УДК 519.676, 519.237

Минимум дисперсии центрированных дискретных случайных переменных*

Л.Я. Савельев

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mail: savelev@math.nsc.ru

Савельев Л.Я. Минимум дисперсии центрированных дискретных случайных переменных // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 3. — С. 257–265.

Решается задача выделения случайных величин и векторов с дискретными распределениями, имеющими данное среднее значение и минимальную дисперсию. Векторная модель связана со статистическими методами вычисления кратных интегралов и решения систем интегральных уравнений.

Ключевые слова: *дискретное распределение, случайная величина, случайный вектор, среднее значение, дисперсия.*

Savelyev L.J. A minimum of the centered discrete random variables dispersion // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 3. — P. 257–265.

The problem of isolation of discrete random values and vectors with discrete distributions having a given average value and a minimum dispersion is solved. The vector model is associated with statistical methods of calculation of multiple integrals and solutions to systems of the integral equations.

Key words: *discrete distribution, random variable, random vector, average value, dispersion.*

Со статистическими методами вычисления интегралов и решения интегральных уравнений связана следующая задача: во множестве всех целочисленных случайных величин с данным средним и конечной дисперсией найти величину, имеющую наименьшую дисперсию. В заметке [1] Г.А. Михайлова и И.Н. Медведева было сформулировано утверждение, описывающее такую случайную величину и ее дисперсию. В книге [2] этих авторов намечено доказательство. Свое решение задачи о наименьшей дисперсии дали А.В. Войтишек и С.В. Рогазинский [3].

В предлагаемой статье описывается аналогичная задача для случайных величин и векторов с дискретными распределениями. Векторная модель связана со статистическими методами вычисления кратных интегралов и решения систем интегральных уравнений [4]. Решение докладывалось на Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2009.

1. Дискретные случайные величины

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, дискретное счетное множество $U \subset R$, точку $a \in R$ и произвольную случайную величину $\xi : \Omega \to U$ со средним

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00275).

значением $E[\xi] = a$, конечными вторым моментом $E[\xi^2]$ и дисперсией $D[\xi] = E[(\xi - a)^2]$. Обозначим через $\mathcal{F}[a]$ множество всех таких случайных величин и будем называть эти величины *допустимыми.* Положим $\Pr[\xi^{-1}[u]] = x[u]$, $u \in U$, $\xi^{-1}[u] \in \mathcal{A}$. По определению $x[u] \geq 0$, $\sum x[u] = 1$ и $E[\xi] = \sum u\, x[u] = a$, $E[\xi^2] = \sum u^2 x[u]$, $D[u] = \sum (u-a)^2 x[u]$.

Обозначим через $\mathcal{D}[a]$ множество всех таких распределений $x = (x[u])$. Условимся называть эти распределения *допустимыми.* Будем понимать равенство случайных величин как равенство их распределений.

Для счетного множества U не вводится нумерация. Неупорядоченное суммирование ведется по всем $u \in U$. Для простоты обозначений множество U в знаке суммы не указывается явно. При суммировании по подмножествам множества U эти подмножества будут указываться. Из сформулированных условий и свойств неупорядоченного суммирования следует, что $\sum |u|\, x[u] < \infty$ и все подсемейства суммируемых семейств вещественных чисел имеют суммы. Конечность 1-х и 2-х моментов означает суммируемость семейств $(x[u])$, $(u\, x[u])$, $((u-a)^2 x[u])$ и всех их подсемейств. Отсутствие принудительной нумерации позволяет использовать специфику рассматриваемой случайной величины в прикладных задачах. Свойства неупорядоченного суммирования кратко описаны в приложении к [5] и подробно в [6]. Оно обладает общими свойствами коммутативности и ассоциативности. Любая нумерация дает абсолютно суммируемый ряд.

Исключим тривиальный случай $a \in U$, в котором минимальная дисперсия равна нулю. При этом условии, вследствие предполагаемой дискретности множества $U \in R$, существуют точки $s = \max\{u \in U : u < a\}$, $t = \min\{u \in U : u > a\}$. Таким образом, $a \in]s, t[$ при некоторых $s \in U$, $t \in U$, $s < t$, и в открытом интервале $]s, t[$ нет точек из U. Обозначим через $\mathcal{F}[a, s, t]$ и $\mathcal{D}[a, s, t]$ множества соответствующих допустимых случайных величин и их распределений.

Ставится следующая задача: *найти допустимые случайные величины, имеющие наименьшую дисперсию.* Эквивалентная формулировка: *найти допустимые распределения* $x = (x[u])$, *минимизирующие функционал* $f[x] = \sum (u-a)^2 x[u]$.

