Вид полной энергии, Дж	$\Lambda=0,14$	$\Lambda=0$	Вид полной энергии, Дж	$\Lambda=0,14$	$\Lambda=0$
$E_п$	$4,03\cdot10^{12}$	$4,88\cdot10^{12}$	$E=E_в+E_к$	$1,11\cdot10^{13}$	$1,14\cdot10^{13}$
$E_у$	$4,63\cdot10^{12}$	$4,10\cdot10^{12}$	A	$1,11\cdot10^{13}$	$1,14\cdot10^{13}$
$E_к$	$2,46\cdot10^{12}$	$2,40\cdot10^{12}$	$\|A-E\|$	$4,89\cdot10^{9}$	$6,12\cdot10^{9}$
$E_в=E_п+E_у$	$8,66\cdot10^{12}$	$8,98\cdot10^{12}$	$\dfrac{100\,\|A-E\|}{A}$	0,04%	0,05%

37% — для недилатирующей. С увеличением времени полная доля кинетической энергии падает, а полная доля энергии пластического деформирования растет. Учет дилатансии уменьшает долю энергии пластического деформирования.

Поступила 4 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сагомонян А. Я.** Рассеяние энергии взрыва в грунтах.— Вестн. МГУ. Сер. матем. механ., 1966, № 5.
2. **Кошелев Э. А.** О диссипации энергии при подземном взрыве.— ПМТФ, 1972, № 5.
3. **Артышев С. Г., Дунин С. З.** Ударные волны в дилатирующих и недилатирующих средах.— ПМТФ, 1978, № 4.
4. **Николаевский В. П.** О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и ударных волнах в мягких грунтах.— Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 5.

УДК 539.374.1

ПЛАСТИЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ *

В. В. Колокольчиков, В. В. Москвитин, Б. Л. Сидоров

(*Куйбышев, Москва*)

В работе [1] предложены основные деформационные уравнения циклических нагружений и доказаны теоремы циклических нагружений изотропных пластических материалов. В изотропной пластичности используются также принцип Мазинга [2] и соотношения Р. М. Шнейдеровича [3]. Феноменологическая модель упругого тела, поляризующегося и намагничивающегося без гистерезиса, с учетом гиромагнитных эффектов и конечности деформаций построена в работе [4]. Модели сплошной среды с электромагнитными моментами и с учетом эффектов магнитного гистерезиса, пластических деформаций в рамках теории относительности сформулированы в [5]. В работе [6] на основе вариационного уравнения механики сплошных сред [7] рассматриваются модели магнитоупругих сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций. Возникает также задача, обсуждаемая ниже, о развитии деформационной теории циклических нагружений для анизотропных ферромагнитных и сегнетоэлектрических материалов.

1. Рассматривается твердое ферромагнитное или сегнетоэлектрическое тело произвольной формы объема V, ограниченное поверхностью S. В недеформирующейся системе координат x_i введем $u_{i(n)}$— компоненты вектора n-го перемещения и $\varepsilon_{ij(n)}$ — компоненты тензора деформаций при n-м нагружении. Все величины при n-м нагружении отмечаются индексом n.

---

* Доложено на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Киев, май 1976 г.

В дальнейшем предполагается следующее: на тело действуют массовые силы с объемной плотностью $F_{i(n)}$, напряжения $T_{i(n)}$ на поверхности S. Магнитные и электрические поля определяются из уравнений Максвелла и соответствующих граничных условий для задач магнитостатики или электростатики [8, 9] с учетом деформирования материала.

Для определенности будем рассматривать ферромагнитную сплошную среду, поскольку аналогичные результаты для сегнетоэлектрической сплошной среды получаются при помощи замены $H_{i(n)}$ на $E_{i(n)}$, компонент вектора намагниченности $I_{i(n)}$ на компоненты вектора поляризации $P_{i(n)}$ и добавления объемной силы $\rho_{(n)}\ E_{i(n)}$.

Уравнения равновесия с учетом пондеромоторных сил имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{ij(n)}}{\partial x_j} + F_i(I_{(n)}, H_{(n)}) + F_{i(n)} = 0,$$

$$(1.1)\qquad F_i(I_{(n)}, H_{(n)}) = \frac{1}{2}\left(I_{k(n)}\frac{\partial H_{k(n)}}{\partial x_i} - H_{k(n)}\frac{\partial I_{k(n)}}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{rot}(\mathbf{I}_{(n)}\times\mathbf{H}_{(n)}).$$

Выражение для полного тензора напряжений выбирается в форме [9]

$$(1.2)\qquad T_{ij(n)} = \sigma_{ij(n)} + \sigma_{ij}(B_{(n)},\ H_{(n)}),$$

$$\sigma_{ij}(B_{(n)}, H_{(n)}) = (1/8\pi)(B_{i(n)}\ H_{j(n)} + B_{j(n)}H_{i(n)} - B_{k(n)}\ H_{k(n)}\ \delta_{ij}),$$

где $B_{i(n)}$— компоненты вектора индукции магнитного поля при n-м нагружении в гауссовой системе:

$$(1.3)\qquad B_{i(n)} = H_{i\,(n)} + 4\pi I_{i(n)}.$$

Граничные условия для напряжений на поверхностях с нормалями, имеющими направляющие косинусы n_i, запишутся в виде [8]

$$(1.4)\qquad T_{ij(n)}n_j = T_{i(n)} + T_i(H_{0(n)}),\ T_i(H_{0(n)}) =$$

$$= (\mu_0/8\pi)\left(2H_{0i(n)}H_{0j(n)} - H^2_{0(n)}\delta_{ij}\right)n_j,$$

где $H_{0i(n)}$ — компоненты вектора магнитного поля вне ферромагнетика; μ_0 — магнитная проницаемость неферромагнитной среды, примерно равная единице.

