

$$L_3 = -\frac{2a \text{Pr}(1+\eta a^2)}{63(\chi a^2-1)(1+\kappa a)} \left\{ \text{Pr} [11(1-\kappa \chi a^5) + 53a(\kappa - \chi a^3) + 42\chi a^2(1-\kappa a^2)] + \right. \\ \left. + (1+\kappa a) \left[ 4(1-\chi \nu a^4) - \frac{21(1-\nu a^2)(1-\chi \eta a^4)}{10(1-\eta a^2)} \right] \right\}.$$

Если для рассматриваемой системы  $S > 0$  (как и для системы, изучавшейся в п. 4), то колебательная нейтральная кривая непрерывна и имеет максимум при  $k = k_*$ . При  $S < 0$  у колебательной нейтральной кривой есть разрыв в точке  $k = k_*$ .

Длиноволновая асимптотика выражений (5.4), (5.5) совпадает с коротковолновой асимптотикой выражений (5.1), (5.2). При  $W^{-1/4} \ll k \ll 1$  (5.4), (5.5) переходят в соответствующие формулы [3], выведенные в пренебрежении деформацией границы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berg J. C., Acrivos A. The effect of surface active agents on convection cells induced by surface tension // Chem. Eng. Sci.— 1965.— V. 20, N 8.
2. Palmer H. J., Berg J. C. Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 51, pt 2.
3. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Термокапиллярная конвекция в двухслойных системах при наличии поверхностно-активного вещества на границе раздела // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 2.
4. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Возникновение термокапиллярной конвекции в двухслойной системе при наличии растворимого поверхностно-активного вещества // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 2.
5. Smith K. A. On convective instability induced by surfacetension gradients // J. Fluid Mech.— 1966.— V. 24, N 2.
6. Garcia-Ybarra P. L., Velarde M. G. Oscillatory Marangoni — Benard interfacial instability and capillary-gravity waves in single- and two-component liquid layers with or without Soret thermal diffusion // Phys. Fluids.— 1987.— V. 30, N 6.
7. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Возникновение колебательной термокапиллярной конвекции в системах с деформируемой границей раздела // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1991.— № 4.
8. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика.— М.: Изд-во АН СССР, 1952.

г. Пермь

Поступила 4/1 1991 г.

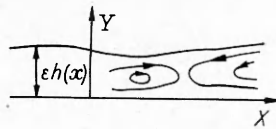
УДК 532.542.2

А. И. Мошинский

#### ДИСПЕРСИЯ ВЕЩЕСТВА В УЗКИХ КАНАЛАХ СЛОЯ СМАЗКИ

Широко используемым при рассмотрении задач тепломассопереноса в каналах различной формы при течении в них жидкости является метод сведения основных уравнений конвективной диффузии (теплопроводности) к уравнению дисперсии, имеющему в своей записи на одну независимую переменную меньше, чем исходные уравнения, и, как правило, постоянные коэффициенты. Обоснованное применение подобного подхода началось с работы Дж. Тейлора [1]. В настоящее время теория дисперсии вещества существенно развивалась и обогатилась и насчитывает огромное число публикаций (см. обзор [2]).

Основное внимание исследователи уделяют, как правило, изучению дисперсии вещества при реализации течений жидкости с простыми по форме профилями скорости, обычно одномерными. Ясно, что подобные задачи не могут охватить всего богатства гидродинамических ситуаций, встречающихся в природных условиях и промышленных устройствах. Так, при рассмотрении дисперсии вещества в криволинейных каналах обычно ограничиваются задачами в тороидальном канале [3—5], где использованы соответствующие формулы для компонент скорости из известного решения гидродинамической задачи. В практическом отноше-



Р и с. 1

нии интересны также проблемы распространения тепла и массы в приближении теории дисперсии для каналов, которые характерны при изучении течений слоев смазки в подшипниках и аналогичных ситуациях. В теории смазки имеется достаточно разработанная гидродинамическая часть проблемы, на которую будем опираться. Для определенности ниже речь пойдет только о задачах диффузии, хотя ясно, что полученные результаты легко переносятся и на проблемы переноса тепла.

Уравнения гидродинамической теории смазки представляют собой предельную форму уравнений Навье — Стокса при малости отношения характерных размеров области в различных направлениях и, как правило, малых числах Рейнольдса [6, 7]. Для анализа уравнения конвективной диффузии используем методы теории возмущений [8, 9], взяв тот же малый параметр, что и в теории смазки. Во всех приведенных ниже случаях считаем поле скоростей жидкости известным, причем не обязательно сформированным теми же механизмами, что и в задачах гидродинамики смазочного слоя, т. е. получаемые ниже уравнения массопереноса имеют более общее значение.

Характерная особенность рассматриваемых областей массообмена в данной работе — несовпадение в общем случае границ области с координатными линиями какой-либо системы координат, хотя отклонения области от «прямоугольной» в соответствующих координатах незначительные, типичные для задач гидродинамической теории смазки. Целесообразно провести исследование в трех наиболее распространенных на практике системах координат: декартовой, цилиндрической и сферической.