Так как $D[\xi] = E[\xi^2] - a^2$, то при данном $E[\xi] = a$ вместо минимума $D[\xi] = E[(\xi - a)^2]$ можно искать минимум $E[\xi^2] = \sum u^2 x[u]$ и наоборот.

Замечание. Семейство $x = (x[u])$ описывает распределение единицы массы, перенесенной функцией $\xi : \Omega \to U$ с множества Ω на множество $U \subset R$. Точка $E[\xi] = a$ является центром масс, а $D[\xi] = E[(\xi - a)^2]$ — момент инерции относительно центра. Нужно найти распределение единицы массы на множестве U с данным центром и наименьшим моментом инерции относительно него. Аналогия с дискретной механической системой подсказывает решение поставленной задачи. Из физических соображений ясно, что момент инерции относительно центра масс будет наименьшим тогда, когда распределение сосредоточено в ближайших к центру точках множества U. У всех остальных допустимых распределений масс этот момент будет строго больше. Остается дать формальное доказательство этих утверждений.

1.2. Решение задачи

Замена переменных позволяет свести общий случай к частному с более простыми выкладками. Рассмотрим распределение $p = (p[u]) \in \mathcal{D}[a, s, t]$, сосредоточенное в точках s, t и имеющее центр a : $p[s] > 0$, $p[t] > 0$ и $p[u] = 0$ при $u \neq s$, $u \neq t$, а, кроме того, $p[s] + p[t] = 1$ и $sp[s] + tp[t] = a$. Обозначим через $\zeta : \Omega \to U$ переменную с распределением p. Ясно, что $\zeta \in \mathcal{F}[a, s, t]$. Положим: $\overline{U} = U - a$, $\overline{\xi} = \xi - a$, $\overline{\zeta} = \zeta - a$, $\overline{u} = u - a$, $\overline{s} = s - a$, $\overline{t} = t - a$. Распределения переменных $\overline{\xi}$, $\overline{\zeta}$ обозначим $\overline{x} = (\overline{x}[\overline{u}])$, $\overline{p} = (\overline{p}[\overline{u}])$. Из определений следует, что $x[u] = \overline{x}[\overline{u}]$, $p[u] = \overline{p}[\overline{u}]$, $E[\overline{\xi}] = a - a = 0$, $D[\xi] = E[(\xi - a)^2] = E[\overline{\xi}^2] = D[\overline{\xi}]$, $D[\zeta] = D[\overline{\zeta}]$. Заметим, что так как по предположению $a \notin U$, то $0 \notin \overline{U}$.

При введенных обозначениях $0 \in]\overline{s}, \overline{t}[$ для некоторых $\overline{s} \in \overline{U}$, $\overline{t} \in \overline{U}$, $\overline{s} < 0 < \overline{t}$, и в интервале $]\overline{s}, \overline{t}[$ нет точек множества $\overline{U}$. Заметим, что $\overline{\xi} : \Omega \to \overline{U}$, $\overline{\zeta} : \Omega \to \overline{U}$ и $\overline{\xi} \in \mathcal{F}[0, \overline{s}, \overline{t}]$, $\overline{\zeta} \in \mathcal{F}[0, \overline{s}, \overline{t}]$, $\overline{x} \in \mathcal{D}[0, \overline{s}, \overline{t}]$, $\overline{p} \in \mathcal{D}[0, \overline{s}, \overline{t}]$. Распределение $\overline{p}$ сосредоточенно в точках $\overline{s}, \overline{t}$ и имеет центр $0 \in]\overline{s}, \overline{t}[$. Пусть $\overline{p}[\overline{s}] = 1 - \theta$, $\overline{p}[\overline{t}] = \theta$ $(0 < \theta < 1)$ и $\overline{p}[\overline{u}] = 0$ при $\overline{u} \neq \overline{s}$, $\overline{u} \neq \overline{t}$. Равенство $\overline{s}(1 - \theta) + \overline{t}\theta = 0$ верно при $\theta = \overline{s}/(\overline{s} - \overline{t})$. Обозначим через $\overline{\zeta} : \Omega \to \overline{U}$ переменную с распределением $\overline{p}$. Заметим, что $D[\overline{\zeta}] = \overline{s}^2(1 - \theta) + \overline{t}^2\theta = -\overline{s}\overline{t} = |\overline{s}|\overline{t}$.

Теорема 1. *Среди переменных $\xi \in \mathcal{F}[a, s, t]$ наименьшую дисперсию имеет переменная ζ с распределением $p = (p[u])$ и только она.*

Теорема утверждает, что $\min\{D[\xi] : \xi \in \mathcal{F}[a, s, t]\} = D[\zeta]$ и переменная ζ с наименьшей дисперсией среди допустимых единственная. Точнее, речь идет о единственности распределения минимизирующего функционала $f[x] = \sum (u - a)^2 x[u]$. Предлагаемое доказательство близко намеченному в [2] доказательству сформулированной в [1] леммы о наименьшем втором моменте для целочисленных случайных величин с данным средним значением.