Пусть при любом n-м механическом и магнитном нагружениях осуществляются напряжения $\sigma_{ij(n)}$, деформации $\varepsilon_{ij(n)}$, магнитное поле $H_{i(n)}$, намагниченность $I_{i(n)}$. Девиаторы напряжений $S_{ij(n)}$ при n-м нагружении

$$(1.5)\qquad S_{ij(n)} = \sigma_{ij(n)} - (1/3)\sigma_{\alpha\alpha(n)}\delta_{ij}$$

представим в виде суммы трех слагаемых, а поле $H_{i(n)}$ в виде суммы двух слагаемых:

$$(1.6)\qquad S_{ij(n)} = S^{(n)}_{ij} + S^{[n]}_{ij} + S^{(In)}_{ij},\quad H_{i(n)} = H^{(In)}_i + H^{(\varepsilon n)}_i,$$

где $S^{(n)}_{ij}$ — потенциальная механическая часть девиатора напряжений; $S^{[n]}_{ij}$ —непотенциальная механическая часть девиатора напряжений; $S^{(In)}_{ij}$— магнитострикционная часть девиатора напряжений; $H^{(In)}_i$ —магнитная часть поля; $H^{(\varepsilon n)}_i$ —механострикционная часть поля.

Для первого нагружения примем следующие из условий потенциальности, объемной линейности связи σ, $H \sim \varepsilon$, I:

$$(1.7)\qquad \sigma_{ij(1)} = k_{ij\alpha\beta}\ (\varepsilon_{(1)}, I_{(1)})\varepsilon_{\alpha\beta(1)} + q_{\alpha\beta ij}(\varepsilon_{(1)}, I_{(1)})I_{\alpha(1)}I_{\beta(1)},$$

$$H_{i(1)} = \eta_{ij}(\varepsilon_{(1)}, I_{(1)})I_{j(1)} + 2q_{ij\alpha\beta}(\varepsilon_{(1)}, I_{(1)})I_{j(1)}\varepsilon_{\alpha\beta(1)},$$

$$k_{ii\alpha\beta} = 9K_{ii\alpha\beta} = \text{const},\ k_{ij\alpha\beta} = k_{\alpha\beta ij} = k_{ji\alpha\beta} = k_{ij\beta\alpha},$$
$$q_{\alpha\beta ij} = q_{\beta\alpha ij} = q_{\alpha\beta ji},\ \eta_{ji} = \eta_{ij}.$$

Соотношения (1.7) учитывают начальную анизотропию. Введем безразмерные и постоянные тензоры, отмечаемые верхним индексом *:

$$\mu^{*}_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\left[k_{ij\alpha\beta}(0, 0) - \frac{1}{3}\delta_{ij}k_{\gamma\gamma\alpha\beta}(0, 0)\right], \tag{1.8}$$

$$\mu^{(I*)}_{ij\alpha\beta} = \left[q_{\alpha\beta ij}(0, 0) - \frac{1}{3}\delta_{ij}q_{\alpha\beta\gamma\gamma}(0, 0)\right],\quad q^{*}_{\alpha\beta ij} = q_{\alpha\beta ij}(0, 0),\quad \eta^{*}_{ij} = \eta_{ij}(0, 0),$$

где μ — произвольный модуль сдвига. Здесь учтено, что H_i и I_i имеют одинаковую размерность.

Определим тензоры $\mu^{(*)}_{ij\alpha\beta}$, $\mu^{[*]}_{ij\alpha\beta}$ как результат операций симметрирования и антисимметрирования по парам индексов безразмерного тензора модулей сдвига $\mu^{*}_{ij\alpha\beta}$:

$$\mu^{(*)}_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mu^{*}_{ij\alpha\beta} + \mu^{*}_{\alpha\beta ij}\right),\quad \mu^{[*]}_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mu^{*}_{ij\alpha\beta} - \mu^{*}_{\alpha\beta ij}\right). \tag{1.9}$$

Тензор $\mu^{[*]}_{ij\alpha\beta}$ не равен нулю для кристаллов моноклинной и триклинной систем. Введем величины

$$e^{(*n)}_{ij} = \mu^{(*)}_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta(n)},\quad e^{[*n]}_{ij} = \mu^{[*]}_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta(n)}, \tag{1.10}$$
$$e^{(I*n)}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\mu^{(I*)}_{ij\alpha\beta}I_{\alpha(n)}I_{\beta(n)},\quad I^{(*n)}_{i} = \overset{*}{\eta}_{i\alpha}I_{\alpha(n)},\quad I^{(\varepsilon*n)}_{i} = \overset{*}{q}_{ij\alpha\beta}I_{j(n)}\varepsilon_{\alpha\beta(n)},$$

являющиеся соответственно приведенным с учетом анизотропии девиатором деформаций (девиатором, если деформации удовлетворяют ограничению $e^{[*]}_{ii} = 0$); приведенным тензором деформаций, учитывающим несимметрию тензора сдвиговых модулей по парам индексов; приведенным магнитострикционным девиатором деформаций; приведенным вектором намагниченности; приведенным механострикционным вектором намагниченности.

