеем

$$\begin{aligned} |L'_3(\Phi, x) - \Phi'(x)| \leq & \frac{1}{4} \int_{x_m}^{x_{m+1}} (s - x_m) |\Phi^{(3)}(s)| ds + \\ & \frac{1}{4} \int_{x_{m+1}}^{x_{m+2}} (x_{m+2} - s) |\Phi^{(3)}(s)| ds + \left| \int_{x_{m+1}}^x (x - s) \Phi^{(3)}(s) ds \right|. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) следует

$$|L'_3(\Phi, x) - \Phi'(x)| < \frac{5}{4} \int_{x_m}^{x_{m+1}} (s - x_m) |\Phi^{(3)}(s)| ds + \frac{5}{4} \int_{x_{m+1}}^{x_{m+2}} (x_{m+2} - s) |\Phi^{(3)}(s)| ds. \quad (18)$$

На основе разложения Φ_{m+2}, Φ_m в ряд через узел x_{m+1} , получаем

$$\Delta^2 \Phi_m = \Phi_{m+2} - 2\Phi_{m+1} + \Phi_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} (s - x_m) \Phi^{(2)}(s) ds + \int_{x_{m+1}}^{x_{m+2}} (x_{m+2} - s) \Phi^{(2)}(s) ds. \quad (19)$$

В силу условия (5) $\Phi^{(2)}(x)$ сохраняет знак при $x \in (x_m, x_{m+2})$. Сделаем ограничение на функцию $\Phi(x)$, предполагая, что для некоторого D_1 справедливо неравенство:

$$|\Phi^{(3)}(x)| \leq D_1 |\Phi^{(2)}(x)|, \quad x \in [x_m, x_{m+2}]. \quad (20)$$

Применяя соотношения (18)–(20), убеждаемся, что в случае $n = 1$, $k = 3$ при задании $C_2 = 5/4$ справедлива оценка (8). Тогда в соответствии с леммой 1 справедлива оценка (9) при $n = 1$, $k = 3$ и дополнительном ограничении (20).

Остановимся на случае экспоненциального пограничного слоя, когда $\Phi(x) = e^{-\alpha x/\varepsilon}$ и выполнено условие (20) при задании $D_1 = \alpha/\varepsilon$. Как сказано выше, тогда справедлива оценка (9). Применяя оценку (12), для формулы (13) получаем оценку погрешности

$$\varepsilon |L'_{\Phi,3}(u, x) - u'(x)| \leq Ch^2, \quad x \in [x_m, x_{m+2}], \quad 0 \leq m \leq N - 2. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию с декомпозицией (1) при задании $\Phi(x) = \ln x$ на интервале $[\varepsilon, 1]$, когда $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Декомпозиция с такой функцией $\Phi(x)$ рассматривалась в [7] для решения уравнения Пуассона в кольце с малым радиусом ε . В этом случае справедливо ограничение (20) при задании $D_1 = 2/\varepsilon$. По аналогии с предыдущим случаем получаем оценку (21).

4. Частный случай для разностных формул

Рассмотрим случай $k = n + 1$. Классические формулы для вычисления производных, основанные на дифференцировании многочлена Лагранжа, в этом случае имеют вид:

$$u^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n u_m}{h^n}, \quad x \in [x_m, x_{m+n}]. \quad (22)$$

Применение формулы (22) в области больших градиентов функции $u(x)$, как показано в случае формулы (3), когда $n = 1$, может приводить к значительным погрешностям.

Применяя (4), зададим формулу для вычисления производной, точную на $\Phi(x)$:

$$u^{(n)}(x) \approx L_{\Phi, n+1}^{(n)}(u, x) = \frac{\Delta^n u_m}{\Delta^n \Phi_m} \Phi^{(n)}(x), \quad x \in [x_m, x_{m+n}]. \quad (23)$$

Представляет интерес анализ погрешности такой формулы при $n \geq 1$.

