РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК Сибирское отделение ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2023

<u>№</u> 3

ГЕОМЕХАНИКА

УДК 539.3 + 51-74, 539.214, 539.42, 622.23

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ МКЭ С ВВЕДЕНИЕМ БЛОЧНЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПОДРАБОТАННОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

М. А. Журавков, М. А. Николайчик, Н. М. Климкович

Белорусский государственный университет, E-mail: zhuravkov@bsu.by, nikolaitchik.m@gmail.com, nikita.klimkovitch@yandex.ru, Проспект Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассмотрена задача численного моделирования геомеханического состояния породного массива при отработке пласта полезного ископаемого одиночным широким очистным забоем. Разработаны численные расчетные схемы, моделирующие геомеханическое состояние породной толщи от дневной поверхности до глубины ведения горных работ. Модельные задачи решены в двухмерной и трехмерной постановках. Полученные характеристики мульды оседаний дневной поверхности сравнивались с соответствующими характеристиками, рассчитанными с использованием инженерной методики. Результаты моделирования верифицировались данными натурных наблюдений за оседаниями реперов. Сравнительный анализ характеристик мульды оседания дневной поверхности, полученных в соответствии с построенной геомеханической моделью и согласно инженерной методике, показал корреляцию соответствующих значений для каждого из рассмотренных вариантов.

Сопряженные численные методы, метод конечных элементов, блочные элементы, столбовая система отработки, области техногенной трещиноватости, мульда оседаний, напряженнодеформированное состояние

DOI: 10.15372/FTPRPI20230301

Одна из наиболее актуальных задач современной геомеханики — построение численных алгоритмов и расчетных схем компьютерного моделирования, позволяющих корректно описывать геомеханическое состояние подрабатываемых массивов горных пород по всей глубине: от горизонтов ведения горных работ до дневной поверхности. Сложность построения таких алгоритмов определяется в первую очередь тем, что при подработке породных массивов формируются области, находящиеся в различном структурно-механическом состоянии.

Перспективными подходами, позволяющими построить эффективные алгоритмы для решения задач такого класса, являются модификация численных методов механики сплошных сред путем расширения границ их применения на те области, где нарушаются, например, классические условия сплошности, или комбинация численных методов механики сплошных сред и методов механики дискретных сред — сопряженные методы численного анализа [1]. Так, методы, основанные на понятии сплошности среды, плохо применимы для исследования геомеханических процессов после образования блочной структуры в массиве горных пород. Методы, в которых допускается нарушение условия сплошности, неэффективны для изучения поведения массива горных пород в рамках механики сплошной среды. Сопряженные (гибридные) методы базируются на преимуществах каждого из составляющих методов и нивелируют их недостатки. Применительно к моделированию геомеханических процессов сопряженный метод позволяет рассматривать все стадии поведения геоматериалов (до и после разрушения).

Прямые сопряженные технологии заключаются в моделировании поведения материала в зонах нарушения сплошности на основе дискретных методов и в областях сплошности — на основе континуальных численных методов. Основные виды гибридных моделей — это гибридные МКР-МКЭ-модели, МГЭ-МКЭ-модели, МДЭ-МГЭ-модели, МДЭ-МКЭ-модели (МКР — метод конечных разностей, МГЭ — метод граничных элементов, МКЭ — метод конечных элементов, МДЭ — метод дискретных элементов). Развитие сопряженных методов преимущественно связано с сопряжением методов конечных и дискретных элементов (МКЭ-МДЭ).

Реализация сопряженного МКЭ-МДЭ-метода используется главным образом для моделирования процессов разрушения, трещинообразования и разделения деформируемого тела на части, а затем для исследования поведения объекта в новом структурном состоянии [2, 3]. Каждый новый структурный элемент исходного сплошного тела представляется дискретным элементом. Все элементы взаимодействуют между собой. При этом каждый дискретный элемент может быть разделен на конечные элементы в рамках МКЭ, которые в дальнейшем могут разрушаться на меньшие блоки во время вычислений. Сопряженный МКЭ-МДЭ широко применяется при моделировании процессов разрушения массивов горных пород [3–5].