**1. Дисперсия вещества в слое над плоской поверхностью.** Анализ данного случая естественно вести в декартовой системе координат. Область течения представлена на рис. 1. Основное уравнение конвективной диффузии запишем в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \varepsilon^2 \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u_x^* \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \varepsilon \text{Re} \left( u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

где  $c$  — концентрация вещества;  $\varepsilon$  — малый параметр (рис. 1). Отношение характерных масштабов длины в  $Y$ - и  $X$ -направлениях и масштабов компонент скорости  $U_y$  и  $U_x$  имеют порядок  $\varepsilon$ , как это принято в теории смазки [6]. Далее,

$$x = \frac{X}{l}, \quad y = \frac{Y}{l\varepsilon}, \quad t = \frac{D\tau}{l^2}, \quad \text{Re} = \frac{\bar{U}l\varepsilon}{D}, \quad u_x^* = \frac{\langle U_x \rangle l}{D}.$$

Здесь  $X, Y$  — размерные координаты;  $l$  — характерная длина в  $X$ -направлении;  $D$  — коэффициент диффузии;  $\tau$  — время;  $U$  — характерная скорость (масштаб) вдоль оси  $X$ ;  $\text{Re}$  — число Пекле, которое считается независимым параметром, имеющим порядок единицы по  $\varepsilon$ ;  $u_x^*$  — безразмерная средняя скорость;  $\langle U_x \rangle$  — средняя скорость течения жидкости;  $u_x = (U_x - \langle U_x \rangle)/U$ .

Традиционно конвективный перенос вещества, связанный со средней скоростью потока, исключают путем перехода к движущейся со средней скоростью продольной координате. В нашем случае средняя скорость является функцией  $x$  и подобное исключение можно было бы сделать при помощи «характеристической» переменной  $\rho = \int_0^x d\xi / u_x^*(\xi) - t$ , однако если

считать, что соответствующее слагаемое в уравнении конвективной диффузии имеет порядок  $\varepsilon^2$ , то формальные выкладки приводят к тому же результату при обратном переходе к «неподвижной» системе координат.

При этом, чтобы быть последовательными, следует использовать уравнение неразрывности в виде

$$\varepsilon du_x^*/dx + \text{Re}(\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y) = 0,$$

что не повлияет на результат в нулевом приближении по  $\varepsilon$ , т. е. на форму уравнения дисперсии, так что слагаемое  $\varepsilon du_x^*/dx$  можно не учитывать. Отметим также, что выбор масштаба для времени  $l^2/D$  и порядка  $\text{Re}$  будет соответствовать процедуре последовательных приближений Тейлора [1].

Уравнение (1.1) дополняют начальное условие

$$(1.2) \quad c|_{t=0} = c_*(x, y)$$

и граничные

$$(1.3) \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=h(x)} = \varepsilon^2 h'(x) \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{y=h(x)},$$

которые выражают отсутствие диффузионного притока вещества в область течения при условии обращения скорости жидкости в нуль на поверхностях границы (нет конвективного переноса вещества на границах). Условия по переменной  $x$  несущественны для нашего анализа, поэтому их не конкретизируем.

Как было показано [10—12], в задачах данного класса достаточно ограничиться тремя приближениями по параметру  $\varepsilon$  в разложении

$$(1.4) \quad c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots$$

для вывода уравнения дисперсии нулевого приближения. Подстановка (1.4) в (1.1), (1.3) и группировка слагаемых одинакового порядка по  $\varepsilon$  дает уравнения для функций  $c_0, c_1, c_2$ , причем первые два приводят к выводу, что  $c_0$  — функция только  $x$  и  $t$  (далее обозначаемая как  $c_0 = G(x, t)$ ), а соотношение для  $c_1$  представимо (после однократного интегрирования соответствующего уравнения по  $y$ ) в виде

$$(1.5) \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = \text{Re} \Phi_x(x, y) \frac{\partial G}{\partial x}, \quad \Phi_x(x, y) = \int_0^y u_x(x, y) dy.$$

При этом в силу выделения средней скорости из общего профиля имеем  $\Phi_x(x, h) = 0$  с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon$ , что вытекает из уравнения неразрывности и приводит к согласованию с граничными соотношениями (1.3) первого порядка. Уравнение для функции  $c_2$

$$-\frac{\partial G}{\partial t} + u_x^* \frac{\partial G}{\partial x} + \text{Re} \left( u_x \frac{\partial c_1}{\partial x} + u_y \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

проинтегрируем по  $y$  в пределах  $[0, h(x)]$ , используем соответствующее условие (1.3) ( $\partial c_2/\partial y = h'(x) \partial G/\partial x$  при  $y = h(x)$ ), уравнение неразрывности и соотношение для  $c_1$ . В результате найдем

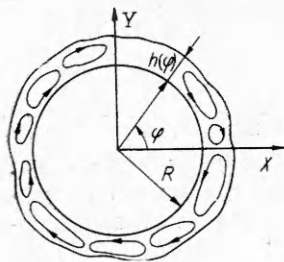
$$(1.6) \quad \frac{\partial G}{\partial t} + u_x^* \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ h(x) [\text{Re}^2 D_x(x) + 1] \frac{\partial G}{\partial x} \right\},$$

где

$$(1.7) \quad D_x(x) = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} \Phi_x^2(x, y) dy$$

— безразмерный коэффициент дисперсии (конвективная часть). На «молекулярную» часть коэффициента дисперсии повлияла геометрия области (функция  $h(x)$ ), сделав ее переменной величиной. Отметим, что в нулевом приближении по числу  $\varepsilon$  функция  $G$  представляет собой среднюю по сечению концентрацию вещества.

