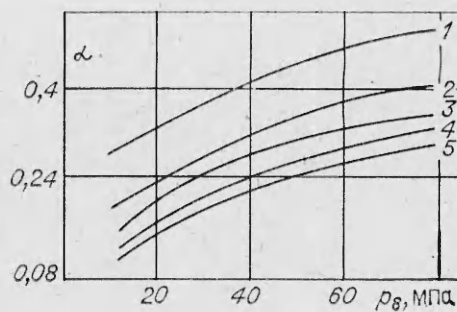




Ф и г. 5



Ф и г. 6

0,049 МПа. Параметры плазмы за отраженной ударной волной представлены следующим образом: фиг. 3 — давление p_2 ; фиг. 4 — концентрация электронов n_e ; фиг. 5 — параметр неидеальности Γ ; фиг. 6 — степень ионизации плазмы. Диапазон параметров плазмы: $T = (1,3 - 2,5) \cdot 10^4$ К; $p_2 = 6,86 - 53,9$ МПа; $n_e = (0,55 - 6,5) \cdot 10^{25}$ м $^{-3}$; $\Gamma = 0,58 - 1$; $\alpha = 0,09 - 0,5$ — степень ионизации. Число Маха ударной волны $M_2 = 6 - 13$. Отмечается монотонный рост всех величин (кроме параметра неидеальности) во всем диапазоне увеличения интенсивности ударной волны. Параметр неидеальности увеличивается при изменении давления толкающего газа до $p_8 \leq 39,2$ МПа, а при больших давлениях практически остается постоянным. На установке были проведены исследования термодинамических и оптических свойств плотной ксеноновой плазмы до концентрации электронов $n_e \approx 4 \cdot 10^{25}$ м $^{-3}$ [5]. Результаты настоящего расчета близко совпали с экспериментальными результатами, что свидетельствует о возможности прогнозирования на основе расчетов параметров плазмы других химических элементов. Подогреваемая трехкамерная пневматическая ударная труба является удобным инструментом для исследования плотной плазмы различных химических элементов в широком диапазоне параметров, в том числе щелочных металлов и их смесей с инертными газами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хэнпел Б. Использование многодиафрагменной схемы в ударной трубе. — В кн.: Ударные трубы. М.: ИЛ, 1962.
2. Коныков А. А., Разин А. П., Соколов А. И. Двухдиафрагменная ударная труба для получения плотной термической плазмы. — ТВТ, 1974, т. 12, № 4.
3. Рейдон А., Герл И. Ударная труба в химической физике высоких температур. М.: Мир, 1966.
4. Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1964.
5. Сеченов В. А. Исследование оптических свойств плотной ксеноновой плазмы. — Физика плазмы, 1981, т. 7, № 5.

Поступила 29/II 1984 г.

УДК 539.4

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ РОСТА УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН ПРИ НЕОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В. В. БОЛОТИН

(Москва)

Развивается энергетический подход к описанию процесса роста усталостных трещин, основанный на следующем постулате [1]: растущая трещина циклической усталости хотя бы раз в течение цикла нагружения становится неравновесной по Гриффитсу при условии, что сопротивление росту трещины вычислено с учетом повреждений, накопленных за предысторию нагружения. Подход распространяется на случай неоднородного напряженного состояния с включением явлений остановок, скачкообразного подрастания, поворота и ветвлений трещин. Обсуждается общая структура уравнений для осредненной скорости роста трещины в условиях неоднородного напряженного состояния.

1. Рост усталостных трещин происходит в условиях их взаимодействия с процессом накопления рассеянных повреждений в материале. Более того, имеются основания предполагать, что накопление повреждений на фронте трещин является основным механизмом, определяющим скорость роста усталостных трещин. Эта идея в более или

менее явной форме высказывалась неоднократно (см., например, обзорные статьи в [2]). Однако конкретные математические модели, основанные на этой идее, были разработаны лишь применительно к малоцикловой усталости — явлению, в описании которого естественным образом входит дополнительный масштаб длины (размер пластической зоны). Обзор и критическое обсуждение этих моделей можно найти в [3]. Были также предложены модели роста усталостных трещин, учитывающие накопление дислокаций у фронта трещины [4]. Обычно для описания роста усталостных трещин используют полуэмпирические уравнения [5]. В данной работе развивается модель многоцикловой усталости, предложенная в [1] и основанная на концепциях механики сплошной среды. В модели использовано существенное обобщение энергетического подхода к механике разрушения.