Теоретическим аспектам построения и развития методов с учетом блочности строения массива, различных реализаций метода дискретных элементов и его многочисленных приложений к решению задач геомеханики уделяется большое внимание [6-12]. Отметим, что российские ученые в области построения механико-математических моделей и разработки теоретических основ методов дискретных элементов применительно к задачам геомеханики являются в настоящее время одними из ведущих специалистов в мире.

Разработанный в настоящей работе сопряженный алгоритм для моделирования геомеханического состояния подработанной породной толщи по сути не использует классический метод дискретных элементов. В нем применяется специальный тип дискретного элемента, представляющего собой систему двух или трех упругих элементов соответственно для задач в двухи трехмерной постановке (рис. 1). Жесткость упругих элементов переменная. Так как численная модель используется для определения напряженно-деформированного состояния подрабатываемой породной толщи по ее глубине и на дневной поверхности, то жесткость упругих элементов рассчитывается при верификации модельных расчетов с натурными данными по сдвижениям точек дневной поверхности.



Рис. 1. Дискретные (блочные) двухмерный (а) и трехмерный элементы (б)

Алгоритм построен так, что блочные элементы размещаются последовательно в выработанном пространстве очистной выработки, а затем в области первичного и вторичного обрушений породных масс в окрестности выработанного пространства. На каждом итерационном шаге вычислений проверяются условия связи между соседними блочными элементами и с конечными элементами на границе с областью, моделируемой конечно-элементной моделью.

Цель настоящей работы — построение численного алгоритма и расчетных схем, позволяющих анализировать геомеханическое состояние породной толщи от дневной поверхности до глубин ведения горных работ. Расчетные схемы должны учитывать развитие горных работ, предоставлять возможность выделить в массиве горных пород характерные области (зоны), находящиеся в различном структурно-механическом состоянии и формирующиеся вследствие ведения подземных горных работ [13, 14]. Вычислительные алгоритмы должны учитывать динамику изменения таких областей во времени.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основные объекты исследований — геомеханические процессы в породном массиве калийных солей при ведении подземных горных работ. При решении модельных задач рассматриваются технологические схемы отработки пластов полезного ископаемого длинными очистными забоями (лавами) различных мощностей при варьировании глубин ведения горных работ.

Для выполнения модельных исследований разработана базовая численная геомеханическая модель, позволяющая вычислять напряженно-деформированное состояние (НДС) и проводить оценку геомеханического состояния подрабатываемой породной толщи для пластовых месторождений полезных ископаемых от горизонтов ведения горных работ до дневной поверхности. Базовая модельная задача предназначена для исследования геомеханического состояния породной толщи при отработке пласта полезного ископаемого одиночной лавой.

Для верификации предложенных алгоритмов и разработанной численной модели определения геомеханического состояния массивов горных пород с подземными выработками использованы результаты исследований геомеханического поведения массивов горных пород в условиях Старобинского месторождения калийных солей (результаты наблюдений за характеристиками мульд оседаний и сдвижений дневной поверхности, данные наблюдений за оседаниями реперов в окрестности выработок рудников ОАО "Беларуськалий"), а также результаты расчета характеристик мульды оседания дневной поверхности в соответствии с действующими правилами [15]. Решение модельных задач осуществляется с помощью программного обеспечения ANSYS Mechanical, дополненного собственными авторскими приложениями на языке APDL.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ МКЭ С ВВЕДЕНИЕМ БЛОЧНЫХ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Разработанный алгоритм решения рассматриваемого типа модельных задач геомеханики представляет собой модификацию МКЭ с введением дополнительных блочных элементов и в базовом варианте включает четыре расчетных этапа.

На первом этапе определяется начальное НДС ненарушенного массива. Породная толща моделируется как упругая среда на базе конечно-элементной модели. Граничные условия на нижней грани расчетной области представляют собой условия отсутствия перемещений (рис. 2). На боковых гранях расчетной области действует горное давление величиной ρgh . Задача решается в поле силы тяжести.

На всех последующих этапах вычислений области массива горных пород, рассматриваемые в приближении сплошной среды, моделируются как упругопластическая среда. В качестве модели поведения пород выбрана модель Кулона – Мора [16, 17].