Начальное условие к уравнению (1.6) можно получить после построения внутреннего [8, 9] разложения и реализации процедуры сращи-



Р и с. 2

вания решений внутренней и внешней задач. Аналогично результатам [10—12] получаем

$$(1.8) \quad G|_{t=0} = G_0(x) = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} c_*(x, y) dy,$$

т. е. в нулевом приближении по  $\varepsilon$  произошло простое осреднение начального условия (1.2).

**2. Дисперсия вещества в цилиндрическом зазоре.** В отличие от п. 1 здесь используется цилиндрическая система координат, причем одной

из границ области является координатная линия  $r = R$ , а второй — линия  $r = R[1 + \varepsilon h(\varphi)]$  (рис. 2). Введя поперечную координату  $\zeta = (r - R)/\varepsilon R$ ,  $\zeta \in [0, h(\varphi)]$ , уравнение конвективной диффузии запишем в безразмерном виде

$$(2.1) \quad \varepsilon^2 \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u_\varphi^*}{1 + \varepsilon \zeta} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon \text{Pe} \left( \frac{u_\varphi}{1 + \varepsilon \zeta} \frac{\partial c}{\partial \varphi} + u_r \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right) = \\ = \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \zeta} \frac{\partial c}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon \zeta)^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} \\ (\text{Pe} = \varepsilon UR/D, t = D\tau'R^2, u_\varphi^* = \langle U_\varphi \rangle R/D).$$

Методически, так же как и в п. 1, с несущественными расчетными осложнениями уравнение (2.1) позволяет получить для функции нулевого приближения  $c_0 = G(\varphi, t)$  разложения типа (1.4) уравнение дисперсии

$$(2.2) \quad \frac{\partial G}{\partial t} + u_\varphi^* \frac{\partial G}{\partial \varphi} = \frac{1}{h(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ h(\varphi) [\text{Pe}^2 D_\varphi(\varphi) + 1] \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right\},$$

где конвективная часть коэффициента дисперсии  $D_\varphi$  определяется формулой (1.7) при замене переменной и индекса  $x$  на  $\varphi$ . Мы, по существу, получили уравнение, совпадающее с (1.6). Аналогично (1.8) выглядит и начальное условие к (2.2).

Уравнения (1.6) и (2.2) путем замены искомой функции можно привести к самосопряженному виду и далее после разделения переменных и формулировки соответствующих задач Штурма — Лиувилля строить решения достаточно общих задач методом Фурье или его обобщением на неоднородные задачи. Однако в общем случае вряд ли будут появляться исследованные в литературе обыкновенные дифференциальные уравнения задачи Штурма — Лиувилля и соответствующие специальные функции. Для (2.2) типичными являются задачи с периодическими по  $\varphi$  решениями, и, поскольку коэффициенты в (2.2) — периодические функции от  $\varphi$ , приходим к довольно слабо изученным проблемам для уравнений с периодическими коэффициентами (см., например, [13]).

Поскольку  $u_\varphi^* h$  — постоянная величина, равная расходу жидкости через слой, стационарное уравнение (2.2), так же как и (1.6), непосредственно интегрируется и далее сводится к простой квадратуре. Легко убедиться, что стационарным решением (2.2), удовлетворяющим условиям периодичности, может быть только постоянная. Значение ее нетрудно найти из закона сохранения полного количества вещества в системе

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} G(\varphi, t) h(\varphi) d\varphi = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} G(\varphi, t) h(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} G_0(\varphi) h(\varphi) d\varphi,$$

который получается из (2.2) после умножения на  $h$ , интегрирования по  $\varphi$  по периоду и использования условий периодичности. Далее, предель-

ный переход  $t \rightarrow \infty$  во втором соотношении (2.3) позволяет получить стационарное решение

$$(2.4) \quad G_{\infty} = \int_0^{2\pi} G_0(\varphi) h(\varphi) d\varphi \bigg/ \int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi,$$

зависящее от начальной функции  $G_0(\varphi)$ .

В частном случае  $h = \text{const}$ , и, когда можно считать  $u_x$  в (1.1) и  $u_{\varphi}$  в (2.1) функциями только поперечной потоку координаты, значения коэффициентов дисперсии будут не зависящими от  $x$  (или  $\varphi$ ) величинами, т. е. уравнения дисперсии (1.6) и (2.2) содержат постоянные коэффициенты. Путем выбора безразмерных координат и параметров эти уравнения можно представить в форме

$$(2.5) \quad \partial G / \partial t + n \partial G / \partial \varphi = \partial^2 G / \partial \varphi^2.$$

Уравнение (2.5) часто возникает при исследовании различных тепло-массообменных процессов, и его решения при разнообразных дополнительных условиях (условия Данквертса и т. п.) хорошо изучены (см. [14]). Однако для задачи массообмена в цилиндрическом зазоре типичными являются нетрадиционные условия периодичности решения по циклической координате  $\varphi$ :

$$(2.6) \quad G(0, t) = G(2\pi, t), \quad \partial G / \partial \varphi|_{\varphi=0} = \partial G / \partial \varphi|_{\varphi=2\pi}.$$

