

AMS subject classification: 65N50, 65N30

О вырождающихся тетраэдрах, получаемых в результате красных измельчений тетраэдрических разбиений*

С. Коротов¹, М. Крижек²

¹Department of Computer Science, Electrical Engineering and Mathematical Sciences, Faculty of Engineering and Science
Western Norway University of Applied Sciences Postbox 7030, 5020 Bergen, Norway

²Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences Žitná 25, 115 67 Prague 1, Czech Republic
E-mails: sergey.korotov@hvl.no, smkorotov@gmail.com (Коротов С.), krizek@cesnet.cz (Крижек М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 14, 2021.

Коротов С., Крижек М. О вырождающихся тетраэдрах, получаемых в результате красных измельчений тетраэдрических разбиений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 4. — С. 383–392.

Мы анализируем красные измельчения тетраэдрических разбиений и доказываем, что мера вырожденности некоторых получаемых тетраэдров может стремиться к бесконечности, если измельчения построены ненадлежащим образом. Показано, что в этом случае условие максимального угла может не выполняться.

DOI: 10.15372/SJNM20210403

Ключевые слова: тетраэдры Чжана, двугранный угол, мера вырожденности, красное измельчение, условие максимального угла.

Korotov S., Křížek M. On degenerating tetrahedra resulting from red refinements of tetrahedral partitions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 4. — P. 383–392.

We analyse red refinements of tetrahedral partitions and prove that the measure of degeneracy of some produced tetrahedra may tend to infinity if refinements are constructed in an inappropriate way. The maximum angle condition is shown to be violated in these cases as well.

Keywords: Zhang tetrahedra, dihedral angle, measure of degeneracy, red refinement, maximum angle condition.

Сердечно посвящаем профессору Иво Бабушке в связи с его 95-летием.

1. Введение

Красные измельчения плоских треугольных разбиений выполняются просто с помощью срединных линий. Таким образом, каждый треугольник делится на четыре конгруэнтных подтреугольника, которые подобны исходному треугольнику, т. е. их формы, очевидно, не вырождаются. Для красных измельчений тетраэдральных разбиений мы

*Эта статья была поддержана грантом № 20-01074S Агентства по грантам Чешской Республики и RVO 67985840 Чешской Республики.

также используем срединные линии треугольных граней (см. рисунок 1). Однако в отличие от двумерного случая, не каждый тетраэдр может быть разделен, вообще говоря, на более мелкие конгруэнтные тетраэдры, все из которых подобны исходному тетраэдру при использовании метода красного измельчения. В действительности, только известный тетраэдр Симмервиля может быть разделен на 8 подобных и конгруэнтных тетраэдров (см. [10, 11, 14, 18]). Более того, стратегия красного измельчения даже на каждом шаге измельчения не является единственной. Однако все последующие разбиения всегда являются вложенными.

Алгоритм красного разбиения имеет множество применений в методах конечных элементов и многосеточных методах. Вложенные разбиения симплицеальных сеток необходимы для иерархических методов и также для методов декомпозиции областей. Однако при использовании адаптивных методов красные измельчения (и подходящие последующие измельчения) должны выполняться осторожно, чтобы получаемые в результате тетраэдры удовлетворяли условию максимального угла (см. (6), (7) ниже). Тогда мы не потеряем оптимальные свойства аппроксимации тетраэдрических разбиений [3, 4, 7, 12, 13, 17], и мы можем использовать такие разбиения, например, для метода конечных элементов.

В этой статье будет продемонстрировано, что в процессе произвольных красных измельчений некоторые тетраэдрические элементы могут вырождаться, и даже относительно слабое условие максимального угла может быть нарушено. Для этой цели в пункте 3 подробно анализируется класс тетраэдров, введенный С. Чжаном в [18], который представляет особый тип вырожденного поведения так называемых игольчатых элементов из списка общих тетраэдрических вырождений Эдельсбруннера из [6].