Рис. 2. Граничные условия. Области: *1* — КЭ-зона на первом и блочно-элементная зона на втором шаге; *2* — блочно-элементная зона на третьем и четвертом шаге

На втором этапе вычисляется НДС массива после начала отработки лавы до момента, когда произошло первоначальное обрушение пород в кровле выработки. До первичного обрушения пород в выработанное пространство расчетная схема реализовывалась только на базе МКЭ. Граничные условия на контуре выработанного пространства при этом представляют собой условия свободного от нагрузок контура.

Область первичного обрушения в кровле очистной выработки определяется по выполнению предельного условия Кулона – Мора. На данном шаге моделирования в отработанное пространство очистной выработки и в точки расчетной области, где не выполняется критерий Кулона – Мора (рис. 2, область *I*), размещаются дополнительные блочные элементы, моделируюцие разупрочнение породной толщи. Блочные элементы (рис. 1) представляют собой упругие элементы с определенной (рассчитываемой) жесткостью. Жесткости упругих элементов (в горизонтальных и вертикальном направлениях) рассчитываются таким образом, чтобы обеспечить выполнение следующего условия: значение максимального оседания дневной поверхности на первоначальном этапе формирования мульды оседаний составляет $0.15\eta_{max}$ (η_{max} — оседание при закончившемся процессе сдвижения). Значение η_{max} вычисляется согласно утвержденной инженерной методике [15]. На данном и последующих этапах граничное условие в виде давления на боковых гранях расчетной области заменяется на условие ограничения перемещений вдоль нормалей.

На втором этапе моделирования учитывается напряженное состояния, определяемое на первом шаге. Это касается и последующих этапов, т. е. на третьем и четвертом этапах учитывается НДС, рассчитанное на втором и третьем шагах соответственно. В соответствие с этим граничные условия на контурах контакта блочных элементов и конечных элементов соответствуют вычисленным на предыдущих шагах значениям. Кроме того, соблюдается условие полного контакта блочных и конечных элементов.

По результатам численного моделирования на данном расчетном шаге наблюдается формирование в подработанной породной толще в окрестности выработанного пространства характерных зон нарушения сплошности [13, 16]. Так, в краевых зонах очистной выработки отмечается образование двух зон: зоны нарушения предельного условия по напряжениям сжатия, находящейся непосредственно около границ очистной выемки, и зоны, где проявляются развитые линии скольжения (нарушение предельного условия Кулона – Мора). Данные области впоследствии формируют свод возможных полных сдвижений в массиве над очистной выемкой и область разгрузки под очистным пространством [13]. *На третьем этапе* рассчитывается НДС массива горных пород после окончания процесса первичного обрушения пород в выработанное пространство и формирования области возможных полных обрушений. На этом шаге моделирования конечные элементы в вычисленной области возможных полных обрушений (рис. 2, область 2) заменяются блочными элементами, у которых жесткости упругих элементов рассчитываются таким образом, чтобы максимальные оседания дневной поверхности соответствовали значению 0.85 η_{max} [15].

На четвертом этапе вычисляется НДС породной толщи на момент окончания активного процесса ее сдвижения. В блочных элементах, введенных на предыдущем шаге, изменяются жесткости упругих элементов таким образом, чтобы моделируемые значения максимальных оседаний в мульде соответствовали значениям, рассчитанным согласно инженерной методике [15] или имеющим место в натурных условиях. На рис. 3 приведен пример выделения по результатам моделирования в подрабатываемом массиве горных пород различных областей, формирующихся вследствие влияния очистных работ.



Рис. 3. Выделение характерных зон в подрабатываемом массиве горных пород на основе расчета напряженного состояния (Па)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ПОРОДНОЙ ТОЛЩИ ПРИ ОТРАБОТКЕ ПЛАСТА ПОЛЕЗНОГО ИСКОПАЕМОГО ОДИНОЧНОЙ ЛАВОЙ

Используя построенную базовую численную модель, можно решать задачи, связанные с изучением НДС и геомеханического состояния породного массива при ведении горных работ.

Рассмотрена задача установления зависимости характерных размеров зоны влияния горных работ от параметров очистных выработок. Численное моделирование выполнялось для различных вариантов глубин ведения горных работ: вариант I — лава на глубине 600 м; вариант II — лава на глубине 800 м; вариант III — лава на глубине 1000 м. Расчетные компьютерные модели для представленной модельной задачи строились в двухмерной постановке.