Доказательство. Равенство для дисперсий позволяет перейти к центрированным переменным $\overline{\xi}$, $\overline{\zeta}$. Используем равенство

$$\overline{\xi}^2 = -\overline{s}\overline{t} + (\overline{s} + \overline{t})\overline{\xi} + (\overline{\xi} - \overline{s})(\overline{\xi} - \overline{t}). \tag{1}$$

Так как $E[\overline{\xi}] = 0$ и $D[\overline{\zeta}] = -\overline{s}\overline{t}$, то из (1) следует равенство

$$D[\overline{\xi}] = D[\overline{\zeta}] + E[(\overline{\xi} - \overline{s})(\overline{\xi} - \overline{t})]. \tag{2}$$

Положим $R[\bar{x}] = E[(\bar{\xi} - \bar{s})(\bar{\xi} - \bar{t})]$ и заметим, что

$$R[\overline{x}] = \sum_{\overline{u} < \overline{s}} (\bar{s} - \bar{u})(\bar{t} - \bar{u})\bar{x}[\bar{u}] + \sum_{\overline{u} > \overline{t}} (\bar{s} - \bar{u})(\bar{t} - \bar{u})x[\bar{u}].$$

При $\overline{u} < \overline{s}$ и при $\overline{u} > \overline{t}$ верно неравенство $(\overline{s} - \overline{u})(\overline{t} - \overline{u}) > 0$. Равенство $R[\overline{x}] = 0$ верно тогда и только тогда, когда $\overline{x}[\overline{u}] = 0$ при всех $\overline{u} \neq \overline{s}$, $\overline{u} \neq \overline{t}$. То есть, когда $\overline{x} = \overline{p}$ и $\overline{\xi} = \overline{\zeta}$. Если $\overline{\xi} \neq \overline{\zeta}$ и $\overline{x} \neq \overline{p}$, то существует точка $\overline{u}_0 \neq \overline{s}$, $\overline{u}_0 \neq \overline{t}$ такая, что $\overline{x}[\overline{u}] > 0$ и поэтому $R[\overline{x}] > 0$. Отсюда и из (2) следует, что неравенство $D[\overline{\xi}] \geq D[\overline{\zeta}]$ верно для всех допустимых переменных $\overline{\xi}$, а равенство $D[\overline{\xi}] = D[\overline{\zeta}]$ верно только при $\overline{\xi} = \overline{\zeta}$. Так как $D[\xi] = D[\overline{\xi}]$ и $D[\zeta] = D[\overline{\zeta}]$. □

Из равенств $p[t] = \overline{p}[\overline{t}] = \overline{s}/(\overline{s} - \overline{t})$ и $p[s] = 1 - p[t]$ следует, что допустимая переменная ζ с наименьшей дисперсией имеет распределение

$$p[s] = (t - a)/(t - s), \quad p[t] = (a - s)/(t - s).$$

Для дисперсии и второго момента переменной ζ верны равенства:

$$D[\zeta] = (a - s)(t - a), \quad E[\zeta^2] = a^2 + (a - s)(t - a).$$

Замечание. Теорема верна, в частности, для случайных величин со значениями в множествах $U = N$, Z (натуральных и целых чисел). Все сказанное верно и для некоторых недискретных счетных множеств $U \in R$, например для множеств типа $U = \{s, t\} \bigcup (Q \backslash [s, t])$, где $s \in Q$, $t \in Q$ и $s < t$.

2. Дискретные случайные векторы

2.1. Предварительные сведения

Сформулируем в подходящих обозначениях некоторые определения и факты многомерной геометрии [7, 8]. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство R^n. Пусть $0 \le m \le n$ и множество S состоит из $m+1$ точек $s \in R^n$, среди которых ровно m *линейно независимых*. Множество всех *выпуклых комбинаций* $a = \sum p[s]s$ точек $s \in S$ с коэффициентами $p[s] \ge 0$ и $\sum p[s] = 1$ называется *m-мерным симплексом* с множеством *вершин* S и для простоты обозначается тоже S. Содержащиеся в S симплексы называются его *гранями*. Вершины симплекса являются 0-*мерными* гранями. Каждый n-мерный симплекс содержит $\binom{n+1}{m+1}$ m-мерных граней. В частности $\binom{n+1}{2}$ одномерных *ребер*. В дальнейшем без оговорок будут рассматриваться как правило *невырожденные* симплексы, имеющие хотя бы две вершины и одно ребро.