2. Предварительная информация

Для данного тетраэдра T пусть

$$h_T = \text{diam } T. \quad (1)$$

Кроме того,

$$r_T = \frac{3 \text{vol}_3 T}{\text{vol}_2 \partial T} \quad (2)$$

есть радиус вписанного в T шара, где $\text{vol}_3 T$ — трехмерный объем T , ∂T — граница T , $\text{vol}_2 \partial T$ — общая площадь поверхности T и r_T называется *внутренний радиус* T .

В этой статье тетраэдрические разбиения ограниченной многогранной области Ω обозначены \mathcal{T}_h , где стандартный параметр дискретизации h задается следующим образом: $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}_{h \rightarrow 0}$ тетраэдрических разбиений \mathcal{T}_h ограниченной многогранной области (см. [4, с. 16]). Его существование доказано в [11].

Определение 2.1. Семейство $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}_{h \rightarrow 0}$ разбиений на тетраэдры считается *регулярным*, если существует постоянная $\varkappa > 0$ такая, что для любого $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ и любого $T \in \mathcal{T}_h$ мы имеем

$$\varkappa h_T \leq r_T. \quad (3)$$

Определение 2.2. Пусть T — произвольный тетраэдр. Тогда соотношение

$$\sigma_T = \frac{h_T}{r_T} \quad (4)$$

называется *мерой вырожденности* T .

Ясно, что для вырожденных тетраэдров σ_T принимает большие значения.

Однако $\sigma_T \leq \varkappa^{-1}$ для всех $T \in \mathcal{T}_h$ и всех разбиений \mathcal{T}_h регулярного семейства \mathcal{F} . Отметим, что в литературе имеется несколько других подобных определений регулярности и вырожденности тетраэдрических (и симплицальных) элементов (см., например, [4]).

Пусть дано семейство $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}_{h \rightarrow 0}$ тетраэдральных разбиений. Если оно является регулярным (см. (3)), то мы получим оптимальный порядок интерполяции с использованием стандартного обозначения пространств Соболева [5]:

$$\|v - \pi_h v\|_{1,\Omega} \leq Ch|v|_{2,\Omega} \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad (5)$$

где $\pi_h v$ — линейный интерполянт, определяемый обычным способом $(\pi_h v)|_T = \pi_T v$ для всех тетраэдров $T \in \mathcal{T}_h$, а $\pi_T v$ — линейная функция, имеющая такие же значения в вершинах T , как v . Однако оптимальный порядок интерполяции $O(h)$ в $H^1(\Omega)$ -норме линейных тетраэдральных элементов все еще сохраняется при следующем более слабом условии (см. [4] или замечание 2.1): существует постоянная $\gamma_0 < \pi$ такая, что для любого тетраэдра $T \in \mathcal{T}_h$ и любого $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ мы имеем

$$\gamma_T \leq \gamma_0 \quad (6)$$

и

$$\varphi_T \leq \gamma_0, \quad (7)$$

где γ_T — максимальный угол всех треугольных граней тетраэдра T , а φ_T — максимальный двугранный угол между гранями T . Мы говорим, что семейство \mathcal{F} удовлетворяет *условию максимального угла*, если (6) и (7) верно. В соответствии с [12] два условия (6) и (7) являются независимыми.

Замечание 2.1. Регулярность семейства тетраэдрических разбиений означает, что условие максимального угла для этого семейства верно (см. [4, с. 25]). Однако нетупоугольные игольчатые тетраэдры с вершинами $(0, 0, 0)$, $(h, 0, 0)$, $(0, h^2, 0)$ и $(0, 0, h^2)$ не удовлетворяют условию регулярности (3), но удовлетворяют условию максимального угла (6), (7) для $h \rightarrow 0$. Их мера вырожденности, очевидно, стремится к бесконечности ввиду (1) и (2).