В случае $k = n + 1$ перейдем от условия (8) к более простому для проверки условию. Учитывая представление многочлена Лагранжа в форме Ньютона [1, с. 46], при $x, r \in [x_m, x_{m+n}]$ имеем

$$L_{n+1}^{(n)}(\Phi, x) - \Phi^{(n)}(x) = n![x_m, \dots, x_{m+n}]\Phi - \Phi^{(n)}(x) = \Phi^{(n)}(r) - \Phi^{(n)}(x) = \int_x^r \Phi^{(n+1)}(t) dt.$$

Учитывая это соотношение, (23), лемму 1 и (11), получаем следующий результат.

Лемма 2. Пусть для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция (1), $n \geq 1$. Пусть $0 < 1/D_n \leq C_1$, $|p^{(j)}(x)| \leq C_3$ при $j \leq 2n + 1$, и для некоторой постоянной C_2

$$G = \frac{h^{n-1}}{D_n} \int_{x_m}^{x_{m+n}} |\Phi^{(n+1)}(s)| ds / |\Delta^n \Phi_m| \leq C_2, \quad 0 \leq m \leq N - n. \quad (24)$$

Тогда для некоторой постоянной C справедлива оценка

$$\frac{1}{D_n} \left| \frac{\Delta^n u_m}{\Delta^n \Phi_m} \Phi^{(n)}(x) - u^{(n)}(x) \right| \leq Ch, \quad x \in [x_m, x_{m+n}], \quad n \geq 1.$$

Случай экспоненциального пограничного слоя. В этом случае функция $\Phi(x)$ соответствует (2). Получим оценку погрешности формулы (23).

Теорема. Пусть для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция (1), $\Phi(x)$ соответствует (2), $|p^{(j)}(x)| \leq C_3$, $j \leq 2n + 1$. Тогда для некоторой постоянной C

$$\varepsilon^n \left| \frac{\Delta^n u_m}{\Delta^n \Phi_m} \Phi^{(n)}(x) - u^{(n)}(x) \right| \leq Ch, \quad x \in [x_m, x_{m+n}], \quad n \geq 1, \quad 0 \leq m \leq N - n. \quad (25)$$

Доказательство. В соответствии с [1, с. 66], справедлива формула

$$\Delta^n \Phi_m = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j \Phi_{m+n-j}.$$

Учитывая (2), имеем

$$\Delta^n \Phi_m = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j e^{-\alpha x_{m+n-j}/\varepsilon}.$$

Зададим $D_n = \alpha^n / \varepsilon^n$. Тогда G из (24) принимает вид:

$$G = \frac{h^{n-1}}{\alpha^n} \times \frac{1 - e^{-\alpha hn/\varepsilon}}{\left| \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j e^{-\alpha h(n-j)/\varepsilon} \right|} = \frac{h^{n-1}}{\alpha^n} \times \frac{1 - e^{-\alpha hn/\varepsilon}}{\left| \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i (e^{-\alpha h/\varepsilon})^i \right|}, \quad i = n - j.$$

Учитывая разложение для $(1 - x)^n$, получаем

$$G = \frac{h^{n-1}}{\alpha^n} \times \frac{1 - e^{-\alpha hn/\varepsilon}}{(1 - e^{-\alpha h/\varepsilon})^n} = \frac{h^{n-1}}{\alpha^n} \times \frac{1 + e^{-\alpha h/\varepsilon} + \dots + e^{-\alpha(n-1)h/\varepsilon}}{(1 - e^{-\alpha h/\varepsilon})^{n-1}}.$$

Из этого соотношения следует ограниченность G , равномерная по параметру ε . Следовательно, для некоторой постоянной C_2 выполняется условие (24). Тогда в силу леммы 2 справедлива оценка (25). Теорема доказана. $\square$

В соответствии с теоремой, в случае экспоненциального пограничного слоя для формулы (23) при всех конечных $n \geq 1$ справедлива оценка погрешности порядка $O(h)$, равномерная по параметру ε .

5. Результаты численных экспериментов

В проведенных экспериментах вычисляется максимальная погрешность по узлам сгущенной в четыре раза сетки. Пусть $S_k(u, x)$ — применяемая формула для вычисления производной $u'(x)$. Приведенная в таблицах 1–3 погрешность имеет вид:

$$\Delta_{\varepsilon, N} = \varepsilon \max_m \max_j |S_k(u, \tilde{x}_j) - u'(\tilde{x}_j)|, \quad m = 0, k - 1, \dots, N - k + 1,$$

где $\tilde{x}_j$ — узлы сгущенной сетки, $\tilde{x}_j \in [x_m, x_{m+k-1}]$. Зададим функцию $u(x)$ вида (1), (2):

$$u(x) = \cos(\pi x) + e^{-x/\varepsilon}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

В таблицах под $e-m$ будем понимать 10^{-m} .