Назовем состояние тела с трещинами субравновесным и неравновесным по Гриффитсу, если соответственно выполнены условия $\delta I = 0$, $\delta I < 0$ и $\delta I > 0$. Здесь δI — взятая с обратным знаком вариация по Гриффитсу от полной энергии системы тело — нагрузка [1]. Если совокупность трещин задана с точностью до m обобщенных координат $l_1, \dots, l_m$ (например, характерных размеров трещин), то выражение для δI возьмем в виде

$$(1.1) \quad \delta I = \sum_{j=1}^m (G_j - \Gamma_j) \delta l_j.$$

Здесь G_j — обобщенные силы, продвигающие трещины (аналоги высвобождаемой энергии Ирвина); Γ_j — обобщенные силы сопротивления (аналоги критических значений высвобождаемой энергии).

Рассмотрим процесс циклического нагружения тела, заданный вектором $s(t)$. Вектор обобщенных координат $l_1, \dots, l_m$ обозначим $l(t)$, вектор повреждений, накопленных на фронтах трещин, обозначим $\psi(t)$. Для неповрежденного материала $\psi = 0$. Сформулируем постулат о росте усталостных трещин следующим образом: трещина получает в течение цикла приращение по одной из обобщенных координат, если хотя бы раз в течение цикла она становится неравновесной по этой обобщенной координате при условии, что соответствующая обобщенная сила сопротивления вычислена с учетом повреждений, накопленных за предысторию нагружения.

Для аналитической формулировки постулата рассмотрим функционалы от значений процессов $l(t)$, $s(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$, соответствующем n -му циклу:

$$(1.2) \quad H_j(n) = \sup_{t_{n-1} \leq t \leq t_n} \{G_j[l(t), s(t), \psi(t)] - \Gamma_j[l(t), s(t), \psi(t)]\} \quad (j = 1, \dots, m).$$

При $H_j(n) < 0$ обобщенная координата l_j не растет, а на остановившемся фронте трещины идет накопление повреждений. Если $H_j(n) > 0$, то это означает, что в течение n -го цикла трещина хотя бы раз становится неравновесной и, следовательно, неустойчивой. Новый размер $l_j(t_n)$ найдем из условия баланса энергии

$$(1.3) \quad \int_{l_j(t_{n-1})}^{l_j(t_n)} G_j[\lambda, s(t_j^*), \varphi(\lambda, t_j^*)] d\lambda = \int_{l_j(t_{n-1})}^{l_j(t_n)} \Gamma_j[\lambda, s(t_j^*), \varphi(\lambda, t_j^*)] d\lambda,$$

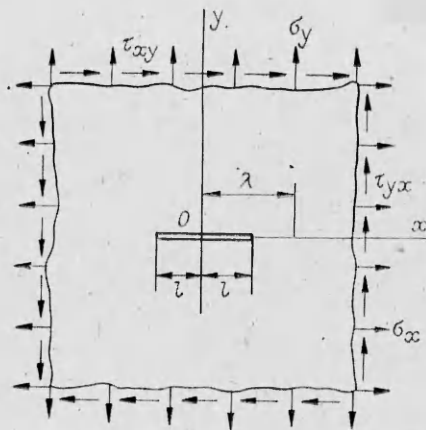
где $\varphi(\lambda, t)$ — вектор-функция повреждений на продолжении фронта подрастающей трещины; t_j^* — момент времени, соответствующий достижению супремума в правой части формулы (1.2). На фронтах трещин $\lambda = l(t)$.