Поэтому приведем его решение при обычном начальном условии (1.8) (с заменой  $x$  на  $\varphi$ ). Легко проверить, что задаче (1.8), (2.5), (2.6) удовлетворяет выражение

$$(2.7) \quad G(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_0(\varphi) d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \{M_k \sin[k(\varphi - nt)] + N_k \cos[k(\varphi - nt)]\} \exp(-k^2 t),$$

где  $M_k, N_k$  — коэффициенты Фурье функции  $G_0(\varphi)$ :

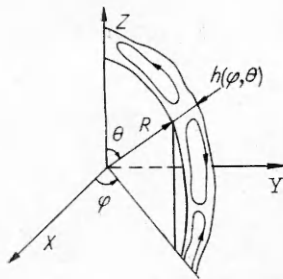
$$M_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_0(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad N_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G_0(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi.$$

Как и следовало ожидать, при  $t \rightarrow \infty$  решение (2.7) стремится к среднему значению начальной концентрации  $G_0(\varphi)$ , т. е. согласуется с (2.4) при  $h = \text{const}$ .

**3. Дисперсия вещества в сферическом зазоре.** В данном случае исследование удобно вести в сферических координатах, поскольку внутренней границей области служит координатная линия  $r = R$ . Для внешней границы имеем  $r = R[1 + \varepsilon h(\varphi, \theta)]$  (рис. 3). Как и в п. 2, в силу условия  $\varepsilon \ll 1$  целесообразно ввести координату  $\zeta = (r - R)/\varepsilon R$ ,  $\zeta \in [0, h(\varphi, \theta)]$ , типичную для гидродинамической теории смазки. Уравнение конвективной диффузии содержит на одну пространственную координату больше, чем ранее:

$$(3.1) \quad \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{u_{\theta}^*}{(1 + \varepsilon \zeta)} \frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{u_{\varphi}^*}{\sin \theta (1 + \varepsilon \zeta)} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] + \varepsilon \text{Pe} \left[ \frac{u_{\theta}}{(1 + \varepsilon \zeta)} \frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{u_{\varphi}}{\sin \theta (1 + \varepsilon \zeta)} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] = \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} + \frac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon \zeta)} \frac{\partial c}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon^2}{\sin \theta (1 + \varepsilon \zeta)^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$(\text{Pe} = UR\varepsilon/D, \quad t = D\tau/R^2, \quad u_{\varphi}^* = \langle U_{\varphi} \rangle R/D, \quad u_{\theta}^* = \langle U_{\theta} \rangle R/D).$$



Р и с. 3

Поэтому и приведение его к приближению теории дисперсии позволяет найти уравнение, содержащее две пространственные координаты и включающее три коэффициента дисперсии. Первые два соответствуют эффективной диффузии по осям  $\varphi$  и  $\theta$ , третий описывает перекрестный эффект. Выкладки несколько сложнее, чем в п. 1, но методически не отличаются. В результате, учитывая уравнение неразрывности, условие непроницаемости поверхности сферы для примеси и подобное условие (аналог второго соотношения (1.3)) на внешней границе области, получаем

$$(3.2) \quad \frac{\partial G}{\partial t} + u_{\theta}^* \frac{\partial G}{\partial \theta} + \frac{u_{\varphi}^*}{\sin \theta} \frac{\partial G}{\partial \varphi} = \frac{1}{h(\varphi, \theta)} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h(\varphi, \theta) \sin \theta (\text{Pe}^2 D_{\theta\theta}(\varphi, \theta) + 1) \frac{\partial G}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ h(\varphi, \theta) (\text{Pe}^2 D_{\varphi\varphi}(\varphi, \theta) + 1) \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right] + \frac{\text{Pe}^2}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h(\varphi, \theta) D_{\theta\varphi}(\varphi, \theta) \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h(\varphi, \theta) D_{\varphi\theta}(\varphi, \theta) \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) \right] \right\},$$

где

$$(3.3) \quad D_{ij}(\varphi, \theta) = \frac{1}{h} \int_0^h \Phi_i \Phi_j d\xi, \quad \Phi_i = \int_0^{\xi} u_i(\varphi, \theta, \zeta) d\zeta, \quad i, j = \varphi, \theta,$$

т. е. индексы  $i$  и  $j$  в (3.3) могут принимать любые из значений  $\varphi$  и (или)  $\theta$ , причем  $D_{\theta\varphi} = D_{\varphi\theta}$ . Отметим, что перекрестный эффект обязан своим происхождением только конвективному движению жидкости (нет молекулярного аналога в (3.2)).

В общем случае аналитический анализ уравнения (3.2) достаточно сложен. О возможных упрощениях (3.2) будет сказано в п. 4 при рассмотрении примеров. Сейчас же отметим, что, как и в п. 2, легко определяется значение равновесной концентрации при  $t \rightarrow \infty$ , которое находится по формуле, аналогичной (2.4):

$$G_{\infty} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} G_0(\varphi, \theta) h(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta / \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} h(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta.$$

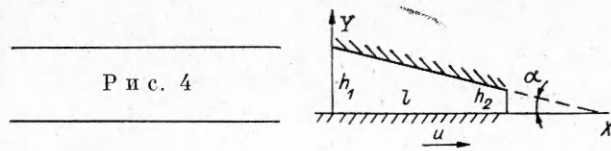
Здесь  $G_0$  — значение  $G$  при  $t = 0$ , которое находится из (1.8) при естественном переобозначении переменных.