Необходимо ввести приращения величин, фигурирующих в материальных соотношениях, при n-м и n—1-м нагружениях:

$$\tilde{\sigma}^{(n)} = (1/3)(-1)^n\left(\sigma_{\alpha\alpha(n-1)} - \sigma_{\alpha\alpha(n)}\right),\quad \tilde{S}^{(n)}_{ij} = (-1)^n\left(S^{(n-1)}_{ij} - S^{(n)}_{ij}\right), \tag{1.11}$$
$$\tilde{S}^{[n]}_{ij} = (-1)^n\left(S^{[n-1]}_{ij} - S^{[n]}_{ij}\right),\quad \tilde{S}^{(In)}_{ij} = (-1)^n\left(S^{(In-1)}_{ij} - S^{(In)}_{ij}\right),$$
$$\tilde{H}^{(In)}_{i} = (-1)^n\left(H^{(In-1)}_{i} - H^{(In)}_{i}\right),\quad \tilde{H}^{(\varepsilon n)}_{i} = (-1)^n\left(H^{(\varepsilon n-1)}_{i} - H^{(\varepsilon n)}_{i}\right),$$
$$\tilde{\varepsilon}^{(*n)} = (1/K)(-1)^n K_{ii\alpha\beta}\left(\varepsilon_{\alpha\beta(n-1)} - \varepsilon_{\alpha\beta(n)}\right),$$
$$\tilde{e}^{(*n)}_{ij} = (-1)^n\left(e^{(*n-1)}_{ij} - e^{(*n)}_{ij}\right),\quad \tilde{e}^{[*n]}_{ij} = (-1)^n\left(e^{[*n-1]}_{ij} - e^{[*n]}_{ij}\right),$$
$$\tilde{e}^{(I*n)}_{ij} = (-1)^n\left(e^{(I*n-1)}_{ij} - e^{(I*n)}_{ij}\right),\quad \tilde{I}^{(*n)}_{i} = (-1)^n\left(I^{(*n-1)}_{i} - I^{(*n)}_{i}\right).$$
$$\tilde{I}^{(\varepsilon*n)}_{i} = (-1)^n\left(I^{(\varepsilon*n-1)}_{i} - I^{(\varepsilon*n)}_{i}\right),$$

где K — произвольный объемный модуль упругости. Следуя [10], для тензоров $\tilde{S}^{(n)}_{ij}$, $\tilde{S}^{[n]}_{ij}$, $\tilde{S}^{(In)}_{ij}$, $\tilde{e}^{(*n)}_{ij}$, $\tilde{e}^{[*n]}_{ij}$, $\tilde{e}^{(I*n)}_{ij}$ и векторов $\tilde{H}^{(In)}_{i}$, $\tilde{H}^{(\varepsilon n)}_{i}$, $\tilde{I}^{(*n)}_{i}$, $\tilde{I}^{(\varepsilon*n)}_{i}$ введем направляющие тензоры и векторы, отмечаемые верхним индексом 1, по формулам

$$\tilde{S}^{(1n)}_{ij} = \tilde{S}^{(n)}_{ij}/\left(\tilde{S}^{(n)}_{\alpha\beta}\tilde{S}^{(n)}_{\alpha\beta}\right)^{1/2},\quad \tilde{S}^{[1n]}_{ij} = \tilde{S}^{[n]}_{ij}/\left(\tilde{S}^{[n]}_{\alpha\beta}\tilde{S}^{[n]}_{\alpha\beta}\right)^{1/2}, \tag{1.12}$$
$$\tilde{S}^{(1In)}_{ij} = \tilde{S}^{(In)}_{ij}/\left(\tilde{S}^{(In)}_{\alpha\beta}\tilde{S}^{(In)}_{\alpha\beta}\right)^{1/2},\quad \tilde{e}^{(1*n)}_{ij} = \tilde{e}^{(*n)}_{ij}/\left(\tilde{e}^{(*n)}_{\alpha\beta}\tilde{e}^{(*n)}_{\alpha\beta}\right)^{1/2},$$
$$\tilde{e}^{[1*n]}_{ij} = e^{[*n]}_{ij}/\left(\tilde{e}^{[*n]}_{\alpha\beta}\tilde{e}^{[*n]}_{\alpha\beta}\right)^{1/2},\quad \tilde{e}^{(1I*n)}_{ij} = \tilde{e}^{(I*n)}_{ij}/\left(\tilde{e}^{(I*n)}_{\alpha\beta}\tilde{e}^{(I*n)}_{\alpha\beta}\right)^{1/2},$$

$$\widetilde{H}_i^{(1In)}=\widetilde{H}_i^{(In)}/(\widetilde{H}_\alpha^{(In)}\widetilde{H}_\alpha^{(In)})^{1/2},\quad \widetilde{H}_i^{(1\varepsilon n)}=\widetilde{H}_i^{(\varepsilon n)}/(\widetilde{H}_\alpha^{(\varepsilon n)}\widetilde{H}_\alpha^{(\varepsilon n)})^{1/2},$$
$$\widetilde{I}_i^{(1*n)}=\widetilde{I}_i^{(*n)}/(\widetilde{I}_\alpha^{(*n)}\widetilde{I}_\alpha^{(*n)})^{1/2},\quad \widetilde{I}_i^{(1\varepsilon*n)}=\widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}/(\widetilde{I}_\alpha^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_\alpha^{(\varepsilon*n)})^{1/2}.$$

В [1] используется предположение о совпадении направляющих тензоров приращений соответственно напряжений и деформаций, обобщающее на случай переменных нагружений идею о совпадении направляющих тензоров напряжений и деформаций в теории малых упругопластических деформаций [10]. Обобщим идею [1] на случай переменных механических и магнитных нагружений анизотропных материалов, принимая равенство направляющих тензоров приращений напряжений $\widetilde{S}_{ij}^{(1n)}$, $\widetilde{S}_{ij}^{[1n]}$, $\widetilde{S}_{ij}^{(1In)}$ направляющим тензорам соответственно $\widetilde{e}_{ij}^{(1*n)}$, $\widetilde{e}_{ij}^{[1*n]}$, $\widetilde{e}_{ij}^{(1I*n)}$ и равенство направляющих векторов приращений магнитного поля $\widetilde{H}_i^{(1n)}$, $\widetilde{H}_i^{(1\varepsilon n)}$ направляющим векторам приращений намагниченности соответственно $\widetilde{I}_i^{(1*n)}$ и $\widetilde{I}_i^{(1\varepsilon*n)}$. Тогда при n-м нагружении связи $\widetilde{\sigma}_{ij(n)}$ и $\widetilde{H}_{i(n)}$ с $\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)}$ и $\widetilde{I}_{i(n)}$ определяются равенствами (1.5), (1.6), но записанными для приращений величин, отмечаемых $\sim$, и равенствами:

$$\widetilde{\sigma}^{(n)}=3K\widetilde{\varepsilon}^{(*n)}+3\widetilde{Q}^{(*n)},\quad \widetilde{Q}^{(*n)}=\left(\frac{1}{9}\right)\widetilde{q}^{(n)}\overset{*}{q}_{\alpha\beta ii}\widetilde{I}_{\alpha(n)}\widetilde{I}_{\beta(n)},\tag{1.13}$$
$$\widetilde{S}_{ij}^{(n)}=\frac{2\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(n)}}{3\widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{(*n)}}\widetilde{e}_{ij}^{(*n)},\quad \widetilde{S}_{ij}^{[n]}=\frac{2\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{[n]}}{3\widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{[*n]}}\widetilde{e}_{ij}^{[*n]},$$
$$\widetilde{S}_{ij}^{(In)}=\frac{2\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(In)}}{3\widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{(I*n)}}\widetilde{e}_{ij}^{(I*n)},\quad \widetilde{H}_i^{(n)}=\frac{\widetilde{H}^{(n)}}{\widetilde{I}^{(*n)}}\widetilde{I}_i^{(*n)},\quad \widetilde{H}_i^{(\varepsilon n)}=\frac{\widetilde{H}^{(\varepsilon n)}}{\widetilde{I}^{(\varepsilon*n)}}\widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)},$$

где

$$\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(n)}=\left(\frac{3}{2}\widetilde{S}_{ij}^{(n)}\widetilde{S}_{ij}^{(n)}\right)^{1/2};\quad \widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{(*n)}=\left(\frac{2}{3}\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\right)^{1/2};\tag{1.14}$$
$$\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{[n]}=\left(\frac{3}{2}\widetilde{S}_{ij}^{[n]}\widetilde{S}_{ij}^{[n]}\right)^{1/2};\quad \widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{[*n]}=\left(\frac{2}{3}\widetilde{e}_{ij}^{[*n]}\widetilde{e}_{ij}^{[*n]}\right)^{1/2};$$
$$\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(In)}=\left(\frac{3}{2}\widetilde{S}_{ij}^{(In)}\widetilde{S}_{ij}^{(In)}\right)^{1/2};\quad \widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{(I*n)}=\left(\frac{2}{3}\widetilde{e}_{ij}^{(I*n)}\widetilde{e}_{ij}^{(I*n)}\right)^{1/2};$$
$$\widetilde{H}^{(n)}=(\widetilde{H}_i^{(n)}\widetilde{H}_i^{(n)})^{1/2};\quad \widetilde{I}^{(*n)}=(\widetilde{I}_i^{(*n)}\widetilde{I}_i^{(*n)})^{1/2};$$
$$\widetilde{H}^{(\varepsilon n)}=(\widetilde{H}_i^{(\varepsilon n)}\widetilde{H}_i^{(\varepsilon n)})^{1/2};\quad \widetilde{I}^{(\varepsilon*n)}=(\widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)})^{1/2}.$$

При получении объемных свойств в (1.13) использовалось предположение, что справедлива связь объемных величин для основного нагружения, но записанная в приращениях. Соотношения (1.13) дополняются предположением о существовании шести универсальных связей между инвариантами, записываемых вследствие гипотезы о потенциальности материальных соотношений в приращениях в виде

$$\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(n)}=3\widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{(*n)}\widetilde{M}^{(n)},\quad \widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{[n]}=3\widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{[*n]}\mu,\quad \mu=\text{const},\tag{1.15}$$
$$\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(In)}=3\widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{(I*n)}\mu\widetilde{q}^{(n)},\quad \widetilde{H}^{(In)}=\widetilde{I}^{(*n)}\widetilde{\eta}^{(n)},$$
$$\widetilde{H}^{(\varepsilon n)}=2\widetilde{I}^{(\varepsilon*n)}\widetilde{q}^{(n)},\quad \widetilde{Q}^{(*n)}=\left(\frac{1}{9}\right)\overset{*}{q}_{\alpha\beta\gamma\gamma}\widetilde{I}_{\alpha(n)}\widetilde{I}_{\beta(n)}\widetilde{q}^{(n)},$$
$$\widetilde{M}^{(n)}=\widetilde{M}^{(n)}(\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)},\ \widetilde{I}_i^{(*n)}\widetilde{I}_{i(n)},\ \widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_{i(n)}),$$
$$\widetilde{q}^{(n)}=\widetilde{q}^{(n)}(\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)},\ \widetilde{I}_i^{(*n)}\widetilde{I}_{i(n)},\ \widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_{i(n)}),$$
$$\widetilde{\eta}^{(n)}=\widetilde{\eta}^{(n)}(\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)},\ \widetilde{I}_i^{(*n)}\widetilde{I}_{i(n)},\ \widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_{i(n)}).$$