Соотношение (1.3) применимо, если в течение цикла происходит подрастание по одной из обобщенных координат. В случае, когда рост идет по нескольким координатам, достаточно потребовать, чтобы динамические процессы затухали на промежутках между смежными моментами времени t_j^* и t_n^* . Если вновь найденные значения отвечают устойчивой системе трещин, лежащих в пределах тела, то возможен дальнейший рост. Для исследования необходимо рассмотреть знаки функционалов $H_j(n+1)$, составить уравнения типа (1.3) и т. д.

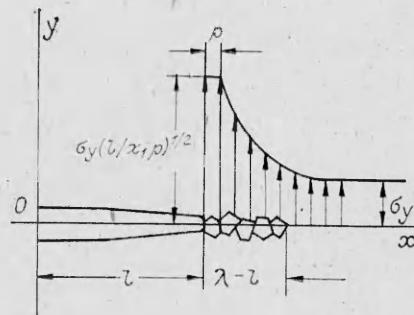
Типичная картина роста усталостной трещины состоит в следующем. После скачкообразного подрастания трещины до размера $l_j(t_n)$ она становится субравновесной из-за выхода ее фронта на участок с относительно малым повреждением. Таким образом, $H_j(n+1) < 0$. Необходимо определенное число циклов, прежде чем условие субравновесности будет нарушено. Далее идет скачкообразное подрастание и т. д. Таким образом, приходим к естественному объяснению борозд на поверхности усталостного разрушения.

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо взять уравнения накопления повреждений на продолжении трещин. Составим конечно-разностное функциональное уравнение относительно вектор-функции $\varphi(\lambda, t)$:

$$(1.4) \quad \varphi(\lambda, t_n) - \varphi(\lambda, t_{n-1}) = \int_{t=t_{n-1}}^{t=t_n} \Phi\{\lambda, l(t), s(t), \varphi(\lambda, t)\} dt.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Здесь $\Phi\{\cdot\}$ — некоторый заданный функционал от истории нагружения и накопления повреждений на отрезке n -го цикла. При описании многоциклового усталости число циклов n обычно трактуют как непрерывный аргумент. Если параметры нагружения медленно меняются при переходе от одного цикла к другому, то вектор-функцию $s(t)$ можно заменить на непрерывную вектор-функцию $s(n)$, компоненты которой включают экстремальные значения параметров нагружения, а если нужно, то и частоту циклов. При этом $l(n)$ и $\psi(n)$ — тоже медленно меняющиеся функции n . Применяя к (1.3) теорему о среднем, приходим к системе уравнений

$$(1.5) \quad G_j[l(n), s(n), \psi(n)] = \Gamma_j[l(n), s(n), \psi(n)] \quad (j = 1, \dots, m).$$

Это значит, что медленно растущие усталостные трещины практически не отличаются от равновесных по Гриффитсу с учетом повреждений, накопленных на их фронтах [1]. В (1.5)

$$(1.6) \quad \psi(n) \equiv \varphi[l(n), n],$$

а для вектор-функции $\varphi(\lambda, n)$ вместо (1.4) имеем уравнение

$$(1.7) \quad \partial \varphi(\lambda, n) / \partial n = \Phi[\lambda, l(n), s(n), \varphi(\lambda, n)].$$

При существенных изменениях процесса нагружения, например при скачкообразном возрастании уровня нагрузки или изменении типа номинального напряженного состояния, необходимо вернуться к более общим уравнениям (1.3), (1.4).