Так как в множестве S есть m линейно независимых точек, то коэффициенты $p[s]$ определяются однозначно. Они называются *барицентрическими координатами* точки a в симплексе S и составляют распределение вероятностей $p = (p[s])$ с *барицентром* или просто *центром* a. Если a — внутренняя точка симплекса S, то распределение $p = (p[s])$ *невырожденное*: $p[s] > 0$, $s \in S$ и $\sum p[s] = 1$, $\sum sp[s] = a$. Центр b *равномерного* распределения $p[s] = 1/(m+1)$ называют *эквибарицентром* множества S.

Пусть $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, $p[s_i] = p_i$, $0 \le i \le n$, точки $s_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{in}\}$ линейно независимы. Тогда вероятности p_i находятся из системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i s_{ij} = a_j, \quad \sum_{i=0}^{n} p_i = 1.$$

Ее определитель det равен определителю $n \times n$ матрицы со строками $s_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{in}\}$ и не равен нулю. Решение получается по правилам Крамера: $p_i = \det[a,i]/\det$, где определитель $\det[a,i]$ получается из det заменой i-го столбца на столбец $\{a, i\}$, $a = (a_j)$ из правой части системы.

Существует единственная точка c симплекса S, равноудаленная от всех его вершин: $\|s - c\| = r$, $s \in S$. Точка c называется *геометрическим центром* или просто *центром* симплекса, а число r — его *радиусом*. Эти центр и радиус определяют *описанные* вокруг m-мерного симплекса S m-мерную сферу $S^m[c,r]$ и n-мерную сферу $S^n[c,r]$. При $m = n = 1$ — это двоеточие, составленное из концов отрезка. При $m = n = 2$ — это окружность, описанная вокруг треугольника, а при $m = n = 3$ — это сфера, описанная вокруг тетраэдра. Вокруг m-мерной грани n-мерного симплекса можно описать две сферы с одинаковыми центром и радиусом: m-мерную и n-мерную. Их общий центр совпадает с центром рассматриваемой грани. Все $(n-m)$-мерные плоскости, проведенные через центры m-мерных граней n-мерного симплекса S перпендикулярно плоскостям этих граней, пересекаются в центре описанной вокруг S n-мерной сферы. При $n = 3$ и $m = 1$ шесть плоскостей в R^3, проведенных через середины ребер тетраэдра перпендикулярно этим ребрам, пересекаются в центре описанной вокруг тетраэдра сферы. Заметим, что геометрический центр симплекса может находиться и вне его. Термин позволяет не говорить об описанной сфере, когда она не нужна. Если геометрический центр симплекса принадлежит ему, то он является барицентром некоторого распределения вероятностей на его вершинах.

В [9] подробно описаны абстрактные *симплициальные комплексы* (коротко *комплексы)* и их свойства. Сформулируем основные определения, конкретизируя их для пространства R^n. Симплициальный комплекс $(K, \mathcal{P})$ состоит из множества $K \subseteq R^n$ вершин и класса $\mathcal{P}$ непустых *конечных* множеств вершин, которые называются *симплексами.* Требуется, чтобы класс $\mathcal{P}$ содержал все *точечные* множества $\{v\}$ из вершин $v \in K$ и чтобы множества класса $\mathcal{P}$ обладали свойством *наследственности*: вместе с каждым множеством в класс $\mathcal{P}$ входят все его непустые части. Выделяются симплексы, все вершины которых, *кроме одной*, линейно независимы. С помощью *триангуляции* симплициальные комплексы и их гомеоморфные образы представляют, в частности, *полиэдры* в R^n, определяемые как локально конечные семейства выпуклых многогранников. Триангуляцией полиэдра называется его разбиение на замкнутые симплексы, каждые два из которых либо не пересекаются, либо пересекаются по их общей грани. Удачный выбор триангуляции важен при численном интегрировании по многообразиям и при решении дифференциальных уравнений. Примером может служить рассматриваемый в статье [10] новый подход применения метода конечных объемов для задачи Дирихле с использованием триангуляции Делоне и ячеек Вороного в расчетной схеме. Существуют естественные триангуляции для выпуклых многогранников.

Приведем несколько примеров симплициальных комплексов.

Пример 1. Вещественная прямая R может быть представлена комплексом $(K, \mathcal{P})$, где $K = \mathrm{Z}$ и $\mathcal{P} = \{\{n\} : n \in \mathrm{Z}\} \bigcup \{\{n, n+1\} : n \in \mathrm{Z}\}$.