Замечание 2.2. Александр Женишек первым доказал (см. [15, с. 365]), что линейный интерполянт $\pi_T v$ не сходится к гладкой функции v в H^1 -норме, вообще говоря, когда максимальный угол треугольных элементов стремится к π . Его пример, а также другие представленные позднее примеры, подтверждают тот факт, что условие максимального угла [1] — в некотором смысле пороговое геометрическое условие, налагаемое на симплицальные элементы в теории интерполяции. В статье [16] Женишек показывает, как использовать треугольники, удовлетворяющие условию максимального угла для описания границ с *точками заострения* (также называемыми *точками возврата*).

3. Вырожденные тетраэдры при красных измельчениях

Лемма 3.1. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр, и пусть M_i — срединные точки его ребер, как показано на рис. 1. Тогда расстояние между срединными точками

двух противоположных ребер, например, $M_1 \in AB$ и $M_4 \in CD$, задается следующим образом:

$$|M_1M_4| = \frac{1}{2} \sqrt{|AC|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 - |AB|^2 - |CD|^2}. \quad (8)$$

Для подробного доказательства см. [4, с. 90].

В дальнейшем рассмотрим красные измельчения правильного тетраэдра. При разбиении его внутренних октаэдров всегда самыми длинными диагоналями на каждом шаге (M_1M_4 или M_2M_5 или M_3M_6 , см. рис. 1), мы получим некоторые особые тетраэдры, формализованные в следующем определении (см. [18, с. 545]). В теореме 3.1 мы показываем, что они ненадлежащим образом вырождаются во время красных измельчений. Кроме того, в теореме 3.2 мы показываем, что эти тетраэдры не удовлетворяют даже более слабому условию максимального угла (6), (7). Таким образом, на практике нам следует избегать такого выбора (или случайного отбора) пространственных диагоналей.

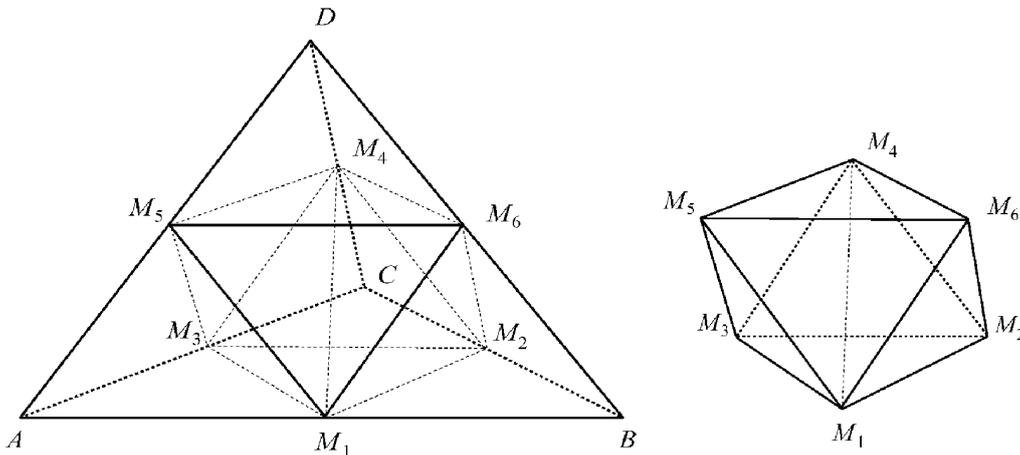


Рис. 1. Красное измельчение тетраэдра $ABCD$ с внутренним октаэдром $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$

Определение 3.1. Пусть $A_0B_0C_0D_0$ — правильный тетраэдр. Для $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ рекурсивно определим следующие срединные точки:

$$A_{k+1} = \frac{1}{2}(B_k + C_k), \quad B_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + C_k), \quad C_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + B_k), \quad (9)$$

и

$$D_{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(A_k + D_k), & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ \frac{1}{2}(B_k + D_k), & \text{если } k \text{ четное.} \end{cases} \quad (10)$$

Тогда все $A_kB_kC_kD_k$, $k = 1, 2, \dots$, называются *тетраэдрами Чжана*. Они называются так при любом переносе, вращении, отражении и масштабировании. Их размер не имеет значения, но важна их форма, как мы узнаем из теорем 3.1 и 3.2.