2. Рассмотрим усталостную трещину в неограниченном теле в условиях плоского деформированного состояния с номинальными напряжениями σ_x , σ_y и τ_{xy} (фиг. 1). Длину трещины обозначим $2l$. Примем, что трещина распространяется без ветвления и поворотов, т. е. ее продолжение лежит на оси Ox . В силу симметрии будем трактовать трещину как однопараметрическую, заданную с точностью до размера l , при этом считая, что во всем, кроме накопления рассеянных повреждений, материал обладает свойствами, которыми наделена среда линейной механики разрушения. Обобщенную силу найдем по формуле Ирвина [2]

$$(2.1) \quad G = (1 - \nu^2) (K_1^2 + K_2^2) / E, \quad K_1 = \sigma_y (\pi l)^{1/2}, \quad K_2 = \tau_{xy} (\pi l)^{1/2},$$

пренебрегая вкладом регулярных составляющих поля напряжений в высвобождающуюся энергию. Кроме того, не учитываем влияние накопленных повреждений, так что $G = G(l, \sigma_x, \tau_{xy})$.

Будем различать две меры повреждений, образующих вектор-функцию $\varphi(\lambda, t)$. Мера φ_1 учитывает микротрещины нормального отрыва, ориентированные вдоль оси Ox . Эти трещины образуются в основном из-за циклического изменения напряжений σ_y . Мера φ_2 учитывает микротрещины сдвига, ориентированные в том же направлении. Накопление этих трещин в основном определяется величиной касательных напряжений τ_{xy} . Запишем уравнения накопления повреждений (1.4) в виде, согласованном с полумпирическими уравнениями, которые применяют для описания усталостных повреждений [6]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varphi_1(\lambda, t_n) - \varphi_1(\lambda, t_{n-1}) &= (\Delta \sigma - \Delta \sigma_{th})^{m_1} / \sigma_f^{m_1}, \\ \varphi_2(\lambda, t_n) - \varphi_2(\lambda, t_{n-1}) &= (\Delta \tau - \Delta \tau_{th})^{m_2} / \tau_f^{m_2}. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta \sigma(\lambda, n)$ и $\Delta \tau(\lambda, n)$ — размахи напряжений отрыва и напряжений сдвига в течение n -го цикла в точке, лежащей на продолжении трещины; σ_f , τ_f — характери-

ки материала, описывающие его сопротивление накоплению повреждений; $\Delta\sigma_{th} \geq 0$, $\Delta\tau_{th} \geq 0$ — пороговые значения, начиная с которых происходит накопление повреждений; m_1 , m_2 — постоянные показатели. Уравнения (2.2) выполняются при $\Delta\sigma > \Delta\sigma_{th}$, $\Delta\tau > \Delta\tau_{th}$. Если какое-либо из этих неравенств не выполнено, то правую часть в соответствующем уравнении (2.2) надо положить равной нулю.

Зависимость напряжений σ и τ от расстояния $\lambda - l$ от фронта трещины должна давать конечные значения коэффициентов концентрации на фронте и описывать асимптотическое приближение к номинальным напряжениям при $\lambda \gg l$. При этом, естественно, должен появиться некоторый новый масштаб длины $\rho \ll l$, что является существенным элементом развиваемой теории. Параметр ρ может принимать значения из широкого интервала, начиная от характерной толщины межзеренной границы до характерного размера зерна. Выберем его так, чтобы типичные коэффициенты концентрации напряжений на границах имели порядок $(l/\rho)^{1/2}$. Этому условию удовлетворяют выражения

$$(2.3) \quad \sigma = K_1[\pi h_1(\lambda)]^{-1/2}, \quad \tau = K_2[\pi h_2(\lambda)]^{-1/2},$$

где функции $h_{1,2}(\lambda)$ имеют вид

$$(2.4) \quad h_{1,2}(\lambda) = \begin{cases} \chi_{1,2}\rho, & l \leq \lambda \leq l + \rho, \\ \chi_{1,2}\rho + (\lambda - l - \rho)(l/\lambda), & \lambda > l + \rho. \end{cases}$$

Форм-факторы $\chi_{1,2}$ зависят от конфигурации фронта трещины.