В табл. 1 приведена погрешность $\Delta_{\varepsilon, N}$ при вычислении первой производной на основе дифференцирования многочлена Лагранжа $L_3(u, x)$. При $\varepsilon = h$ погрешность не уменьшается с уменьшением шага сетки h .

Таблица 1. Погрешность вычисления производной на основе $L'_3(u, x)$

ε	N					
	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
1	5.04 e-2	5.07 e-4	5.07 e-6	5.07 e-8	5.39 e-10	6.27 e-12
10^{-1}	2.06 e-2	1.36 e-3	1.63 e-5	1.66 e-7	1.67 e-9	3.65 e-11
10^{-2}	5.14 e-4	2.37 e-2	1.37 e-3	1.63 e-5	1.66 e-7	1.67 e-9
10^{-3}	5.14 e-5	2.24 e-6	2.37 e-2	1.36 e-3	1.63 e-5	1.66 e-7
10^{-4}	5.14 e-6	5.17 e-8	2.27 e-6	2.37 e-2	1.37 e-3	1.63 e-5
10^{-5}	5.14 e-7	5.17 e-9	5.17 e-11	2.27 e-6	2.37 e-2	1.37 e-3

В табл. 2 приведена погрешность $\Delta_{\varepsilon, N}$ при вычислении первой производной на основе формулы (13). Результаты вычислений согласуются с оценкой (21).

Таблица 2. Погрешность вычисления производной по формуле (13)

ε	N					
	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
1	5.39 e-2	5.42 e-4	5.42 e-6	5.42 e-8	5.75 e-10	7.35 e-12
10^{-1}	1.66 e-2	1.72 e-4	1.72 e-6	1.72 e-8	1.74 e-10	3.13 e-12
10^{-2}	4.80 e-3	1.59 e-4	1.64 e-6	1.65 e-8	1.65 e-10	3.80 e-12
10^{-3}	4.81 e-4	4.93 e-5	1.60 e-6	1.64 e-8	1.65 e-10	1.85 e-12
10^{-4}	4.81 e-5	4.93 e-6	4.93 e-7	1.59 e-8	1.64 e-10	1.66 e-12
10^{-5}	4.81 e-6	4.93 e-7	4.93 e-8	4.93 e-9	1.59 e-10	1.65 e-12

Выше показано, что погрешность классической формулы (3) может быть значительной. Рассмотрим построенный аналог этой формулы, когда в (23) $n = 1$:

$$u'(x) \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Phi_j - \Phi_{j-1}} \Phi'(x), \quad x \in [x_{j-1}, x_j]. \quad (26)$$

В табл. 3 приведена погрешность $\Delta_{\varepsilon, N}$ формулы (26). Результаты вычислений при всех ε и N согласуются с оценкой (25).

Таблица 3. Погрешность вычисления производной по формуле (26)

ε	N					
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	2.98 e-1	1.49 e-1	7.43 e-2	3.71 e-2	1.85 e-2	9.27 e-3
2^{-4}	1.11 e-1	5.169 e-2	2.48 e-2	1.22 e-2	6.02 e-3	3.00 e-3
2^{-5}	1.23 e-1	5.47 e-2	2.55 e-2	1.23 e-2	6.01 e-3	2.97 e-3
2^{-10}	1.84 e-1	9.08 e-2	4.39 e-2	2.05 e-2	9.01 e-3	3.85 e-3
2^{-11}	1.59 e-1	8.13 e-2	3.95 e-2	1.90 e-2	8.83 e-3	3.87 e-3

6. Заключение

Рассмотрен вопрос численного дифференцирования функций с большими градиентами на равномерной сетке. Для исходной функции одной переменной предполагается