Для всех вариантов расположения лав принималось, что максимальная глубина залегания осадочного слоя составляет 109 м; максимальная глубина залегания глинисто-мергелистой толщи (ГМТ) — 309 м. При моделировании рассматривались лавы с выемочной мощностью 3.0 и 1.2 м, шириной 200 м. Физико-механические свойства слоев массива горных пород, использованные при выполнении расчетов, приведены в табл. 1.

В соответствии с [15] границы зоны влияния горных выработок определяются граничными углами: φ_0 — в наносах, δ_0 — в коренных породах. Значения угловых параметров мульды сдвижения для условий Старобинского месторождения калийных солей составляют: $\varphi_0 = 45^\circ$, $\delta_0 = 60^\circ$.

Порода	Плотность, кг/м ³	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	Предел на сжатие, МПа	Предел на растяжение, МПа	Угол внутреннего трения, град	Коэффициент сцепления, МПа
Осадочный слой	2043	2.76	0.36			11.12	0.19
ГМТ	2150	0.56	0.40			46.55	1.25
Соляная пачка	2400	2.05	0.27	~30	~ 1	41.00	1.47

ТАБЛИЦА 1. Физико-механические свойства материалов

Согласно [15], началом процесса сдвижения точки дневной поверхности следует считать дату наблюдений, на которую оседание в этой точке достигает 15 мм. Поэтому при численном моделировании ширина мульды определялась областью дневной поверхности с вертикальным перемещением 15 мм и более.

Далее приведены некоторые результаты численных расчетов НДС подработанного массива горных пород. Жесткости упругих элементов при мощности отрабатываемого пласта 3 м для всех вариантов расположения лав на каждом расчетном этапе представлены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Жесткость упругих связей (в вертикальном / горизонтальном направлениях) при отрабатываемой мощности пласта 3 м, Н/м

	Лава на глубине, м			
Этап сдвижения массива горных пород	600	800	1000	
Формирование очистного	$1.8 \cdot 10^9 / 1.8 \cdot 10^{10}$	$23.10^{9}/23.10^{10}$	$7.0.10^{9}/7.0.10^{10}$	
пространства на заданную ширину	1.0 10 / 1.0 10	2.5 10 7 2.5 10	7.0 10 7 7.0 10	
Окончание этапа первичного обру-	$1.0. \cdot 10^8 / 1.0. \cdot 10^9$	$5.0.10^{8}/5.0.10^{9}$	$1.7 \cdot 10^9 / 1.7 \cdot 10^{10}$	
шения пород в кровле выработки	1.0 10 / 1.0 10	5.0 10 / 5.0 10	1.7 10 / 1.7 10	
Окончание активного процесса	$2.5 \cdot 10^8 / 2.5 \cdot 10^9$	$3.0.10^9 / 3.0.10^{10}$	$2.1.10^{10}/2.1.10^{11}$	
сдвижения пород	2.5 10 / 2.5 10	5.0 10 / 5.0 10	2.1 10 / 2.1 10	

В табл. 3 приведено сравнение характеристик мульды оседаний, полученных в результате модельных исследований и рассчитанных в соответствии с инженерной методикой при различных выемочных мощностях лав.

ТАБЛИЦА 3. Сравнение ширины мульды на дневной поверхности при выемочной мощности пласта 3 / 1.2 м

	Глубина, м			
ширина мульды, м	600	800	1000	
По результатам моделирования	990/927	1150/1109	1279/1263	
По инженерной методике	985/985	1216/1216	1447/1447	
Разница в вычислениях, %	0/6	5/9	12/13	

В табл. 4 представлено сравнение осредненных граничных углов в различных пачках слоев (эффективные слои), полученных в результате численных расчетов, с их значениями, рассчитанными согласно действующей методике.

ТАБЛИЦА 4. Значения усредненных граничных углов в массиве горных пород при выемочной мощности пласта 3 / 1.2 м, град

Глибина м	Граничный угол				
1 лубина, м	в осадочном слое	в ГМТ	в соляной пачке		
600	55/102	68/65	51/45		
800	103 / 122	70/63	49/47		
1000	112/144	69/60	54/50		
По инженерной методике	45/45	60 / 60	60 / 60		

На рис. 4 показаны профили оседаний породной толщи по высоте ее подработки от глубин ведения горных работ до дневной поверхности с наложенными на них значениями граничных углов.