В случае многоциклового усталости трещина движется весьма медленно, что позволяет перейти от уравнений (2.2) к непрерывной аппроксимации. При этом для повреждений в ближайшем к фронту элементе структуры (фиг. 2) получаем уравнение

$$(2.5) \quad d\psi_1/dn = (\Delta K_1 - \Delta K_{th,1})^{m_1}/K_{f1}^{m_1}, \quad d\psi_2/dn = (\Delta K_2 - \Delta K_{th,2})^{m_2}/K_{f2}^{m_2},$$

где использованы обозначения для размахов коэффициентов интенсивности напряжений $\Delta K_1 = \Delta\sigma_y(\pi l)^{1/2}$ и $\Delta K_2 = \Delta\tau_{xy}(\pi l)^{1/2}$, а также для характеристики сопротивления материала накоплению повреждений, выраженные в терминах коэффициентов интенсивности напряжений:

$$(2.6) \quad K_{f1} = \sigma_f(\pi\chi_1\rho)^{1/2}, \quad K_{f2} = \tau_f(\pi\chi_2\rho)^{1/2}, \\ \Delta K_{th,1} = \Delta\sigma_{th}(\pi\chi_1\rho)^{1/2}, \quad \Delta K_{th,2} = \Delta\tau_{th}(\pi\chi_2\rho)^{1/2}.$$

Для обобщенной силы Γ имеем зависимость

$$(2.7) \quad \Gamma = \Gamma_0 g(\psi_1, \psi_2),$$

где Γ_0 — сила сопротивления продвижению трещины в неповрежденном материале, $\Gamma_0 = 2\gamma_0$ (γ_0 — удельная работа разрушения). Функция $g(\psi_1, \psi_2)$ должна удовлетворять условиям $g(0, 0) = 1$, $g(1, 0) = g(0, 1) = 0$. Это означает, что, когда хотя бы одна из мер повреждений достигает предельного значения, равного единице, сопротивление продвижению трещины обращается в нуль. В дальнейшем рассмотрим функцию

$$(2.8) \quad g(\psi_1, \psi_2) = [1 - (\psi_1 + \psi_2)^\alpha]^\beta,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

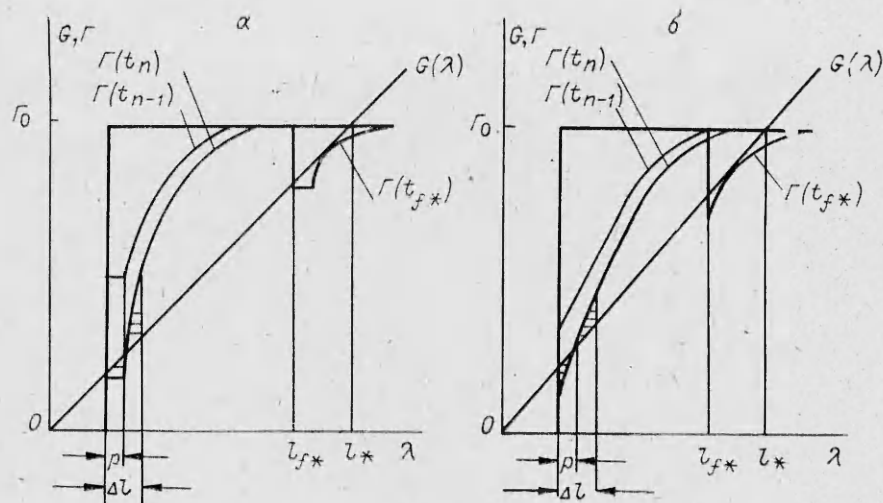
Качественная картина роста трещины показана на фиг. 3, а, где зависимость $G(\lambda)$ взята в соответствии с формулой (2.1) при максимальных значениях номинальных напряжений, не зависящих от n . Критический (по Гриффитсу) размер трещины l_* удовлетворяет условию $G(\lambda) = \Gamma_0$. Пусть в начале n -го цикла $G < \Gamma$. Накопление повреждений на отрезке длиной $l(t_{n-1}) \leq \lambda \leq l(t_{n-1}) + \rho$ происходит до момента времени t_n , когда на фронте достигается равенство $G = \Gamma$. Новый размер $l(t_n)$ найдем из условия (1.3). Ему соответствует равенство площадей заштрихованных треугольников на фиг. 3. Приращение длины трещины $\Delta l = l(t_n) - l(t_{n-1}) > \rho$. Далее процесс повторяется снова. Усталостная трещина станет неустойчивой в целом при достижении размера $l_{f*} < l_*$, поскольку при всех $\lambda > l_{f*}$ имеет место неравенство $G > \Gamma$.