справедливой декомпозиция в виде суммы регулярной составляющей и известной с точностью до множителя погранслошной составляющей, задающей основной рост функции. Исследованы разностные формулы для производных, точные на погранслошной составляющей дифференцируемой функции. В случае экспоненциального пограничного слоя при $k = n + 1$ для произвольного конечного n получены оценки погрешности порядка $O(h)$, равномерные по малому параметру ε . Приведены результаты экспериментов, согласующиеся с полученными оценками погрешностей.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. Задорин А.И. Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 3. — С. 267–275.
3. Zadorin A.I., Zadorin N.A. Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — Vol. 9. — P. 445–455.
4. Kellog R.B., Tsan A. Analysis of Some Difference Approximations for a Singular Perturbation Problem without Turning Points // Math. Comput. — 1978. — Vol. 32. — P. 1025–1039.
5. Задорин А.И., Задорин Н.А. Неполномиальная интерполяция функций с большими градиентами и ее применение // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2021. — Т. 61, № 2. — С. 179–188.
6. P'in V.P., Zadorin A.I. Adaptive formulas of numerical differentiation of functions with large gradients // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1260, iss. 4. — DOI:10.1088/1742-6596/1260/4/042003.
7. Задорин А.И., Ильин В.П. Адаптивные формулы численного дифференцирования при наличии пограничного слоя // Тр. Междунар. конференции. Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2019. — С. 144–150. — DOI: 10.24411/9999-016A-2019-10024.
8. Задорин А.И. Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 243–254.
9. Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992.
10. Kopteva N.V., Stynes M. Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem // Applied Numerical Mathematics. — 2001. — Vol. 39. — P. 47–60. — DOI:10.1016/S0168-9274(01)00051-4.
11. Shishkin G.I. Approximations of solutions and derivatives for a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equations // Comput. Math. Math. Phys. — 2003. — Vol. 43, № 5. — P. 641–657.
12. Zadorin A.I. Interpolation formulas for functions with large gradients in the boundary layer and their application // Modeling and Analysis of Information Systems. — 2016. — Vol. 23, № 3. — P. 377–384.

Поступила в редакцию 28 сентября 2022 г.

После исправления 26 октября 2022 г.

Принята к печати 23 ноября 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M.** Chislennye metody. — M.: Nauka, 1987.
2. **Zadorin A.I.** Metod interpol'yacii dlya zadachi s pograničnym sloem // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2007. — T. 10, № 3. — S. 267–275.
3. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2012. — Vol. 9. — P. 445–455.
4. **Kellog R.B., Tsan A.** Analysis of Some Difference Approximations for a Singular Perturbation Problem without Turning Points // Math. Comput. — 1978. — Vol. 32. — P. 1025–1039.
5. **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Nepolinomial'naya interpol'yaciya funkicii s bol'shimi gradientami i ee primenenie // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2021. — T. 61, № 2. — С. 179–188.
6. **Il'in V.P., Zadorin A.I.** Adaptive formulas of numerical differentiation of functions with large gradients // J. of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1260, iss. 4. — DOI:10.1088/1742-6596/1260/4/042003.
7. **Zadorin A.I., Il'in V.P.** Adaptivnye formuly chislennogo differencirovaniya pri nalichii pograničnogo sloya // Tr. Mezhdunar. konferencii. Aktual'nye problemy vychislitel'noi i prikladnoi matematiki. — Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2019. — S. 144–150. — DOI: 10.24411/9999-016A-2019-10024.
8. **Zadorin A.I.** Analiz formul chislennogo differencirovaniya na setke Shishkina pri nalichii pograničnogo sloya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2018. — T. 21, № 3. — S. 243–254.
9. **Shishkin G.I.** Setochnye approksimacii singulyarno vozmuschennykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravnenii. — Ekaterinburg: Izd-vo UrO RAN, 1992.
10. **Kopteva N.V., Stynes M.** Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem // Applied Numerical Mathematics. — 2001. — Vol. 39. — P. 47–60. — DOI:10.1016/S0168-9274(01)00051-4.
11. **Shishkin G.I.** Approximations of solutions and derivatives for a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equations // Comput. Math. Math. Phys. — 2003. — Vol. 43, № 5. — P. 641–657.
12. **Zadorin A.I.** Interpolation formulas for functions with large gradients in the boundary layer and their application // Modeling and Analysis of Information Systems. — 2016. — Vol. 23, № 3. — P. 377–384.