**4. Примеры.** Полученные основные уравнения дисперсии (1.6), (2.2) и (3.2) содержат коэффициенты эффективной диффузии, которые могут быть определены, если известно решение гидродинамической задачи. Далее будем говорить только о конвективной части коэффициентов дисперсии, поскольку оставшаяся часть находится легко при известной геометрии области (функции  $h$ ), т. е. речь идет о коэффициентах, содержащих в соответствующих уравнениях множитель  $\text{Pe}^2$ . Значения коэффициентов дисперсии приведем в размерной форме, чтобы более точно отразить влияние на него тех или иных параметров.

В качестве первого примера рассмотрим известную задачу, исследованную Рейнольдсом, о движении слоя смазки между плоскими пластинками, что отвечает проблеме п. 1 при линейной функции  $h(x)$ . Здесь используем решение Рейнольдса [6], записанное в размерных переменных.

Пусть плоскость  $XOZ$  перемещается в направлении оси  $X$  со скоростью  $U$ . На некотором расстоянии от этой плоскости расположена пластинка бесконечной ширины, но ограниченной длины, наклоненная под углом  $\alpha$  к плоскости  $XOZ$ . Область течения между пластинкой и плоскостью и соответствующие параметры представлены на рис. 4, где  $h_1$ ,

Р и с. 4



$h_2$  — толщины слоя у левого и правого краев пластинки. Таким образом, для толщины слоя  $h$  находим

$$h = h_1 - X \operatorname{tg} \alpha = h_1 - mX, \quad m = \operatorname{tg} \alpha = (h_1 - h_2)/l.$$

Естественно, что характеристики течения не зависят от координаты  $Z$ .

Решение гидродинамической задачи в приближении теории смазки хорошо известно [6]. Приведем необходимые для дальнейшего его характеристики. Профиль скорости по оси  $X$

$$(4.1) \quad U_x = U(1 - Y/h) - (2\mu)^{-1}(dp/dX)(Yh - Y^2),$$

что дает выражения для средней скорости

$$(4.2) \quad \langle U_x \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h U_x dY = \frac{U}{2} - \frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dX}$$

и скорости потока относительно среднего значения

$$(4.3) \quad u_x = U_x - \langle U_x \rangle = U(1/2 - v) + h^2(dp/dX)(1 - 6v + 6v^2)/12\mu$$

( $v = Y/h$ ,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости). Градиент давления  $p$  определяется формулой [6]

$$(4.4) \quad \frac{dp}{dX} = \frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h}\right), \quad h^* = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}.$$

Для функции  $\Phi_x$ , определенной (1.5), имеем

$$(4.5) \quad \Phi_x(v) = A_x v(1 - v) - B_x v(1 - v)(2v - 1), \\ A_x = Uh/2, \quad B_x = (h^3/12\mu) dp/dX.$$

Расчет конвективной части коэффициента дисперсии по соотношению (1.7) при учете (4.5) приводит к выражению

$$(4.6) \quad D_x(X) = \frac{1}{30D} \left( A_x^2 + \frac{1}{7} B_x^2 \right) = \frac{U^2 h^2}{120D} \left[ 1 + \frac{1}{7} \left( 1 - \frac{h^*}{h} \right)^2 \right].$$

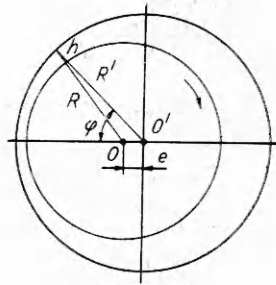
Следует заметить, что, хотя формулы (4.1)–(4.4) являются нулевым приближением по числу  $\epsilon$  решения гидродинамической задачи, для расчета коэффициента дисперсии в нулевом приближении их вполне достаточно. Это же замечание относится и к другим примерам данного пункта.

Легко видеть, что с ростом  $X$  значение  $D_x$  монотонно убывает, причем отношение этих коэффициентов в крайних точках интервала  $X \in (0, l)$  равно  $(h_1/h_2)^2$ . В частном случае постоянного  $h$  ( $h = h_1 = h_2 = \text{const}$ ) коэффициент  $D_x$  также постоянен.

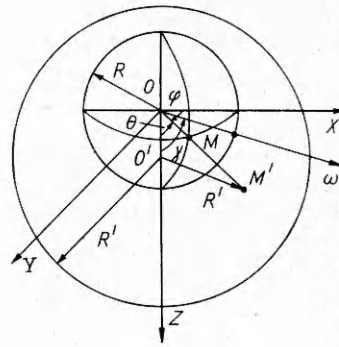
В качестве второго примера рассмотрим дисперсию вещества в зазоре цилиндрического подшипника. Гидродинамическая часть проблемы исследована Зоммерфельдом и подробно описана в [7]. Если внешняя поверхность области течения представляет собой эксцентрично расположенную окружность относительно внутренней, то с точностью до слагаемых второго порядка по  $\epsilon$  ее уравнением будет [7] (рис. 5)

$$(4.7) \quad h(\varphi) = \epsilon(1 - \lambda \cos \varphi), \quad \varphi \in (0, 2\pi),$$

где  $\lambda = e/\epsilon$ ;  $\epsilon = R' - R$ , т. е.  $\epsilon$  — размерный параметр, отличающийся от такового в п. 2 множителем  $R$ . Предполагается, что цилиндры имеют большую длину в направлении осей так, что концевыми эффектами можно пренебречь, причем внутренний цилиндр вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega$ .



