потоках.— Труды Амер. о-ва инж.-механиков. Теор. основы инж. расчетов, 1965, т. 87, № 2.
9. **Чжен, Линь, Оу.** Полностью развитое ламинарное течение в криволинейных каналах прямоугольного поперечного сечения.— Труды Амер. о-ва инж.-механиков. Теор. основы инж. расчетов, 1976, т. 98, № 1.
10. **Benjamin T. B.** Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid. Pt II. Experiment.— Proc. Roy. Soc. London, 1978, vol. A359, p. 27.

УДК 536.25

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ, ЛОКАЛЬНО НАГРЕВАЕМОМ СВЕРХУ

Ю. В. Саночкин

(*Москва*)

Явление термокапиллярной конвекции было рассмотрено в [1] на примере движения тонкого слоя жидкости в средней части плоской кюветы, противоположные стенки которой поддерживаются при разных температурах, в предположении постоянной толщины слоя. Уравнение переноса тепла в жидкости не привлекалось, и на свободной поверхности постулировалось линейное распределение температуры. На эту непоследовательность было обращено внимание в [2], где решена аналогичная задача о движении жидкости под действием примеси поверхностно-активного вещества. В [3] учтено влияние силы тяжести и деформации свободной поверхности жидкости в задаче [1]. Наконец, в [4] найдено точное решение уравнений свободной конвекции для плоского слоя жидкости с постоянным вдоль слоя градиентом температуры. Наряду с капиллярной рассматривалась обычная тепловая конвекция. Как и в [5], найдено, что в достаточно тонких слоях жидкости (<1 см) преобладает термокапиллярный механизм конвекции. Профиль скорости течения для случая термокапиллярного движения совпадает с полученным в [1]. Физически решение [4] соответствует мало реалистическому случаю слоя жидкости, подогреваемому снизу так, что при неоднородном распределении температуры на границах слоя поток тепла через них однороден.

Цель данной работы — рассмотрение установившегося двумерного термокапиллярного движения, возникающего в тонком слое жидкости вследствие локального нагрева ее сверху. Конвекцию за счет архимедовых сил в этом случае можно не учитывать. Поля скоростей и температуры жидкости определяются в предположении, что толщина слоя h много меньше характерного продольного размера течения l, что дает возможность воспользоваться упрощениями теории пограничного слоя. В первом приближении не будем учитывать также деформации свободной поверхности жидкости. Слой жидкости, ограниченный свободной поверхностью ($y = 0$) и твердой стенкой ($y = -h$), нагревается локально со стороны свободной поверхности. Направив ось x против градиента температуры вдоль слоя, рассмотрим конвекцию в области $x > 0$, отстоящей от места нагрева на расстоянии $\geqslant h$, где не сказываются влияние зоны поворота потока и детали осуществления способа нагрева. В соответствии с этим при $x \geqslant 0$ задаются условие $\partial T/\partial y = 0$ на свободной поверхности и разность температур $\Delta T = T_0 - T_w$ поперек слоя в начальном сечении $x = 0$. Температура дна кюветы T_w предполагается постоянной, что соответствует контакту жидкости с хорошим проводником тепла большого размера или контакту жидкой и твердой фаз одного вещества. Уравнения стационарной свободной конвекции в рассматриваемом случае и граничные условия имеют вид

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0,\ \partial p/\partial x = \eta\partial^2 u/\partial y^2,\ \partial p/\partial y = 0, \quad u\partial T/\partial x + v\partial T/\partial y = \chi\partial^2 T/\partial y^2; \tag{1}$$

$$T|_{y=-h} = T_w,\ \partial T/\partial y|_{y=0} = 0,\ \eta\partial u/\partial y|_{y=0} = d\sigma/dx = -\alpha\partial T/\partial x|_{y=0}, \quad u|_{y=-h} = v|_{y=-h} = 0,\ v|_{y=0} = 0, \tag{2}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; $\alpha = -d\sigma/dT = \mathrm{const}$. В (1) опущены инерционные члены в уравнении движения. Условия, когда ими можно пренебречь, будут указаны после получения решения, поскольку в рассматриваемой задаче нет характерной скорости. Ограничимся рассмотрением случая, когда полный поток жидкости в любом сечении равен нулю

$$\int\limits_{-h}^{0} u dy = 0.$$

Интегрируя уравнения движения и неразрывности, находим

$$u = -\frac{\alpha}{4h\eta}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=0}(3y^2 + 4hy + h^2), \; v = \frac{\alpha}{4h\eta}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{y=0} y\,(y + h)^2. \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнение теплопроводности и переходя к безразмерным переменным

$$\theta = (T - T_w)/(T_0 - T_w), \; x/h = x', \; y/h = y',$$

получим (штрихи у координат опущены)

$$G'(y)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{y=0}\frac{\partial \theta}{\partial x} + G(y)\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right)_{y=0}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{4}{3\mathrm{M}}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \tag{4}$$