Рис. 4. Изолинии оседаний породной толщи и граничные углы, полученные по инженерной методике (черные линии) и по результатам моделирования (белые линии) при мощности отработки 3 м на глубине 600 м (*a*); 800 м (*б*); 1000 м (*в*)

РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

При моделировании геомеханического состояния подрабатываемой породной толщи на основе трехмерной численной модели массива горных пород с использованием предложенного алгоритма рассмотрен случай отработки пласта полезного ископаемого одиночной лавой. Для верификации модели использовались результаты наблюдений за оседаниями реперов на дневной поверхности, установленных в районе отработки лавы № 102 рудника 1 РУ ОАО "Беларуськалий".

Геометрические параметры лавы: вынимаемая мощность 2.15 м; ширина лавы в направлении, перпендикулярном направлению движения забоя, 221 м; длина выемочного столба по направлению движения забоя 2600 м. Глубина ведения горных работ 555 м. Глубина залегания осадочного слоя 105 м, максимальная глубина залегания ГМТ 370 м.

В результате серии численных расчетов получено, что высота свода обрушения и зоны наведенной техногенной трещиноватости составляет 89 м; ширина свода обрушения и зоны наведенной техногенной трещиноватости в направлении, перпендикулярном направлению движения забоя (профиль 1), — 237 м (на уровне отработки лавы); длина свода обрушения и зоны наведенной техногенной трещиноватости в направлении движения забоя (профиль 2) — 2618 м (на уровне отработки лавы).

В области обрушения и зоны наведенной техногенной трещиноватости можно выделить две характерные зоны: зону нарушения предельного условия по напряжениям сжатия, находящуюся непосредственно около границ очистной выемки (рис. 5), и зону, где могут проявиться развитые линии скольжения (выполнение предельного условия Кулона – Мора, рис. 6).



Рис. 5. Краевые зоны выполнения предельного условия по напряжениям сжатия с указанием линейных размеров (отмечены прямоугольниками): *а* — профиль 1; *б* — профиль 2



Рис. 6. Зона выполнения предельного условия Кулона – Мора (формирования свода возможных полных сдвижений и зоны разгрузки под лавой) с указанием линейных размеров (отмечена прямоугольником) (профиль 2)

На рис. 7 представлены результаты моделирования вертикальных перемещений в подработанной породной толще после проведения очистных работ. В табл. 5 приведено сравнение характеристик мульды оседания, полученных в результате численных расчетов, с их значениями согласно данным натурных замеров.



Рис. 7. Изолинии вертикальных перемещений (м) в породной толще после проходки лавы: *а* — профиль 1; *б* — профиль 2

Определяемая в соответствии с нормативным документом [15] граница существенного оседания под влиянием очистной выемки в лаве № 102 располагается на расстоянии ~274 м от движущегося забоя лавы, образуя граничный угол 63°; оседание по центру выработанного пространства на удалении 1243 м от забоя лавы достигает 1070 мм, составляя 83 % от расчетного [15].

Характеристика мульды оседания	Максимальное оседание в мульде сдвижений, мм	Полуширина мульды минус полуширина лавы / ширина всей мульды (профиль 2), м
По натурным замерам	1070	274/3148
По результатам моделирования	880	329/3258
Разница в вычислениях, %	18	20/3

Сравнительный анализ модельных исследований, выполненных на основе трех- и двухмерной расчетных схем, показал достаточно близкие значения определяемых величин. Это свидетельствует о том, что для рассматриваемого класса задач при больших геометрических протяженностях одного из размеров очистных выработок корректным является использование расчетных моделей в двухмерной постановке.

выводы

Построенная численная геомеханическая модель позволяет изучать геомеханическое состояние подрабатываемого массива горных пород от глубин ведения горных работ до дневной поверхности с учетом изменений НДС и структурно-механического состояния в подрабатываемом массиве во времени и пространстве при развитии подземных горных работ.