Пример 2. Введем в пространстве R^n покоординатный частичный порядок: неравенство $u \leq v$ для $u = (u_i) \in R^n$, $v = (v_i) \in R^n$ означает, что $u_i \leq v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пространство R^n может быть представлено комплексом $(K, \mathcal{P})$, где $K = \mathrm{Z}^n$ и класс $\mathcal{P}$ состоит из всех *линейно упорядоченных* конечных частей множества Z^n. В класс $\mathcal{P}$ нередко бывает удобно добавить *отрезки* $[u, v] = \{u(1-\lambda) + v\lambda : u \in \mathrm{Z}^n, v \in \mathrm{Z}^n, 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Пример 3. Пара $(X, \mathcal{P}[X])$, где X — произвольное множество точек в R^n, а $\mathcal{P}[X]$ — класс всех непустых конечных частей множества X, является симплициальным комплексом.

2.2. Постановка задачи

Задача аналогична сформулированной в пункте 1.1, и верна аналогия с распределением единицы массы. Рассмотрим: вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, n-мерное евклидово пространство R^n, счетное множество $U \subset R^n$, точку $a \in R^n$, случайный вектор $\xi : \Omega \to U$ с координатами $\xi_i : \Omega \to R$, имеющий среднее значение $E[\xi] = (E[\xi_i]) = (a_i) = a$ и конечный второй момент нормы $E[\|\xi\|^2] = \sum_{i=1}^m E[\xi_i^2] < \infty$. Как и прежде $\mathcal{F}[a]$ и $\mathcal{D}[a]$ обозначают множества всех таких *допустимых* векторов $\xi : \Omega \to U$ и их распределений $x = (x[u]) : \Pr[\xi^{-1}[u]] = x[u], u \in U$. Точка a является *общим средним значением* векторов $\xi : \Omega \to U$ и *общим центром* распределений $x = (x[u])$. Будем для простоты скалярное произведение векторов записывать как обычное $uv = \sum_{i=1}^n u_i v_i$, $uu = u^2 = \|u\|^2$, $u = (u_i) \in R^n$, $v = (v_i) \in R^n$. Равенство случайных векторов, как и равенство случайных величин, понимается как равенство их распределений. По определению

$$E[\xi] = \sum u\, x[u] = a, \quad E[\xi^2] = \sum u^2 x[u].$$

Предположим, что точка a не принадлежит множеству U и является *внутренней* точкой ограниченного сферой $S^n[c, r]$ n-мерного замкнутого шара $B^n[c, r]$, $c \in R^n \backslash U$, $r > 0$. Рассмотрим множество $M = U \bigcap S^n[c, r]$ точек из U на сфере $S^n[c, r]$ и его дополнение $V = U \backslash M$. Предположим, кроме того, что $\|u - c\| \geq r$, $u \in U$: среди внутренних точек замкнутого шара $B^n[c, r]$ с центром c и радиусом r нет точек множества U. Они могут быть только на граничной сфере или вне шара. По определению $\|u - c\| = r$, $u \in M$, и $\|v - c\| > r$, $v \in V$. Будем предполагать также, что существует симплекс с множеством вершин $S \subseteq M$ такой, что на множестве S существует невырожденное распределение $p = (p[s])$ с центром $a : p[s] > 0$, $s \in S$, и $\sum p[s] = 1$, $\sum s\, p[s] = a$. Это эквивалентно тому, что точка a является внутренней точкой симплекса S, вписанного в шар $B^n[c, r]$. Назовем сферу $S^n[c, r]$, симплекс и множество S *центральными.*

Приведем несколько примеров.

Пример 4. Пусть $n = 1$, $R^n = R$, $U = Z$ и $0 < a < 1$. Тогда центральными являются отрезок $S^1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = [0, 1]$ и множество $M = S = \{0, 1\}$. Симплекс с вершинами из S является частью комплекса из примера 1.

Пример 5. Пусть $n = 2$, $U = Z^2 \backslash \{0, 0\}$ (гауссова решетка без точки $\{0, 0\}$) и $a = \{0, 0\}$. Центральными является окружность $S^2[a, 1]$ и множество $M = \{\{-1, 0\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}\}$. Центральными симплексами служат определяемые множествами $S = \{\{-1, 0\}, \{1, 0\}\}$ и $T = \{\{0, -1\}, \{0, 1\}\}$ — горизонтальный и вертикальный отрезки соответственно. Заметим, что диагональные отрезки $C = [\{-1, 0\}, \{1, 0\}]$ и $D = [\{-1, 1\}, 1, 1\}]$ не являются центральными симплексами: внутри ограниченного окружностью $S^2[a, \sqrt{2}]$ замкнутого круга $B^2[a, \sqrt{2}]$ содержатся множества S и T. Все рассматриваемые симплексы являются частью комплекса из примера 2 при $n = 2$.