Р и с. 5



Р и с. 6

Как показано в [7], соотношения, заменяющие (4.1)–(4.4), а значит, и (4.5), (4.6), сохраняют свой вид и в данном примере при заменах

$$U \rightarrow \omega R, \quad \frac{dp}{dX} \rightarrow \frac{1}{R} \frac{dp}{d\varphi}, \quad h^* \rightarrow \frac{2Q}{\omega R} - \frac{2\varepsilon(1-\lambda^2)}{2+\lambda^2}$$

( $Q$  — расход жидкости через зазор), а также смене индекса  $x$  на  $\varphi$  у величин  $A_x$ ,  $B_x$ ,  $\Phi_x$  и  $D_x$ . Таким образом, значение коэффициента дисперсии фактически получено — формула (4.6) при указанных заменах.

Третий пример соответствует задаче п. 3 и относится к дисперсии вещества в зазоре сферического подшипника между эксцентрично расположенными сферами при вращении внутренней и неподвижности внешней. Гидродинамическая задача в приближении теории смазки решена в [7]. Точнее, там решена несколько более общая задача при наличии поступательного движения внутренней сферы. Данное обстоятельство приводит к изменению геометрии области течения, т. е. если для вычисления равнодействующей силы и момента силы, действующих на внутреннюю сферу, это несущественно, поскольку для этой цели используется мгновенное поле скоростей, то для задач теплопереноса в зазоре, протекающих в определенном интервале времени, изменение границ области приводит к некоторому усложнению анализа (связанного с учетом нового масштаба времени изменения формы области), что здесь не рассматривается. Поэтому при применении ниже результатов [7] в соответствующих формулах произведем упрощение, полагая вектор скорости поступательного движения равным нулю.

Следуя [7], рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя эксцентрично расположенными сферами с центрами  $O$ ,  $O'$  (рис. 6) и радиусами  $R$  и  $R'$  ( $R' > R$ ). Разность радиусов  $\varepsilon = R' - R$  будем считать удовлетворяющей неравенствам  $\varepsilon/R, \varepsilon/R' \ll 1$ . Используем сферическую систему координат  $r, \theta, \varphi$ , приняв ось  $OZ$ , проведенную через центры сфер, за полярную ось, а плоскость  $OXZ$  начала отсчета вдоль  $\varphi$  проведем через вектор угловой скорости  $\omega$  (в тех случаях, когда вектор  $\omega$  параллелен оси  $Z$ , отсчет  $\varphi$  произволен) (рис. 6). Поперечный размер полости в некоторой точке  $M$ , определяемой координатами  $\theta$  и  $\varphi$ , обозначим  $h(\varphi, \theta)$  и найдем как расстояние между точками  $M$  и  $M'$  на внутренней и внешней сферах, расположенных на одном и том же радиусе, проведенном из центра  $O$  внутренней сферы. Тогда с ошибкой порядка  $(\varepsilon/R)^2$  будет справедливо равенство, аналогичное (4.7):  $h = \varepsilon(1 + \lambda \cos \theta)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , т. е.  $h$  не зависит от  $\varphi$ . При этом эксцентриситет  $e$  определяется как расстояние между центрами сфер  $OO'$  (рис. 6).

Структура решения гидродинамической задачи, согласно результатам [7], аналогична представленной формулами (4.1)–(4.3), только теперь имеются две компоненты скорости  $U_\varphi$  и  $U_\theta$ , соответственно две компоненты средней скорости и т. д. Так, для величин, отвечающих координатам



там  $\varphi$  и  $\theta$ , в соотношениях (4.1)–(4.3) необходимо провести следующие замены:

$$u_x \text{ на } \frac{u_\varphi}{u_\theta}, \quad \frac{dp}{dX} \text{ на } \frac{(R \sin \theta)^{-1} \partial p / \partial \varphi}{R^{-1} \partial p / \partial \theta}, \quad U \text{ на } \frac{U_\varphi^0}{U_\theta^0}, \quad A_x \text{ на } \frac{A_\varphi}{A_\theta}, \quad B_x \text{ на } \frac{B_\varphi}{B_\theta},$$

$$\Phi_x \text{ на } \frac{\Phi_\varphi}{\Phi_\theta}.$$

Для давления  $p$  и компонент скорости  $U_\varphi^0, U_\theta^0$  с учетом отмеченного выше упрощения, соответствующие формулы [7] приводятся к виду

$$(4.8) \quad p = - \frac{6\mu R^2 \omega \varepsilon \sin \gamma (2 + \lambda \cos \theta) \sin \theta \sin \varphi}{\varepsilon^3 (4 + \lambda^2) (1 + \lambda \cos \theta)^2},$$

$$U_\varphi^0 = \omega R [\cos \gamma \sin \theta - \sin \gamma \cos \theta \cos \varphi], \quad U_\theta^0 = -\omega R \sin \gamma \sin \varphi$$

( $\omega$  — величина вектора угловой скорости,  $\gamma$  — угол, образованный полярной осью и вектором  $\omega$ ).