Лемма 3.2. Рассмотрим последовательность тетраэдров Чжана, полученную путем (9), (10) из первоначального правильного тетраэдра с $|A_0B_0| = 1$. Тогда для любого $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ длины ребер A_kB_k , A_kC_k , B_kC_k , A_kD_k , C_kD_k , B_kD_k , умноженные на коэффициент масштабирования 2^k , равны

$$\begin{aligned} & \{1, 1, 1, \sqrt{c_k}, \sqrt{c_{k-1}}, \sqrt{c_{k-2}}\}, \quad \text{если } k \text{ четное, и} \\ & \{1, 1, 1, \sqrt{c_{k-2}}, \sqrt{c_{k-1}}, \sqrt{c_k}\}, \quad \text{если } k \text{ нечетное,} \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$c_{2j} = j^2 + j + 1 \quad \text{и} \quad c_{2j+1} = j^2 + 2j + 2 \quad \text{для } j = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Доказательство. Из определения (9) мы видим, что $A_k B_k C_k$ — равносторонние треугольники с $|A_k B_k| = 2^{-k}$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ (см. рис. 2).

Согласно (8), самое длинное ребро тетраэдра $A_1 B_1 C_1 D_1$ — это

$$|B_1 D_1| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 - 1^2 - 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad (13)$$

а длина других ребер $\frac{1}{2}$. Аналогичным образом для следующего тетраэдра Чжана $A_2 B_2 C_2 D_2$ мы получим

$$|A_2 D_2| = \frac{1}{4} \sqrt{3}, \quad |C_2 D_2| = \frac{1}{4} \sqrt{2}, \quad (14)$$

а длина остальных ребер $\frac{1}{4}$. Следовательно, первое соотношение в (11) удовлетворяется для $k = 2j = 2$, и мы имеем $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$.

Далее мы будем действовать по индукции. Пусть (11) верно для некоторого четного целого числа $k = 2j \geq 2$. Тогда в соответствии с (8), (10) и (12) для пространственной диагонали $B_{k+1} D_{k+1}$ мы получим

$$\begin{aligned} 2^{k+1} |B_{k+1} D_{k+1}| &= \sqrt{1 + c_k + 1 + c_{k-1} - 1 - c_{k-2}} \\ &= \sqrt{1 + j^2 + j + 1 + 1 + (j-1)^2 + 2(j-1) + 2 - 1 - (j-1)^2 - (j-1) - 1} \\ &= \sqrt{j^2 + 2j + 2} = \sqrt{c_{k+1}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того, согласно (9) и (10), мы находим, что ребро $A_{k+1} D_{k+1}$ — это срединная линия, параллельная $C_k D_k$ (см. рис. 1), т. е.

$$2^{k+1} |A_{k+1} D_{k+1}| = 2^k |C_k D_k| = \sqrt{c_{k-1}}.$$

Аналогичным образом мы получим оставшееся соотношение

$$2^{k+1} |C_{k+1} D_{k+1}| = 2^k |A_k D_k| = \sqrt{c_k}.$$

Доказательство для нечетного $k = 2j + 1 \geq 3$ проводится аналогичным образом. \square

Лемма 3.3. Для тетраэдров Чжана T_k , определяемых путем (9), (10), мы имеем $h_{T_k} \rightarrow 0$ для $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно (11) и (12), для четного $k = 2j$ мы имеем

$$h_{T_k} = \text{diam } T_k = |A_k D_k| = \frac{\sqrt{c_k}}{2^k} = \frac{\sqrt{j^2 + j + 1}}{2^{2j}} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В случае $k = 2j + 1$ действуем аналогичным образом. \square