Пример 6. Пусть $n = 3$, $a = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$, а множество $U = \bigcup_{r \geq 0} (Z^3_+ \bigcap P[k])$ состоит из точки $P[0] = \{0, 0, 0\}$ и следов гауссовой решетки в положительном координатном углу на плоскостях, проходящих через точки $\{k, 0, 0\}, \{0, k, 0\}, \{0, 0, k\}$ при $k \in N$. Центральными являются сфера $S^3[c, r]$ с центром $c = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, радиусом $r = \sqrt{3}/2$ и множество $M = \{\{0, 0, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{1, 1, 1\}\}$. Тетраэдр с множеством вершин $S = \{\{0, 0, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$ и отрезок с концами $T = \{\{0, 0, 0\}, \{1, 1, 1\}\}$ являются центральными симплексами. Заметим, что остальные симплексы с вершинами из M не являются центральными: для них точка a — невнутренняя. Все рассматриваемые симплексы являются частью комплекса из примера 3 при $n = 3$ и $X = U$.

Ставится следующая задача: *найти допустимые случайные векторы, норма которых имеет наименьший второй момент.* Эквивалентная формулировка: *найти допустимые распределения* $x = (x[u])$, *минимизирующие функционал* $f[x] = \sum \|u\|^2 x[u]$.

2.3. Решение задачи

Рассмотрим множества $\mathcal{F}[a]$ и $\mathcal{D}[a]$ всех *допустимых* векторов $\xi : \Omega \to U$ и их распределений $x = (x[u])$. По предположению $E[\xi] = \sum u\, x[u] = a$ и $E[\|\xi\|^2] = \sum \|u\|^2 x[u] < \infty$. Возьмем центральную сферу $S^n[c, r]$, $c \in R^n$, $r > 0$, и множество $M = U \bigcap S^n[c, r]$ точек из U на ней. Назовем *компактными* допустимые векторы $\eta : \Omega \to U$ со сосредоточенными в множестве M распределениями $y = (y[u])$: $y[v] = 0$ для всех точек $v \in V = U \backslash M$. Распределение $y = (y[u])$ не обязательно невырожденное: возможны равенства $y[u] = 0$ для некоторых $u \in M$. Будем для простоты писать $\eta : \Omega \to M$.

Выберем центральный симплекс с множеством вершин $S \subseteq M$ и *невырожденным* распределением $p = (p[s])$, $s \in S$, с центром a, являющимся внутренней точкой симплекса S. По предположению такой симплекс существует. Выделим множества $T = M \backslash S$ не принадлежащих S точек на сфере $S^n[c, r]$ и множество $V = U \backslash M$ точек вне ограниченного ею замкнутого шара $B^n[c, r]$ (не исключая пустые T и V). По определению $T = \{t \in U \backslash S : \|t - c\| = r\}$ и $V = \{v \in U : \|v - c\| > r\}$. Назовем *оптимальным* компактный вектор $\zeta : \Omega \to U$ со сосредоточенным на S *невырожденным* распределением

$p = (p[u])$: $p[s] > 0, s \in S$, и $\sum p[s] = 1$, $p[u] = 0$, $u \in U \backslash S$, $E[\zeta] = \sum s\, p[s] = a$. Будем для простоты писать $\zeta : \Omega \to S$ и $p = (p[s])$, исключая точки $u \in U \backslash S$ и их вероятности $p[u] = 0$. Неравенство $\xi \neq \zeta$ случайных векторов $\xi : \Omega \to U$ и $\zeta : \Omega \to U$ означает неравенство их распределений $x = (x[u])$ и $p = (p[u])$.

Введем обозначения:

$$R[\xi, S] = \sum_{v \in V} (\|v - c\|^2 - r^2) x[v], \qquad \mu_2[S] = r^2 - \|c\|^2 + 2ac.$$

Докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма. *Для всех допустимых векторов $\xi : \Omega \to U$ верно равенство*

$$E[\|\xi - c\|^2] = r^2 + R[\xi, S]. \tag{3}$$

Доказательство. Из определений следует, что

$$E[\|\xi - c\|^2] = \sum_{s \in S} \|s - c\|^2 x[s] + \sum_{t \in T} \|t - c\|^2 x[t] + \sum_{v \in V} \|v - c\|^2 x[v]$$
$$= r^2 x[S] + r^2 x[T] + \sum_{v \in V} \|v - c\|^2 x[v].$$

Так как

$$x[s] + x[T] = \sum_{s \in S} x[s] + \sum_{t \in T} x[t] = 1 - \sum_{v \in V} x[v],$$

то

$$E[\|\xi - c\|^2] = r^2 + \sum_{v \in V} (\|v - c\|^2 - r^2) x[v].$$

Равенство (3) доказано. □

Следствие 1. *Для всех допустимых векторов $\xi : \Omega \to U$ верны соотношения:*

$$E[\|\xi\|^2] = \mu_2[S] + R[\xi, S], \tag{4}$$

$$E[\|\xi\|^2] \geq \mu_2[S]. \tag{5}$$

Для каждого компактного вектора $\eta : \Omega \to U$ верно равенство

$$E[\|\eta\|^2] = \mu_2[S]. \tag{6}$$

Доказательство. Из определений, свойств евклидовой нормы и линейности среднего следует, что $\|\xi - c\|^2 = \|\xi\|^2 + \|c\|^2 - 2\xi c$, $E[\|\xi\|^2] = E[\|\xi - c\|^2] - \|c\|^2 + 2ac$.