Вычислив производные от давления  $p$  (4.8) и подставив в формулы (3.3), получим для диагональных элементов матрицы коэффициентов дисперсии выражения (4.6) со сменой обозначений:

$$(4.9) \quad D_{\varphi\varphi} = \frac{[\omega R \varepsilon (1 + \lambda \cos \theta)]^2}{120D} \left\{ (\cos \gamma \sin \theta - \sin \gamma \cos \theta \cos \varphi)^2 + \frac{[\lambda \sin \gamma \cos \varphi (2 + \lambda \cos \theta)]^2}{7(4 + \lambda^2)^2} \right\},$$

$$D_{\theta\theta} = \frac{[\omega R \varepsilon \sin \gamma \sin \varphi]^2}{120D} \left[ \frac{\lambda^2 (3\lambda + 2 \cos \theta + \lambda^2 \cos \theta)^2}{7(4 + \lambda^2)^2} + (1 + \lambda \cos \theta)^2 \right],$$

а для перекрестного  $D_{\theta\varphi}$  — формулу

$$(4.10) \quad D_{\theta\varphi} = \frac{1}{30D} \left( A_\theta A_\varphi + \frac{B_\theta B_\varphi}{7} \right) = \frac{[\omega R \varepsilon \sin \gamma (1 + \lambda \cos \theta)]^2 \sin \varphi}{120D} \times$$

$$\times \left[ \frac{\lambda^2 \cos \varphi (2 + \lambda \cos \theta) (3\lambda + 2 \cos \theta + \lambda^2 \cos \theta)}{7(1 + \lambda \cos \theta) (4 + \lambda^2)^2} + \cos \theta \cos \varphi - \operatorname{ctg} \gamma \sin \theta \right].$$

Заметное упрощение формул (4.9), (4.10) происходит, когда полярная ось совпадает по направлению с осью вращения. При этом  $\sin \gamma = 0$  и из (4.9), (4.10) имеем  $D_{\theta\varphi} = 0$ ,  $D_{\theta\theta} = 0$ ,  $D_{\varphi\varphi} = [\omega R \varepsilon (1 + \lambda \cos \theta) \times \sin \theta]^2 / 120D$ . Далее, легко видеть, что  $u_\theta^* = 0$ , и поэтому (3.2), по существу, сводимо к одномерному по координатам уравнению (2.5) при соответствующих преобразованиях переменных, поскольку в этом пункте учитываем в (3.2) только те дисперсионные слагаемые, которые содержат множитель  $Re^2$ , при том факте, что переменная  $\theta$  начинает играть роль параметра в этом уравнении. Другое возможное упрощение (3.2) — наличие концентрических сфер, т. е.  $\lambda = 0$ , сводится к уже рассмотренному случаю, поскольку единственным выделенным направлением в задаче становится ось вращения, и поэтому ее целесообразно принять за полярную ось, т. е. взять  $\gamma = 0$ . При этом считаем, что вектор угловой скорости не меняется во времени. Иначе  $\omega$  и  $\gamma$ , а также начало отсчета долготы  $\varphi$  должны быть функциями времени. В последнем случае во все формулы следует подставлять вместо  $\varphi$  величину  $\varphi - \varphi_0(t)$ . Здесь возникают проблемы обоснования как гидродинамических соотношений для компонент скорости, поскольку их находили из решения стационарной задачи, так и соотношений масштабов характерных времен в массообменной задаче. Ясно, что если вектор  $\omega$  меняется достаточно медленно, то полученные уравнения имеют право на существование.

**5. Замечания.** В рассмотренных в п. 4 примерах возникают довольно сложные для точного анализа дифференциальные уравнения в частных

производных с переменными коэффициентами. Однако в случае малого эксцентриситета и т. п., точнее, при  $\lambda < 1$  можно эффективно применять методы возмущений по этому параметру для поиска приближенного решения. Заметим, что коэффициенты дисперсии  $D_x$ ,  $D_\varphi$  и т. п. не имеют особенностей внутри области изменения независимых переменных. В таком случае для примеров п. 4 уравнения нулевого приближения, по существу, сводятся к (2.5), а следующие приближения будут содержать источник слагаемые, что особых сложностей в построении решений не вызовет. При периодических граничных условиях (2.6) опорным решением нулевого приближения служит (2.7).

Для цилиндрического подшипника при течении слоя смазки при малых числах Рейнольдса Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным получено [6, 15] решение гидродинамической задачи без упрощающих предположений теории смазки на основе бигармонического уравнения для функции тока  $\psi$ . Ими использовались биполярные координаты  $\xi$  и  $\eta$ , связанные с декартовыми соотношениями  $X = a \operatorname{sh} \eta / (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)$ ,  $Y = a \sin \xi / (\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)$  ( $a$  — геометрический параметр). При этом внутреннему и внешнему цилиндрам отвечают координаты  $\eta_0$  и  $\eta_1$  соответственно. Дисперсионное уравнение для анализа массопереноса в данном цилиндрическом зазоре может быть найдено опробированным выше и в [10—12] методом. Оно имеет вид

$$(5.1) \quad b(\xi) \frac{\partial G}{\partial t} + Q \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (\operatorname{Pe}^2 D_\xi(\xi) + 1) \frac{\partial G}{\partial \xi} \right],$$

где

$$(5.2) \quad D_\xi(\xi) = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \psi_*^2 d\eta, \quad b(\xi) = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d\eta}{(\operatorname{ch} \eta - \cos \xi)^2},$$

а  $\psi_*$  — функция тока за вычетом составляющей функции тока среднего движения. Она легко находится из формул, представленных в [6, 15], которые являются достаточно громоздкими, поэтому их не приводим. Последнее обстоятельство затрудняет расчет первого интеграла (5.2) (второй считается элементарно), и, по-видимому, его целесообразно находить численным способом при решении тепломассообменных задач на основе уравнения (5.1).