Лемма 3.4. Конструкция (9), (10) дает тетраэдры, получаемые из красных измельчений первоначального правильного тетраэдра, когда самая длинная диагональ внутренних октаэдров взята для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Случаи с $k = 0, 1$ следуют из (13) и (14). Согласно (8) и строгих неравенств $c_{k-2} < c_{k-1} < c_k$, мы находим, что остальные две пространственные диагонали короче диагоналей в (15) для любого четного $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} 2^{k+1}|A_{k+1}U_{k+1}| &= \sqrt{1 + c_{k-1} + 1 + c_{k-2} - 1 - c_k} \\ &< 2^{k+1}|C_{k+1}V_{k+1}| = \sqrt{1 + c_k + 1 + c_{k-2} - 1 - c_{k-1}} \\ &< 2^{k+1}|B_{k+1}D_{k+1}| = \sqrt{1 + c_k + 1 + c_{k-1} - 1 - c_{k-2}}, \end{aligned}$$

где $U_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + D_k)$ и $V_{k+1} = \frac{1}{2}(C_k + D_k)$ — срединные точки (см. рис. 2 и 3). Аналогичным образом мы можем исследовать случай, когда $k \geq 3$ нечетное. Следовательно, при выборе диагоналей октаэдров мы всегда выбираем самую длинную диагональ. \square

Лемма 3.5. Пусть T — произвольный тетраэдр, и пусть r — радиус вписанного шара. Тогда

$$r < \rho_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (16)$$

где ρ_i — радиусы вписанных окружностей четырех треугольных граней F_i тетраэдра T .

Доказательство. Пусть даны $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ и пусть O — центр вписанного шара B в T . Рассмотрим плоскость P , проходящую через O и параллельную F_i . Тогда окружность $B \cap P$ имеет радиус r и находится в треугольнике $T \cap P$. Следовательно,

$$r \leq \rho, \quad (17)$$

где ρ — радиус окружности, вписанной в $T \cap P$. Поскольку треугольник $T \cap P$ подобен F_i , но меньше F_i , мы получим $\rho < \rho_i$. Отсюда и из (17) мы получим (16). \square

Теорема 3.1. Мера вырожденности тетраэдров Чжана стремится к ∞ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Сначала пусть k четное, $k = 2(j + 1)$, и $j = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим треугольную грань $A_k B_k D_k$ тетраэдра Чжана $A_k B_k C_k D_k$, как показано на рис. 2 и 3. Обозначим через β_k угол $\angle A_k B_k D_k$. Тогда согласно теореме косинусов, определению 3.1 и лемме 3.2, мы получим

$$(j + 1)^2 + (j + 1) + 1 = (j^2 + j + 1) + 1 - 2\sqrt{j^2 + j + 1} \cos \beta_k.$$

Следовательно,

$$\cos \beta_k = -\frac{2j + 1}{2\sqrt{j^2 + j + 1}} < -\frac{2j + 1}{2\sqrt{j^2 + 2j + 1}} = -\frac{2j + 1}{2j + 2}. \quad (18)$$

Поскольку обратная функция \arccos уменьшается, с использованием (18) мы находим, что

$$\beta_k \geq \arccos\left(-\frac{2j + 1}{2j + 2}\right) \rightarrow \arccos(-1) = \pi \quad (19)$$

при $k \rightarrow \infty$.