Откуда, благодаря равенству (3), вытекает (4). По предположению $u - c \geq r$ для всех точек $u \in U$. Поэтому $R[\xi, S] \geq 0$, и из равенства (4) следует неравенство (5). А так как $R[\eta, S] = 0$ для каждого компактного вектора $\eta : \Omega \to U$, то из равенства (4) следует равенство (6). □

Равенство (6) верно, в частности, для оптимального вектора $\eta = \zeta$.

Предположим, что центральный симплекс S не единственный. Рассмотрим произвольный из оставшихся центральный симплекс $\overline{S}$ с центром $\overline{c} \in R^n$ и радиусом $\overline{r} > 0$, описанную вокруг него сферу $S^n[\overline{c}, \overline{r}]$, множество $\overline{M} = U \bigcap S^n[\overline{c}, \overline{r}]$ точек из U на ней, компактные векторы $\overline{\eta} : \Omega \to U$ со сосредоточенными в множестве $\overline{M}$ распределениями, оптимальный вектор $\overline{\zeta} : \Omega \to \overline{S}$ со средним $E[\overline{\zeta}] = a$ и сосредоточенным на $\overline{S}$ невырожденным распределением $\overline{p} = (\overline{p}[\overline{s}])$. По определению

$$R[\xi, \overline{S}] = \sum_{\overline{v} \in \overline{V}} (\|\overline{v} - \overline{c}\|^2 - \overline{r}^2) x[\overline{v}], \qquad \mu_2[\overline{S}] = \overline{r}^2 - \|\overline{c}\|^2 + 2a\overline{c}.$$

Соотношения (4)–(6) остаются верными, если в них заменить S на $\overline{S}$ и η на $\overline{\eta}$.

Следствие 2. *Для компактных векторов η и $\overline{\eta}$ верны равенства:*

$$E[\|\eta\|^2] = \mu_2[S] = \mu_2[\overline{S}] = E[\|\overline{\eta}\|^2]. \tag{7}$$

Доказательство. Первое и последнее из равенств (7) следуют из равенства (6) и его эквивалента для $\overline{S}$ и $\overline{\eta}$. Вместе с тем из неравенства (5) и его эквивалента для $\overline{S}$ следуют соотношения $\mu_2[\overline{S}] = E[\|\overline{\eta}\|^2] \geq \mu_2[S]$, $\mu_2[S] = E[\|\eta\|^2] \geq \mu_2[\overline{S}]$. Значит, $\mu_2[S] = \mu_2[\overline{S}]$. □

Равенства (7) верны, в частности, для оптимальных векторов $\eta = \zeta$ и $\overline{\eta} = \overline{\zeta}$.

Таким образом, второй момент один и тот же для всех центральных сфер и компактных векторов:

$$E[|\overline{\eta}|^2] = E[\|\eta\|^2] = \mu_2[\overline{S}] = \mu_2[S] = \mu_2.$$

Эти равенства верны, в частности, для всех центральных симплексов и оптимальных векторов.

Теорема 2. *Для всех допустимых векторов $\xi : \Omega \to U$ и компактных векторов $\eta : \Omega \to M$ верны соотношения:*

$$E[\|\xi\|^2] \geq E[\|\eta\|^2] = \mu_2. \tag{8}$$

Для всех некомпактных допустимых векторов ξ верно неравенство

$$E[\|\xi\|^2] > \mu_2. \tag{9}$$

Доказательство. Соотношения (8) следуют из соотношений (5)–(7).