Относительно применимости предложенных уравнений (как и теории дисперсии) необходимо заметить, что полное математическое обоснование уравнений теории дисперсии проведено только для простейших случаев при течении жидкости в круглой и «плоской» призматических трубах [16, 17], где было получено сначала точное решение, а затем после определенного предельного перехода выведено уравнение дисперсии. В подавляющем же большинстве работ по теории дисперсии приводятся различные процедуры разложений в ряды и т. п. без математически четкого установления пределов применимости разложений. Таким образом, в настоящее время обоснование теории дисперсии вещества носит скорее физический, чем математический характер.

Методика построения уравнений дисперсии на основе метода малого параметра имеет, на наш взгляд, определенные преимущества по сравнению с другими подходами и применима в более широком диапазоне изменения параметров и переменных, чем можно было бы полагать априори. Данная процедура проверялась на ряде исследованных проблем теории дисперсии вещества и приводила в главном приближении к тем же результатам, что и другие методы. Кроме того, использованный подход вывода уравнений дисперсии дает естественный и систематический способ построения поправок к основному приближению согласно хорошо разработанным приемам методов возмущений. Все сказанное позволяет подходить формально к методу малого параметра в задачах данного класса и использовать полученные уравнения не только при малых значениях  $\varepsilon$ ,

тем более, что физическое значение имеет произведение величины соответствующей безразмерной производной на упомянутый параметр в определенной степени. Установленный в литературе [1, 2 и др.] асимптотический характер дисперсионного описания процессов приводит к убыванию со временем соответствующих производных в уравнениях, подобных (1.1), (2.1) и (3.1).

Отмеченные выше обстоятельства тесно связаны с соотношением между средней и характерной скоростями переноса, которое, согласно (1.1) и т. п., для обоснованности выводов теории должно быть порядка  $\varepsilon$ . Заметим, однако, что в формировании дисперсионных эффектов участвуют только слагаемые со множителями  $Pe$  в (1.1), а другие, которые знакопеременны, определенным образом осредняются (например, (1.5), (1.7)) и в конечном уравнении дисперсии типа (1.6) сопровождают вторую производную по координатам. Это как бы выравнивает значимость переноса вещества потоком со средней скоростью и дисперсионным механизмом, что во многих других (отличных от нашего) подходах к выводу уравнений дисперсии считается само собой разумеющимся.

Следует отметить также новые результаты по построению коэффициентов дисперсии в потоке между коаксиальными цилиндрами при наличии течения не только по направлению  $\varphi$ , но и вдоль оси цилиндров [18], где получены три независимые компоненты матрицы коэффициентов эффективной диффузии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing through a tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1953.— V. 219, N 1137.
2. Дильман В. В., Кронберг А. Е. Релаксационные явления при продольном перемешивании // ТОХТ.— 1983.— Т. 17, № 5.
3. Erdogan M. E., Chatwin P. C. The effects of curvature and buoyancy on the laminar dispersion of solute in a horizontal tube // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 29, pt 3.
4. Jonson M., Kamm R. D. Numerical studies of steady flow dispersion a low Dean number in a gently curving tube // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 172.
5. Daskopoulos Ph., Lenhoff A. M. Dispersion coefficient for laminar flow in curved tubes // AIChE J.— 1988.— V. 34, N 12.
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.— М.: ГИТТЛ, 1955.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1987.
8. Найфэ А. Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.
9. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
10. Мошинский А. И. Эффективная диффузия динамически пассивной примеси в узких траншеях // ПМТФ.— 1987.— № 3.
11. Мошинский А. И. Некоторые вопросы дисперсии примеси в круглой трубе // ИФЖ.— 1987.— Т. 53, № 2.
12. Мошинский А. И. Диффузионная модель при наличии циркуляционных зон в аппаратах // ТОХТ.— 1988.— Т. 22, № 3.
13. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.
14. Brenner H. The diffusion model of longitudinal mixing in beds of finite length. Numerical values // Chem. Engng. Sci.— 1962.— V. 17.— P. 229.
15. Жуковский Н. Е., Чаплыгин С. А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником // Избранные труды по механике и математике.— М.: ГИТТЛ, 1954.
16. Уфлянд Я. С. Точное решение задачи нестационарной конвективной диффузии в цилиндре // ЖТФ.— 1987.— Т. 57, № 2.
17. Уфлянд Я. С. Точное решение задачи нестационарного конвективного теплообмена в плоском канале // ИФЖ.— 1988.— Т. 54, № 6.
18. Smith R. Shear along a rotating axle in a closely fitting shaft // J. Fluid Mech.— 1990.— V. 219.— P. 647.

г. Санкт-Петербург

Поступила 5/XI 1990 г.,  
в окончательном варианте — 23/IV 1991 г.