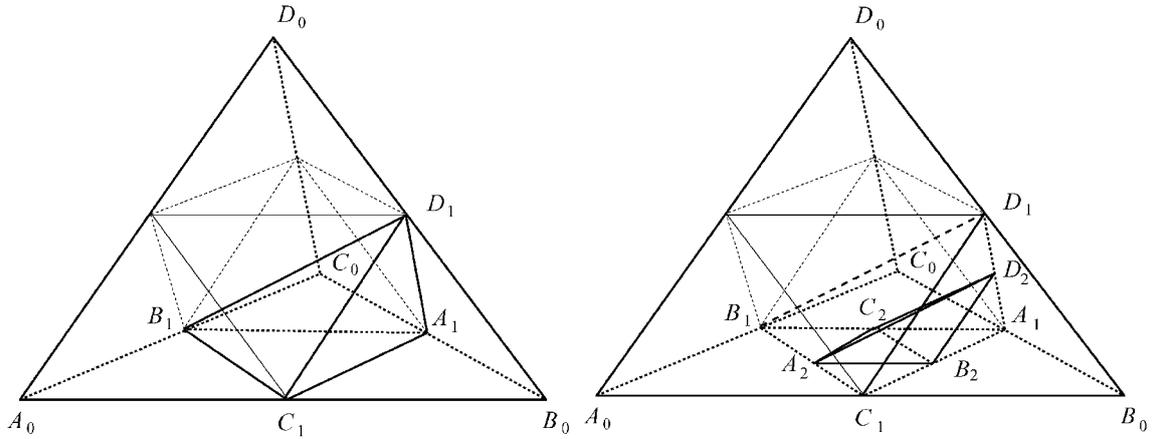


Рис. 2. Построение тетраэдров Чжана для $k = 1$ и $k = 2$ при помощи формулы (9), (10)

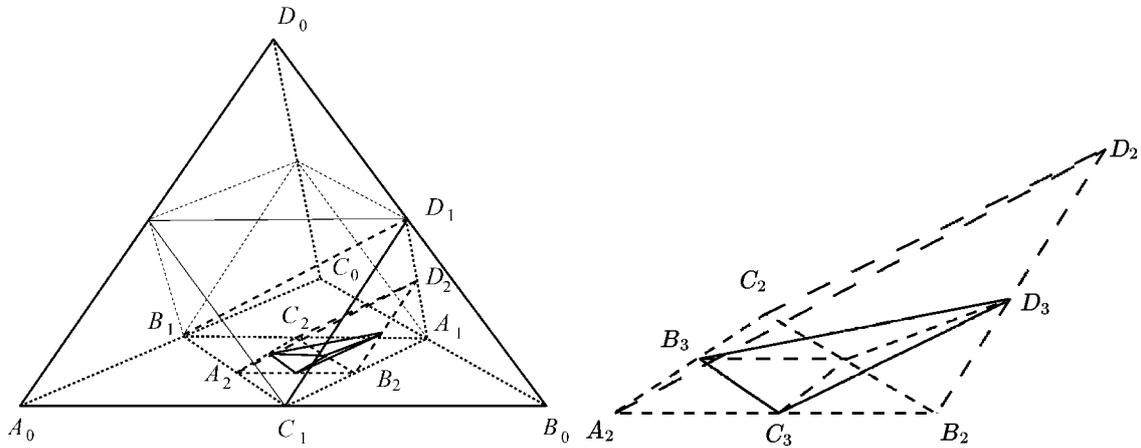


Рис. 3. Построение тетраэдра Чжана $A_3B_3C_3D_3$. Его вершины, задаваемые путем (9), (10), не отмечены явно слева. Справа точка A_3 является серединой отрезка B_2C_2

Пусть T_k — тетраэдр Чжана $A_kB_kC_kD_k$ и F_k — его грань $A_kB_kD_k$. Пусть ρ_{F_k} — внутренний радиус и h_{F_k} — его самая длинная сторона. Тогда (как в (2)) мы получим

$$\rho_{F_k} = 2 \frac{\text{vol}_2 F_k}{\text{vol}_1(\partial F_k)} < 2 \frac{\frac{1}{2} h_{F_k}^2 \sin \beta_k}{h_{F_k}} = h_{F_k} \sin \beta_k.$$

Из этого соотношения, (4), (16) и (19), мы получим

$$\sigma_{T_k} = \frac{h_{T_k}}{r_{T_k}} \geq \frac{h_{F_k}}{r_{T_k}} > \frac{h_{F_k}}{\rho_{F_k}} > \frac{1}{\sin \beta_k} \rightarrow \infty$$

при $k \rightarrow \infty$.