В равенствах (1.15) и во втором равенстве (1.13) $\widetilde{M}^{(n)}$, $\widetilde{q}^{(n)}$, $\widetilde{\eta}^{(n)}$ являются функциями от $\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}$, $\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)}$, $\widetilde{I}_i^{(*n)}$ $\widetilde{I}_{i(n)}$, $\widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}$ $\widetilde{I}_{i(n)}$. При этом не учитывается деформационная анизотропия и предполагается существование потенциалов приращений напряжений и намагниченности, зависящих от n. Функции $\widetilde{M}^{(n)}$, $\widetilde{q}^{(n)}$, $\widetilde{\eta}^{(n)}$ при n-м нагружении находятся из простейших экспериментов. Соответствующие задачи решаются методом последовательных приближений, аналогичным методу [10,1] при основном и переменном нагружениях изотропных тел в отсутствие электромагнитного поля. Не учитывая изменения линейно-упругих постоянных с номером нагружения для теории пластичности анизотропных ферромагнетиков при наличии магнитного поля, можно использовать аналог обобщенного принципа Рэлея — Мазинга — Москвитина [11, 12, 2, 1]

$$(1.16)\quad \begin{aligned} \widetilde{M}^{(n)} &= M^{(\ )}\left(\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)}/\alpha_n^2,\quad \widetilde{I}_i^{(*n)}\widetilde{I}_{i(n)}/\beta_n^2,\quad \widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_{i(n)}/\alpha_n\beta_n^2\right),\\ \widetilde{q}^{(n)} &= q\left(\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)}/\alpha_n^2,\quad \widetilde{I}_{i(n)}^{(*n)}\widetilde{I}_{i(n)}/\beta_n^2,\quad \widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_{i(n)}/\alpha_n\beta_n^2\right),\\ \widetilde{\eta}^{(n)} &= \eta\left(\widetilde{e}_{ij}^{(*n)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)}/\alpha_n^2,\quad \widetilde{I}_{i(n)}^{(*n)}\widetilde{I}_{i(n)}/\beta_n^2,\quad \widetilde{I}_i^{(\varepsilon*n)}\widetilde{I}_{i(n)}/\alpha_n\beta_n^2\right),\end{aligned}$$

где $M^{(\ )}$, q, η — функции, соответствующие основному нагружению; α_n — параметр n-го механического нагружения, имеющий смысл коэффициента изменения масштаба осей напряжений и деформаций, а также приращений напряжений деформаций для n-го нагружения (параметры α_n порядка 2); β_n— параметр n-го магнитного нагружения, имеющий смысл коэффициента изменения масштаба осей полей и намагниченности, а также приращений полей и намагниченностей для n-го нагружения (β_n— параметры порядка 2); $\gamma_n \equiv \beta_n\alpha_n^{1/2}$ — параметры, характеризующие взаимодействие магнитного и механического нагружений. Принцип (1.16) позволяет при формулировке материальных соотношений для n-го нагружения выразить соответствующие функции через функции $M^{(\ )}$, q, η первого нагружения.

Когда значения величин при n — 1-м нагружении известны и определена модель для приращений величин, то равенства (1.11) определяют величины для n-го нагружения.

Условием нагружения будет положительность функции рассеивания энергии $\delta\chi/\delta t$

$$(1.17)\qquad \delta\chi/\delta t > 0.$$

Для n-го нагружения рассеянная энергия $\chi = \chi^{(n)}$ моделируется как сумма

$$(1.18)\qquad \chi = \chi^{(n)} \equiv \chi^{(n-1)} + \widetilde{W}^{(n)} - \widetilde{W}_e^{(n)},$$

где $\chi^{(n-1)}$— энергия, рассеянная к конечному моменту n — 1-го нагружения; $\widetilde{W}^{(n)}$ — работа для приращений величин; $\widetilde{W}_e^{(n)}$ — нерассеиваемая часть работы для приращений величин. Для $\widetilde{W}_e^{(n)}$ примем такую модель, чтобы для замкнутого цикла площадь петли гистерезиса равнялась рассеянной за цикл энергии. Тогда

$$(1.19)\qquad \widetilde{W}^{(n)} = \int\limits_{0,0,0}^{L,M,N}\left(\frac{\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(n)}}{3\widetilde{\varepsilon}_{\text{и}}^{(*n)}}\,dL + \frac{\widetilde{H}^{(n)}}{2\widetilde{I}^{(*n)}}\,dM + \frac{\widetilde{H}^{(\varepsilon n)}}{2\widetilde{I}^{(\varepsilon*n)}}\,dN\right) + \\ + \frac{1}{2}\,\widetilde{\sigma}_{ij(n)}^{(\sigma)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)},\quad \widetilde{W}_e^{(n)} = \frac{1}{2}\,\widetilde{\sigma}_{ij(n)}\widetilde{\varepsilon}_{ij(n)} + \frac{1}{2}\,\widetilde{H}_{i(n)}\widetilde{I}_{i(n)},$$

где

$$L = \tilde{e}^{(*n)}_{ij(n)}\tilde{\varepsilon}_{ij(n)}; \quad M = \tilde{I}^{(*n)}_i \tilde{I}_{i(n)}; \quad N = \tilde{I}^{(\varepsilon * n)}_i \tilde{I}_{i(n)}; \tag{1.20}$$

$$\tilde{\sigma}^{(\sigma)}_{ij(n)} = \frac{3}{2}\left[K_{pp\alpha\beta}\delta_{ij} + K_{ppij}\delta_{\alpha\beta}\right]\tilde{\varepsilon}_{ij(n)}.$$

Если значение $\chi^{(n)}$, определяемое (1.18)—(1.20), не удовлетворяет неравенству (1.17) с использованием модели (1.11); (1.5), (1.6) в приращениях; (1.13)—(1.15), то это означает, что происходит разгрузка и нагружение имеет номер $n+1$. Предлагаемая модель является одним из возможных вариантов. Ее рамки применимости — случай малых $S^{[n]}_{ij}$, $\tilde{S}^{(In)}_{ij}$ и $H^{(\varepsilon n)}_i$ по сравнению соответственно с $S^{(n)}_{ij}$ и $H^{(In)}_i$ для простых и близких к простым нагружений (см. ниже). Для построения других вариантов модели необходимо отказываться от условий объемной линейности, потенциальности, постоянства ориентаций направляющих тензоров и векторов.