где $G(y) = \frac{1}{3}\, y\,(1 + y)^2$; $\mathrm{M} = \frac{h\alpha\Delta T}{\eta\chi}$;

M — число Марангони. Уравнение (4) допускает разделение переменных $\theta = XY$, если

$$X'^2 = k^2 X, \tag{5}$$

где k — константа разделения, не равная нулю. Решения (5) имеют вид

$$X = (1 \pm kx/2)^2, \tag{6}$$

причем для убывающей с ростом x температуры жидкости следует брать решение со знаком минус. Для определения функции Y приходим, таким образом, к спектральной задаче

$$Y'' - \lambda G Y' + 2\lambda G' Y = 0, \; Y(-1) = 0, \; Y'(0) = 0 \tag{7}$$

с параметром $\lambda = 3k^2\mathrm{M}/8$. Для рассматриваемого случая достаточно ограничиться определением наименьшего положительного собственного значения λ_0, поскольку соответствующая собственная функция Y_0 не имеет узлов внутри слоя жидкости (состояния, соответствующие следующим собственным числам, рассматриваться не будут). Применим метод Галеркина. Уравнение (7) можно представить в операторной форме

$$\hat{M} Y = \lambda \hat{N} Y.$$

Оператор $\hat{N}$ не является самосопряженным и положительно определенным. Поэтому, согласно [6], следует пользоваться такими приближающими функциями w_i, для которых

$$\int\limits_{-1}^{0} w_i \hat{N} w_i dy > 0, \; \int\limits_{-1}^{0} w_i \hat{N} w_k dy \geqslant 0 \quad (i \neq k). \tag{8}$$

Не ставя задачи точного вычисления первого собственного значения и собственной функции, ограничимся двучленным приближением решения

$$Y = C_1 w_1 + C_2 w_2, \tag{9}$$

где $w_1 = 1 - y^2$, $w_2 = 1 + y^3$ удовлетворяют граничным условиям (2) и условиям (8). Подставляя (9) в (7) и исходя из требования ортогональности остатка уравнения к приближающим функциям, приходим к системе линейных уравнений Галеркина для коэффициентов C_1 и C_2. Решение характеристического уравнения дает $\lambda_0 \simeq 5{,}58$. Соответствующая собственная функция, удовлетворяющая условию $Y(0) = 1$, имеет вид

$$Y \simeq 1 - 0{,}556y^2 + 0{,}444y^3.$$

Полученное решение можно записать в виде

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 Y\left(\frac{y}{h}\right), \; u = 3v_0\left(1 - \frac{x}{l}\right) G'\left(\frac{y}{h}\right), \; v = 3v_0 \frac{h}{l} G\left(\frac{y}{h}\right), \tag{10}$$

где

$$l = \sqrt{\frac{3}{2\lambda_0}} h^{3/2} \left(\frac{\alpha\Delta T}{\eta\chi}\right)^{1/2} \simeq 0{,}52 h \sqrt{\mathrm{M}}, \; v_0 = \sqrt{\frac{\alpha\Delta T\chi}{\eta h}}. \tag{11}$$

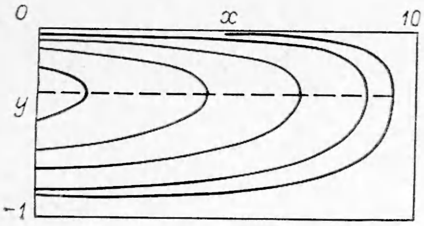
Таким образом, конвекция имеет ячеистую структуру с продольным периодом l. При $x = l$ поток тепла исчезает, поэтому характерный масштаб l представляет собой длину, на которую распространяется тепло от источника. Если в сечении $x = l$ поставить стенку, поддерживаемую при невозмущенной температуре T_∞, то решение будет описывать термокапиллярное движение в кювете, нагреваемой с другого конца.

Решение (10) на отрезке $0 < x < 2l$ описывает конвекцию в кювете, симметрично подогреваемой сверху с обоих концов. В жидкости образуются в этом случае две конвективные ячейки, вдоль границы между которыми $x = l$ скорость потока направлена вниз. Наконец, решение на интервале $-l < x < l$, если для отрицательных x использовать второе решение (6), будет описывать движение жидкости в кювете вне окрестности зоны подвода тепла при нагреве в центре. В этом случае также образуются две конвективные ячейки с восходящим потоком жидкости в месте нагрева. Характер движения жидкости останется прежним, если h будет слабо изменяться с координатой x. Поэтому нетрудно нарисовать картину конвекции в более общих несимметричных случаях. Например, в случае слоя жидкости большой длины можно представить себе уединенную конвективную ячейку размера $2l$, в пределах которой локализовано возмущение температуры и развивается течение вида (10). Возможно также следующее обобщение толкования соотношения (11) между h и l. Если слой жидкости имеет достаточную глубину и известен размер зоны l, возмущенной локальным нагревом свободной поверхности, то, согласно (11), можно оценить толщину слоя, вовлекаемого в движение. Условие $h \ll l$ или $\mathrm{M} \gg 1$ справедливо в широкой области параметров. Например, для воды и этилового спирта требуется, чтобы $h\Delta T \gg 10^{-4}$, для ртути $h\Delta T \gg 10^{-2}$.