Аналогичные аргументы используются в случае нечетных k , где вместо этого мы контролируем угол $\alpha_k = \angle C_k A_k D_k$. □

Теперь докажем более сильное утверждение, чем теорема 3.1.

Теорема 3.2. Тетраэдры Чжана нарушают оба неравенства, (6) и (7), условия максимального угла.

Доказательство. Опять достаточно рассмотреть только четное k , поскольку случай нечетного k аналогичен.

Из (19) мы знаем, что условие (6) нарушается для тетраэдров Чжана T_k . Покажем, что двугранный угол φ_k при ребре $B_k C_k$ также сходится к π при $k \rightarrow \infty$. Используя рекуррентные формулы (9) и (10), мы получим явное выражение для вершин:

$$\begin{aligned} A_k &= 2^{-k} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0 \right), & B_k &= 2^{-k} \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0 \right), \\ C_k &= 2^{-k} \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), & D_k &= 2^{-k} \left(\frac{k}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где соответствующие декартовы координаты выбраны так, чтобы центр тяжести треугольника $A_k B_k C_k$ всегда находился в начале координат. Легко убедиться в том, что (11) верно с точностью до коэффициента масштабирования 2^{-k} . Из (20) мы имеем, что

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{8}(2-3k)^2}} \left(\sqrt{3}, 1, \frac{1}{4}(2-3k)\sqrt{2} \right) \quad \text{и} \quad n_4 = (0, 0, -1)$$

являются внешними единичными нормальными векторами граней $B_k C_k D_k$ и $A_k B_k C_k$ тетраэдров T_k соответственно. Отсюда

$$-\cos \varphi_k = \cos(\pi - \varphi_k) = \|n_1\| \|n_4\| \cos(\pi - \varphi_k) = n_1^\top n_4 = \frac{\frac{1}{4}(3k-2)\sqrt{2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{8}(2-3k)^2}}.$$

Следовательно, $\cos \varphi_k \rightarrow -1$ и, таким образом, $\varphi_k \rightarrow \pi$ при $k \rightarrow \infty$, т. е. (7) также неверно. \square

Замечание 3.1. Внимательно посмотрим на вырожденные (согласно теореме 3.1) тетраэдры Чжана. Для простоты рассмотрим только случай четных k , поскольку случай нечетных k аналогичен. Из доказательства теоремы 3.1 мы знаем, что угол $\beta_k = \angle A_k B_k D_k$ стремится к π при $k \rightarrow \infty$. Используя определение 3.1 и теорему косинусов, мы легко получим, что углы $\angle A_k C_k D_k$ и $\angle C_k B_k D_k$ стремятся к $2\pi/3$. В действительности тетраэдры Чжана образуют особый случай в классе иглоподобных вырождающихся тетраэдров в классификации из [6] (для более подробной информации см. следующее замечание).

Замечание 3.2. Мы можем обобщить тетраэдры Чжана и шаблон их поведения следующим образом. Пусть ABC — произвольный фиксированный треугольник в xy -плоскости такой, что центр тяжести ABC находится в начале координат. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, вершина которого D лежит на окружности $\{(x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ для $\varepsilon > 0$. Если $\varepsilon \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, то мы получим новый класс вырождающихся тетраэдров, для которых условие максимального угла (7) нарушается. Причина в том, что хотя бы один двугранный угол у основания ABC стремится к π . Этот класс содержит тетраэдры Чжана как частный случай. Чтобы убедиться в этом, возьмем D_k как в (20) с точностью до коэффициента масштабирования, тогда $R = k/2$ и $\varepsilon = \sqrt{6}/3$.