Пусть допустимый вектор $\xi : \Omega \to U$ некомпактен. Тогда для некоторой точки $v_0 \in V = U\backslash M$ верно неравенство $x[v_0] = \Pr[\xi^{-1}[v_0]] > 0$. Следовательно, $(\|v_0 - c\|^2 - r^2)x[v_0] > 0$. Откуда, благодаря (4), следует (9). □

Равенства (8) верны, в частности, для всех оптимальных векторов. Из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть S — единственный центральный симплекс. Тогда оптимальный вектор $\zeta : \Omega \to S$ есть единственный допустимый вектор с наименьшим вторым моментом.*

Доказательство. Возьмем произвольный допустимый вектор $\xi : \Omega \to U$. Пусть $\xi \neq \zeta$: векторы ξ и ζ имеют разные распределения $x = (x[u])$ и $p = (p[u])$, $p[u] = 0$, $u \in U\backslash S$. Из соотношений (8) и (9) следует, что $E[\|\xi\|^2] > \mu_2 = E[\|\zeta\|^2]$. □

Так как $E[\|\xi - a\|^2] = E[\|\xi\|^2] - \|a\|^2$, то при данном $E[\xi] = a$ вместо минимума $E[\|\xi - a\|^2]$ можно искать минимум $E[\|\xi\|^2]$ и наоборот. Естественно, что в общем многомерном случае минимизирующее распределение, как правило, не единственное.

2.4. Независимые координаты

Рассмотрим решетку $U = \prod_{i=1}^n U_i \subset R^n$, равную декартову произведению счетных множеств $U_i \subset R$, $1 \leq i \leq n$, и класс распределений $x = (x[u])$, $x[u] = \prod_{i=1}^n x_i[u_i]$, $u = (u_i) \in U$, $u_i \in U_i$, с общим центром $a = (a_i) \in R^n$. Допустимый случайный вектор $\xi : \Omega \to U$ с таким распределением имеет *независимые* координаты $\xi_i : \Omega \to U_i$ и его распределение равно произведению их распределений $\Pr[\xi^{-1}[u]] = x[u] = \prod_{i=1}^n x_i[u_i] = \prod_{i=1}^n \Pr[\xi_i^{-1}[u_i]]$. Будем предполагать, что существуют точки $s = (s_i) \in U$ и $t = (t_i) \in U$

такие, что $s_i < a_i < t_i$, $1 \le i \le n$, и общий центр рассматриваемых распределений $x = (x[u])$ находится внутри n-мерного прямоугольника $[s,t] = \prod_{i=1}^n [s_i, t_i]$. По доказанному в пункте 1.2 оптимальным для множества $U_i \subset R$ является распределение $p_i = x_i[s_i] = (t_i - a_i)/(t_i - s_i)$, $q_i = x_i[t_i] = (a_i - s_i)/(t_i - s_i)$, сосредоточенное в точках s_i, t_i и имеющее центр a_i. Обозначим через $\zeta_i : \Omega \to U_i$ случайную величину с таким распределением, а $\zeta = (\zeta_i) : \Omega \to U$ — вектор с независимыми координатами ζ_i, имеющими распределения $\{p_i, q_i\}$. Следовательно,

$$E[\|\zeta - a\|^2] = \sum_{i=1}^n E[(\zeta_i - a_i)^2] = \sum_{i=1}^n (a_i - s_i)(t_i - a_i),$$

$$E[\|\zeta\|^2] = \|a\|^2 + \sum_{i=1}^n (a_i - s_i)(t_i - a_i).$$

Для координат ζ_i, $1 \le i \le n$, с одинаковыми распределениями верно равенство $E[\|\zeta - a\|^2] = n(a_1 - s_1)(t_1 - a_1)$.

Подчеркнем, что в этом пункте вычисляются минимальные моменты для выбранного специального класса распределений, а не для всех допустимых.

Литература

1. **Михайлов Г.А., Медведев И.Н.** Улучшение весового статистического моделирования на основе перехода к процессу Гальтона–Ватсона // Докл. РАН. — 2009. — Т. 424, № 3. — С. 1–4.
2. **Михайлов Г.А., Медведев И.Н.** Использование сопряженных уравнений в методе Монте-Карло. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2009.
3. **Войтишек А.В., Рогазинский С.В.** Минимальная дисперсия целочисленной случайной величины // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 3. — С. 269–272.
4. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование, методы Монте-Карло. — М.: Академия, 2006.
5. **Савельев Л.Я.** Элементарная теория вероятностей. Ч. 1–2. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005.
6. **Савельев Л.Я.** Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1969.
7. **Розенфельд Б.А., Яглом И.М.** Многомерные пространства. Энциклопедия элементарной математики. Книга 5. Геометрия. — М.: Наука, 1966. — С. 349–392.
8. **Болтянский В.Г., Яглом И.М.** Выпуклые фигуры и тела. Энциклопедия элементарной математики. Книга 5. Геометрия. — М.: Наука, 1966. — С. 182–269.
9. **Спеньер Э.** Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
10. **Пацюк В.И., Рыбакова Г.А., Берзан В.П.** Метод конечных объемов для решения трехмерной задачи электростатики // Проблемы региональной энергетики. — Кишинев: Изд-во Института энергетики АНМ, 2011. — Т. 15, № 1. — С. 31–41.

Поступила в редакцию 1 февраля 2012 г.,
в окончательном варианте 20 февраля 2012 г.