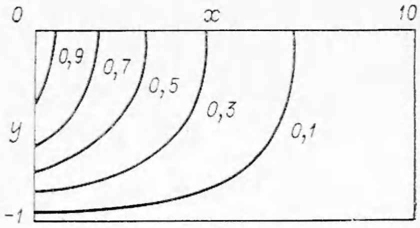
Одной из главных целей работы было определение скорости развивающего течения. Максимальная скорость v_0 достигается на поверхности и, согласно (11), зависит от всех теплофизических характеристик жидкости. В [1, 3, 4] было получено выражение

$$v_0 \sim \frac{h\alpha}{\eta} \frac{dT}{dx}, \tag{12}$$

причем градиент температуры задавался равным $(T_1 - T_2)/L$, где L — длина канала. Согласно (12), скорость движения не зависит от коэффициента теплопроводности и растет с ростом h. Последнее утверждение [1] противоречит физической картине явления. В самом деле, источником движения является касательное напряжение на свободной поверхности, обусловленное градиентом коэффициента поверхностного натяжения. Если зафиксировать указанную величину, то чем тоньше слой жидкости, вовлекаемый в движение, тем больше должна быть скорость. Объяснение этого противоречия заключается, по-видимому, в том, что, если существен конвективный перенос тепла, решения уравнения теплопроводности в жидкости с $\partial T/\partial x = \mathrm{const}$ при $y = 0$, вообще говоря, не существует. Исследование вопроса, проведенное в цитированных выше работах, не закончено и должно быть дополнено определением градиента температуры для каждого конкретного случая. Правильный ответ для нашего случая получается, если в (12) подставить $(dT/dx) = \Delta T/l$ и воспользоваться зависимостью между h и l из (11). Скорость растет с уменьшением h и увеличением χ. Зависимость от χ объясняется тем, что с ростом теплопровод-



Фиг. 1



Фиг. 2

ности уменьшается l и возрастает градиент температуры на поверхности. Линии тока (в безразмерных переменных x', y') даются уравнением

$$|G(y')|(1 - \alpha_1 x') = C,$$

где $\alpha_1 = h/l$. Они показаны на фиг. 1 для $\alpha_1 = 0{,}1$. На фиг. 2 приведены изотермы (цифры на кривых — значения θ).

В заключение отметим, что, зная v_0, можно составить выражения для критериев подобия. Например, для числа Пекле имеем

$$\mathrm{Pe} = v_0 2l/\chi = (\alpha \Delta T 2l/\eta\chi)^{2/3} = \mathrm{M},$$

т. е. числа Пекле и Марангони для рассматриваемой задачи совпадают. Тогда соотношение (11) между h и l можно представить в виде, подобном тому, как записывается толщина пограничного слоя на пластине

$$h = 2l/\sqrt{\mathrm{PrRe}},$$

где $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\mathrm{Re} = v_0 2l/\nu$ — число Рейнольдса. Таким образом, рассмотренный случай конвекции соответствует движению с большими числами Пекле. Оценим более точно условие применимости данного рассмотрения. Используя (10), можно показать, что условие

$$|u\partial u/\partial x| \ll \nu |\partial^2 u/\partial y^2|$$

выполняется, если $\mathrm{Pr} \gg 1/6$. Это неравенство удовлетворяется для большинства капельных жидкостей. К жидким металлам, где $\mathrm{Pr} \ll 1$, теория не применима. В этом случае, оказывается, важную роль играет инерция жидкости.

Автор благодарен А. В. Жаринову, обратившему внимание на рассмотренные вопросы, за обсуждения.

Поступила 14 IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1959.
2. **Chia-Shun Yih.** Fluid motion induced by surface-tension variation.— Phys. Fluids, 1968, vol. 11, N 3.
3. **Levich V. G., Krylov V. S.** Surface-tension-driven phenomena.— In: Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 1. N. Y., 1969, p. 302.
4. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости.— ПМТФ, 1966, № 3.
5. **Pearson J. R. A.** On convection cells induced by surface-tension.— J. Fluid. Mech., 1958, vol. 4, N 5.
6. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ч. II. М.: Наука, 1965.