Замечание 3.3. Обобщение приведенных выше результатов для более высоких размерностей является предметом следующей статьи. Соответствующие аналоги более высокой размерности для условия максимального угла, которые можно использовать в практических расчетах, представлены, например, в [2, 9], см. также [8].

4. Выводы

В определении 3.1 первоначальный тетраэдр является правильным. Для случая общего тетраэдра достаточно рассмотреть аффинное взаимно однозначное отображение между этими двумя тетраэдрами, с помощью которого можно получить аналогичные эффекты вырожденности.

В практических расчетах обычно выбирают самую короткую пространственную диагональ среди M_1M_4 , M_2M_5 и M_3M_6 , поскольку в таком случае получаемые в результате тетраэдры не вырождаются при $h \rightarrow 0$, т. е. условие (3) удовлетворяется (см. [18, с. 548]).

Литература

1. **Babuška I., Aziz A.K.** On the angle condition in the finite element method // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1976. — Vol. 13. — P. 214–226.
2. **Baidakova N.V.** On Jamet's estimates for the finite element method with interpolation at uniform nodes of a simplex // *Sib. Adv. Math.* — 2018. — Vol. 28. — P. 1–22.
3. **Bey J.** Simplicial grid refinement: on Freudenthal's algorithm and the optimal number of congruence classes // *Numer. Math.* — 2000. — Vol. 85. — P. 1–29.
4. **Brandts J., Korotov S., Křížek M.** *Simplicial Partitions with Applications to the Finite Element Method.* — Berlin: Springer-Verlag, 2020.
5. **Ciarlet P.G.** *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* — Amsterdam: North-Holland, 1978.
6. **Edelsbrunner H.** Triangulations and meshes in computational geometry // *Acta Numer.* — 2000. — Vol. 9. — P. 133–213.
7. **Grande J.** Red-green refinement of simplicial meshes in d dimensions // *Math. Comp.* — 2019. — Vol. 88. — P. 751–782.
8. **Jamet P.** Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // *RAIRO Anal. Numér.* — 1976. — Vol. 10. — P. 43–60.
9. **Khademi A., Korotov S., Vatne J.E.** On generalizations of the Syngé–Křížek maximum angle condition for d -simplices // *J. Comput. Appl. Math.* — 2019. — Vol. 358. — P. 29–33.
10. **Korotov S., Křížek M.** Red refinements of simplices into congruent subsimplices // *Comput. Math. Appl.* — 2014. — Vol. 67. — P. 2199–2204.
11. **Křížek M.** An equilibrium finite element method in three-dimensional elasticity // *Appl. Math.* — 1982. — Vol. 27. — P. 46–75.
12. **Křížek M.** On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1992. — Vol. 29. — P. 513–520.
13. **Křížek M., Strouboulis T.** How to generate local refinements of unstructured tetrahedral meshes satisfying a regularity ball condition // *Numer. Methods for Partial Differential Equations.* — 1997. — Vol. 13. — P. 201–214.
14. **Sommerville D.M.Y.** Division of space by congruent triangles and tetrahedra // *Proc. Royal Soc. Edinburgh.* — 1923. — Vol. 43. — P. 85–116.
15. **Ženíšek A.** Convergence of the finite element method for boundary value problems of a system of elliptic equations (in Czech) // *Appl. Math.* — 1969. — Vol. 14. — P. 355–377.
16. **Ženíšek A.** Variational problems in domains with cusp points // *Appl. Math.* — 1993. — Vol. 38. — P. 381–403.
17. **Ženíšek A., Hoderová-Zlámalová J.** Semiregular Hermite tetrahedral finite elements // *Appl. Math.* — 2001. — Vol. 46. — P. 295–315.

18. **Zhang S.** Successive subdivisions of tetrahedra and multigrid methods on tetrahedral meshes // Houston J. Math. — 1995. — Vol. 21. — P. 541–556.

Поступила в редакцию 4 ноября 2020 г.

После исправления 29 января 2021 г.

Принята к печати 14 июля 2021 г.