2. При простом нагружении и деформировании [10] направляющие тензоры напряжений, деформаций, направляющие векторы магнитного поля и намагниченности при любом номере нагружения n не зависят от времени t. Имеет место теорема о простом переменном нагружении. Рассмотрим несжимаемый анизотропный материал, характеризуемый равенствами:

$$K = \infty, \quad \mu^{[*]}_{ij\alpha\beta} = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^{(*n)} = 0, \quad 4\pi\,|I_{i(l)}| \gg |H_{i(l)}| \quad (l = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.1}$$

$$\tilde{\sigma}^{(n)}_{\text{и}} = 3\tilde{\varepsilon}^{(*n)}_{\text{и}} \frac{\partial\Phi}{\partial\left(\tilde{e}^{(*n)}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{(jin)}\right)}, \quad \tilde{H}^{(n)} = 2I^{(*n)} \frac{\partial\Phi}{\partial\left(\tilde{I}^{(*n)}_i \tilde{I}_{i(n)}\right)},$$

$$\Phi = \sum_{r,s} A_{rs} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\tilde{e}^{(*k)}_{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij(k)}\right)^{a^{(k)}_r} \prod_{l=1}^{n}\left(\tilde{I}^{(*l)}_i \tilde{I}_{i(l)}\right)^{b^{(l)}_s},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a^{(k)}_r = (\gamma+1)/2, \quad \sum_{l=1}^{n} b^{(l)}_s = (\delta+1)/2, \quad \tilde{\sigma}^{(In)}_{\text{и}} = 0, \quad \tilde{H}^{(\varepsilon n)} = 0,$$

причем массовые силы и поверхностные силы, магнитное поле, намагниченность, деформации изменяются пропорционально соответственно параметрам $\lambda_{(l)}(t)$, $\nu_{H(l)}(t)$, $\nu_{I(l)}(t)$, $\mu_{(l)}(t)$ (l — номер нагружения):

$$F_{i(l)} = F^0_i \lambda_{(l)}(t), \quad T_{i(l)} = T^0_i \lambda_{(l)}(t), \quad H_{i(l)} = H^0_i \nu_{H(l)}(t), \tag{2.2}$$

$$I_{i(l)} = I^0_i \nu_{I(l)}(t), \quad \varepsilon_{ij(l)} = \varepsilon^0_{ij}\mu_{(l)}(t) \quad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

где величины с верхним индексом нуль не зависят от времени. Нагружение и деформирование будут простыми, если

$$\lambda_{(l)}(t) = \nu_{H(l)}(t)\,\nu_{I(l)}(t) \quad (l = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3}$$

$$\lambda_{(n-1)} - \lambda_{(n)} = \frac{1}{(\gamma+1)A}\sum_{r,s} A_{rs} a^{(n)}_r \left(\mu_{(n-1)} - \mu_{(n)}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{n} \left|\mu_{(k-1)} - \mu_{(k)}\right|^{2a^{(k)}_r} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \left|\nu_{I(l-1)} - \nu_{I(l)}\right|^{2b^{(l)}_s},$$

$$\nu_{H(n-1)} - \nu_{H(n)} = \frac{1}{(\delta+1)A}\sum_{r,s} A_{rs} b^{(n)}_s \left(\nu_{I(n-1)} - \nu_{I(n)}\right)^{-1} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left|\mu_{(k-1)} - \mu_{(k)}\right|^{2a^{(k)}_r} \prod_{l=1}^{n} \left|\nu_{I(l-1)} - \nu_{I(l)}\right|^{2b^{(l)}_s}.$$

В формулах (2.1), (2.3) A_{rs}, $a_r^{(k)}$, $b_s^{(l)}$, γ, δ, A — постоянные. Напряжения $\sigma_{ij(n)}$ находятся в виде

$$\sigma_{ij(n)} = \sigma_{ij}^0 \lambda_{(n)}(t). \tag{2.4}$$

Из 4-го условия (2.1) и (1.3) следует

$$B_{i(n)} = B_i^0 \nu_{I(n)}(t). \tag{2.5}$$

Подстановка (2.4), (2.5), равенств (2.2) в (1.1), (1.2), (1.4) дает первое соотношение (2.3). Уравнения Максвелла для магнитостатики и граничные условия также удовлетворяются. При выполнении (2.2), (2.4) первые два соотношения (1.13) и 4-е равенство (1.13) удовлетворяются, так как справедливы условия несжимаемости — первые три равенства (2.1). Для получения этого утверждения надо использовать 1, 3, 6, 8-е равенства (1.11) и 2-е равенство (1.10). Так как потенциал Φ в (2.1) не зависит от инварианта N (см. (1.19)), что эквивалентно выполнению последних двух равенств (2.1), то 5-е и 7-е равенства (1.13) тривиально удовлетворяются:

$$\widetilde{S}_{ij}^{0(In)} = 0, \quad \widetilde{H}_i^{0(\varepsilon n)} = 0.$$

Подстановка равенств (2.2) и выражений $\widetilde{\sigma}_{\text{и}}^{(n)}$, $\widetilde{H}^{(n)}$ из (2.1) в 3-е и 6-е равенства (1.13) с учетом 2-го и 5-го равенств (1.11) дает 2-е и 3-е уравнения (2.3). Так как условия (2.2), (2.4) дают постоянство направляющих тензоров и условия теоремы непротиворечивы, то теорема доказана.

Заметим, что при ненулевых, но малых напряжениях $\widetilde{S}_{ij}^{[n]}$, $\widetilde{S}_{ii}^{(In)}$ и полях $\widetilde{H}_i^{(\varepsilon n)}$ нагружение, близкое к (2.2), будет близким к простому.