Выполненные сравнительные расчеты формирования мульд оседаний на дневной поверхности в соответствии с построенной численной геомеханической моделью и согласно инженерной методике показали корреляцию соответствующих значений оседаний и ширины мульды оседаний для всех рассмотренных вариантов. Вместе с тем имеются существенные расхождения с инженерной методикой в расчетах граничных углов и в построении областей полных сдвижений по всей глубине подработанной толщи горных пород. Контур области полных сдвижений по результатам компьютерного моделирования, согласно разработанной численной геомеханической модели, строится более корректно по всей глубине подработанного массива горных пород. Данное заключение имеет важное значение при планировании горных работ и размещении горнотехнических сооружений в подрабатываемом массиве горных пород.

В дальнейшем предполагается развитие построенного алгоритма: введение в блочный элемент помимо упругого также и вязкого элемента; моделирование различных условий взаимодействия элементов между собой; расчет характеристик блочных элементов на основе механико-математической аналитической модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Журавков М. А. Современные численные методы в механике. Минск: БГУ, 2022. 132 с.
- 2. Li Sh, Zhao Mh, Wang Yn, and Wang Jg. A continuum-based discrete element method for continuous deformation and failure process, Comput. Mech., WCCM VI in conjunction with APCOM'04, Tsinghua University Press & Springer-Verlag, Beijing, China, 2004.
- 3. Ariffin A. K., Huzni S., Nor M. J. M., and Mohamed Nan. Hybrid finite-discrete element simulation of crack propagation under mixed mode loading condition, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 2006, Vol. 195. P. 4579-4593.
- 4. Morris J. P., Rubin M. B., Block G. I., and Bonner M. P. Simulations of fracture and fragmentation of geologic materials using combined FEM/DEM analysis, Int. J. Impact Eng., 2006, Vol. 33. P. 463–473.
- 5. Karami A. and Stead D. Asperity degradation and damage in the direct shear test: A hybrid FEM/DEM approach, Rock Mech. Rock Eng., 2008, Vol. 41. P. 229–266.
- 6. Кочарян Г. Г., Кулюкин А. М. Исследование закономерностей обрушения подземных выработок в горном массиве блочной структуры при динамическом воздействии. Ч. 2: О механических свойствах межблоковых промежутков // ФТПРПИ. — 1994. — № 5.
- 7. Клишин С. В., Ревуженко А. Ф. Численное исследование пластического поведения сыпучих сред при деформировании с изломами траекторий нагружения // ФТПРПИ. 2015. № 5. С. 108–114.
- **8. Чанышев А. И., Ефименко Л. Л.** Математические модели блочных сред в задачах механики. Ч. 1. Деформация слоистой среды // ФТПРПИ. 2003. № 3 С. 72 84.
- **9.** Александрова Н. И. Волны маятникового типа на поверхности блочного породного массива при динамическом воздействии // ФТПРПИ. 2017. № 1 С. 64–69.
- 10. Журкина Д. С., Клишин С. В., Лавриков С. В., Леонов М. Г. Моделирование локализации сдвигов и перехода геосреды к неустойчивым режимам деформирования на основе метода дискретных элементов // ФТПРПИ. — 2022. — № 3 — С. 13–22.
- 11. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Математическое моделирование неустойчивого режима деформирования породного массива с учетом внутренних самоуравновешенных напряжений // ФТПРПИ. — 2020. — № 6. — С. 12–29.
- 12. Чанышев А. И., Абдулин И. М. Новые постановки задач геомеханики с учетом запредельного деформированного состояния // ФТПРПИ. 2022. № 5. С. 12–27.
- **13.** Викторов С. Д., Иофис М. А., Гончаров С. А. Сдвижение и разрушение горных пород. М.: Наука, 2005. 277 с.
- 14. Баклашов И. В. Геомеханика. Т. 1. Основы геомеханики. М.: МГГУ, 2004. 208 с.
- **15. Правила охраны** зданий, сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок на Старобинском месторождении калийных солей: МКС 73, 13.020.30. Минск: Белнефтехим, 2014. 116 с.
- 16. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. М.: Физматлит, 2008. 832 с.
- 17. Журавков М. А., Старовойтов Э. И. Математические модели механики твердых тел. Минск: БГУ, 2021. 535 с.

Поступила в редакцию 01/III 2023 После доработки 05/V 2023 Принята к публикации 18/V 2023