Используя принцип (1.16), можно доказать теорему о переменном нагружении. Если задачу о переменном нагружении ферромагнетика решать методом последовательных приближений, то на каждом этапе необходимо решать отдельную задачу магнитостатики при известном деформированном состоянии, найденном из предыдущего приближения, и механическую задачу при известных полях и намагниченностях. Будем отмечать индексом k в фигурных скобках k-й номер приближения. По формулам типа (1.11) напряжения $\sigma_{ij(n)}^{\{k\}}$, деформации $\varepsilon_{ij(n)}^{\{k\}}$, магнитное поле $H_{i(n)}^{\{k\}}$, намагниченность $I_{i(n)}^{\{k\}}$ равны разностям (n — четное) или суммам (n — нечетное):

$$\sigma_{ij(n)}^{(k)} = \sigma_{ij(n-1)}^{\{k\}} - (-1)^n \widetilde{\sigma}_{ij(n)}^{\{k\}}, \quad \varepsilon_{ij(n)}^{\{k\}} = \varepsilon_{ij(n-1)}^{\{k\}} - (-1)^n \widetilde{\varepsilon}_{ij(n)}^{\{k\}},$$

$$H_{i(n)}^{\{k\}} = H_{i(n-1)}^{\{k\}} - (-1)^n \widetilde{H}_{i(n)}^{\{k\}}, \quad I_{i(n)}^{\{k\}} = I_{i(n-1)}^{\{k\}} - (-1)^n \widetilde{I}_{i(n)}^{\{k\}}$$

соответствующих величин $\sigma_{ij(n-1)}^{\{k\}}$, $\varepsilon_{ij(n-1)}^{\{k\}}$, $H_{i(n-1)}^{\{k\}}$, $I_{i(n-1)}^{\{k\}}$, существовавших перед началом n-го нагружения, и некоторых фиктивных, причем эти последние есть результат решения задачи основного нагружения под действием нагрузок

$$(-1)^n \left[F_{i(n-1)} - F_{i(n)} + F_i\left(I_{(n-1)}^{\{k-1\}}, H_{(n-1)}^{\{k-1\}}\right) - F_i\left(I_{(n)}^{\{k-1\}}, H_{(n)}^{\{k-1\}}\right) - \right.$$
$$\left. - F_i\left(I_{(n-1)}^{\{k-1\}} - I_{(n)}^{\{k-1\}}, H_{(n-1)}^{\{k-1\}} - H_{(n)}^{\{k-1\}}\right)\right],$$

$$(-1)^n \left[T_{i(n-1)} - T_{i(n)} + T_i\left(H_{0(n-1)}^{\{k-1\}}\right) - T_i\left(H_{0(n)}^{\{k-1\}}\right) - n_j \sigma_{ij}\left(B_{(n-1)}^{\{k-1\}}, H_{(n-1)}^{\{k-1\}}\right) + \right.$$
$$\left. + n_j \sigma_{ij}\left(B_{(n)}^{\{k-1\}}, H_{(n)}^{\{k-1\}}\right) + n_j \sigma_{ij}\left(B_{(n-1)}^{\{k-1\}} - B_{(n)}^{\{k-1\}}, H_{(n-1)}^{\{k-1\}} - H_{(n)}^{\{k-1\}}\right)\right]$$

и плотностей тока

$$(-1)^{(n)}(j_{i(n-1)} - j_{i(n)})$$

при условии, что в материальных соотношениях основного нагружения изменены масштабы осей напряжений и деформаций в α_n раз, а масштабы поля и намагниченности в β_n раз. Здесь используются обозначения, фигурирующие в (1.1), (1.2), (1.4).

3. Получим материальные соотношения для поликристаллического стального образца. Рассмотрим сначала основное нагружение. Выберем в качестве определяющих параметров σ_{ij} и H_i. Тогда потенциал деформаций и намагниченностей имеет вид

$$(3.1)\qquad f = \varkappa_0(H, \sigma_и) H^2/2 - a_0(H, \sigma_и) H_i H_j \sigma_{ij} + \sigma^2/2K + \int\limits_0^{\sigma_и} \varepsilon_и d\sigma_и,$$

где $\sigma_и$, $\varepsilon_и$ — интенсивности напряжений и деформаций; $\varkappa_0$ и a_0 — функции H и $\sigma_и$, которые необходимо определить из эксперимента. Из (3.1) вытекают формулы для деформаций и намагниченностей

$$(3.2)\qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3K}\sigma\delta_{ij} + \frac{3}{2\sigma_и}\left(\varepsilon_и + \frac{\partial \varkappa_0}{\partial \sigma_и} H^2 - \frac{\partial a_0}{\partial \sigma_и} H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha\beta}\right) S_{ij} - a_0 H_i H_j,$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij},$$

$$I_i = \frac{\partial f}{\partial H_i} = \left(\varkappa_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial \varkappa_0}{\partial H} H - \frac{\partial a_0}{\partial H}\frac{H_\alpha H_\beta}{H}\right) H_i - 2a_0\sigma_{i\alpha}H_\alpha.$$

В случае простого растяжения длинного стержня в направлении оси вторая формула (3.2) переписывается в виде

$$(3.3)\qquad I = \varkappa_0(H, \sigma_и) H + \frac{H^2}{2}\frac{\partial \varkappa_0(H, \sigma_и)}{\partial H} - 2a_0(H, \sigma_и)\sigma_и H - H^2\sigma_и \frac{\partial a_0(H, \sigma_и)}{\partial H},$$

$$I = I_1,\ H = H_1, \sigma_и = \sigma_{11},$$

где σ_{11} — напряжение, прикладываемое к концам стержня; H_i и I_i направлены вдоль оси стержня.

Будем аппроксимировать экспериментально определенные кривые намагничивания для патентированной стальной проволоки [13], выбирая в качестве аналитической зависимости функцию, предложенную в [14]:

$$(3.4)\qquad \begin{gathered} \varkappa_0(H, \sigma_и)H + (H^2/2)\partial\varkappa_0/\partial H = \alpha_1 \operatorname{arctg}[\exp(\varkappa\sigma_и)\beta H], \\ 2a_0(H, \sigma_и)H + H^2\partial a_0/\partial H = \alpha_2 \operatorname{arctg}[\exp(\varkappa\sigma_и)\beta H], \end{gathered}$$

где α_1, α_2, $\varkappa$, β — опытные постоянные.

После интегрирования уравнений (3.4) получаются аналитические выражения для функций $\varkappa_0(H, \sigma_и)$ и $a_0(H, \sigma_и)$

$$(3.5)\qquad \varkappa_0(H, \sigma_и) = \frac{2\alpha_1}{H}\operatorname{arctg}[\exp(\varkappa\sigma_и)\beta H] - \frac{\alpha_1 \ln\left[\exp(-2\varkappa\sigma_и) + \beta^2H^2\right]}{\beta H^2 \exp(\varkappa\sigma_и)},$$

$$a_0(H, \sigma_и) = \frac{\alpha_2}{H}\operatorname{arctg}[\exp(\varkappa\sigma_и)\beta H] - \frac{\alpha_2 \ln\left[\exp(-2\varkappa\sigma_и) + \beta^2H^2\right]}{2\beta H^2 \exp(\varkappa\sigma_и)}.$$

С учетом (3.4) формулу (3.3) можно записать в виде

$$(3.6)\qquad I = (\alpha_1 - \alpha_2\sigma_и)\operatorname{arctg}[\exp(\varkappa\sigma_и)\beta H].$$

Аппроксимация при помощи (3.6) экспериментальных данных [14, 13] вполне удовлетворительна.

Постоянные α_1 и β определяются сопоставлением экспериментальных кривых с формулой (3.6) при $\sigma_и = 0$ [14]. После того как определены α_1 и β, константы $\varkappa$ и α_2 находятся при фиксированном $\sigma_и$ из условий

$$\varkappa = (1/\sigma_и)\ln(1/\beta H_\sigma),\ \alpha_1 - \alpha_2\sigma_и = (2/\pi)I_*(\sigma_и),$$

где $I_*(\sigma_и)$— намагниченность насыщения, а $\sigma_и$ в скобках указывает, что расчет постоянных производится на основе графика $I \sim H$ для заданного $\sigma_и$; H_σ берется на кривой $I \sim H$ соответствующим значению намагниченности, равному $(1/2)I_*(\sigma_и)$. Для патентированной стальной проволоки [13] на основании экспериментальных кривых $I \sim H$ при $\sigma_и = 0$ и при $\sigma_и = 9{,}7 \cdot 10^9$ дин/см^2 были определены значения постоянных, входящих в модель (3.2), (3.5):

$$\alpha_1 = 950 \text{ Гс}, \ \beta = 7{,}8 \cdot 10^{-2} (1/\text{Э}), \ \alpha_2 = 6{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2/\text{дин}, \quad \varkappa = 1{,}17 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2/\text{дин}. \tag{3.7}$$

Для переменных нагружений справедливы соотношения (3.2), записанные для приращений. При такой записи материальных соотношений для изотропного тела справедлив принцип, аналогичный (1.16), в котором для простоты можно взять параметры изменения масштаба, равными 2:

$$\tilde{\varkappa}_0^{(n)} = \varkappa_0 \left(\tilde{H}^{(n)}/2, \tilde{\sigma}_и^{(n)}/2\right), \quad \tilde{a}_0^{(n)} = (1/2)\, a_0 \left(\tilde{H}^{(n)}/2, \tilde{\sigma}_и^{(n)}/2\right), \quad \tilde{\varepsilon}_и^{(n)} = 2\varepsilon_и \left(\tilde{\sigma}_и^{(n)}/2\right). \tag{3.8}$$

Функции $\varkappa_0$, a_0 определяются для стали равенствами (3.5), (3.7). В данном пункте рассмотрены малые поля, не влияющие на вид функции $\varepsilon_и(\sigma_и)$. Поэтому в (3.8) входит функция $\varepsilon_и(\sigma_и)$, известная из опыта при отсутствии магнитного поля.

Поступила 23 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Москвитин В. В.** Пластичность при переменных нагружениях. М., изд. МГУ, 1965.
2. **Masing G.**— Wissenschaftliche Veroffentlichungen aus dem Simens-Konzern. 1926, Bd 5, N 135.
3. **Гусенков А. П., Шнейдерович Р. М.** О свойствах кривых циклического деформирования в диапазонах мягкого и жесткого нагружений.— Изв. АН СССР, ОТН, сер. мех. и маш., 1961, № 2.
4. **Седов Л. И.** О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформаций.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
5. **Лохин В. В.** Основные уравнения механики сплошных деформируемых сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, с учетом электрической и магнитной поляризации.— В кн.: Модели и задачи механики сплошных сред. № 31. М., изд. Ин-та механики МГУ, 1974.
6. **Черный Л. Т.** Построение моделей магнитоупругих сплошных сред с учетом магнитного гистерезиса и пластических деформаций.— В кн.: Модели и задачи механики сплошных сред. № 31. М., изд. Ин-та механики МГУ, 1974.
7. **Седов Л. И.** Математические методы построения новых моделей сплошных сред.— УМН, 1965, т. 20, вып. 5.
8. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
9. **Седов Л. И.** Механика сплошных сред. Т. 1. М., Наука, 1973.
10. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Т. 1. М., ГИТТЛ, 1948.
11. **Royleigh I. W.** Phil. Mag (5), 23, 225, 1887.
12. **Вонсовский С. В.** Магнетизм. М., Наука, 1971.
13. **Дехтяр М. В.** О магнитной диаграмме растяжения и положении точки Виллари на кривой намагничивания.— Изв. АН СССР. Сер. физическая, 1947, т. XI, № 6.
14. **Хазен А. М.** Нелинейная теория мощных магнитострикционных преобразователей для целей бурения.— В кн.: Магнитные элементы в устройствах для обработки информации и силовых буровых аппаратах. № 45. М., изд. Ин-та механики МГУ, 1976.