Предположение о том, что в пределах элемента размером ρ напряжения и повреждения должны быть одинаковы, не является обязательным. Это проиллюстрировано на фиг. 3, б. Подрастание трещины происходит в момент достижения равенства $G(\lambda + \rho) = \Gamma$.

Чтобы аналитически описать этот вариант, достаточно в (1.2) заменить $l(t_{n-1})$ на $l(t_{n-1}) + \rho$. Уравнения (1.5) для квазиравновесного подрастания усталостных трещин, очевидно, остаются без изменения.

3. Выведем приближенные дифференциальные уравнения, описывающие медленный рост трещины. Продолжительность пересечения фронтом трещины отрезка длиной ρ оценим по формуле $\Delta n \approx \rho(dl/dn)^{-1}$. Пренебрегая повреждениями, накопленными до попадания элемента структуры на фронт, получим

$$(3.1) \quad \psi_{1,2}(n) = \rho(dl/dn)^{-1}\Phi_{1,2}(n).$$



Ф и г. 3

При этом функции $\Phi_{1,2}(n)$ совпадают с правыми частями уравнений (2.5). Условие квазиравновесности с учетом (2.4), (2.7), (2.8) и (3.1) приводит к уравнению

$$(3.2) \quad \frac{dl}{dn} = \rho \frac{(\Delta K_1 - \Delta K_{th,1})^{m_1}/K_{I1}^{m_1} + (\Delta K_2 - \Delta K_{th,2})^{m_2}/K_{I2}^{m_2}}{[1 - (K_1^2 + K_2^2)^{1/\beta}/K_{Ic}^{2/\beta}]^{1/\alpha}}.$$

Здесь $K_{Ic}^2 = E\Gamma_0(1 - \nu^2)^{-1}$, т. е. K_{Ic} — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений для неповрежденного материала. Применительно к классической трещине Гриффитса уравнение типа (3.2) получено на основе энергетического подхода в [1].

Вид правой части в (3.2) существенно зависит от частных предположений о структуре правых частей в уравнениях (2.2) и (2.5), а также от вида функции $g(\psi_1, \psi_2)$ в формуле (2.7). Однако структура уравнения (3.2) остается общей при весьма широком классе предположений. Числитель в правой части определяется скоростью накопления усталостных микрповреждений на фронте трещины, в то время как знаменатель содержит отношение максимального значения высвобождаемой энергии к ее критическому значению для неповрежденного материала. Максимум высвобождаемой энергии соответствует условию супремума в (1.2).

4. Повороты и ветвления усталостных трещин относятся к числу наиболее трудных и малоисследованных аспектов механики разрушения. Экспериментальные данные о направлении роста усталостных трещин при сложном напряженном состоянии не вполне ясны и зачастую противоречивы [7]. Усталостные трещины обнаруживают тенденцию к ветвлению и зигзагообразному развитию даже при одноосном растяжении. Обсуждение проблемы можно найти в [8–11]. Применение аналитических методов к проблеме распространения трещин затруднено из-за недостатка сведений о распределении напряжений в окрестности трещин сложной конфигурации. Одно из немногих исключений — зигзагообразные трещины. Коэффициенты интенсивности вблизи малых ответвлений, т. е. при $\lambda - l \ll l$, вычислялись в [8, 9]. Наиболее достоверные данные получены в [10] с использованием довольно громоздкого аналитического и вычислительного аппарата. Используем эти данные для анализа проблемы поворотов и ветвления первоначально плоской трещины (фиг. 4).

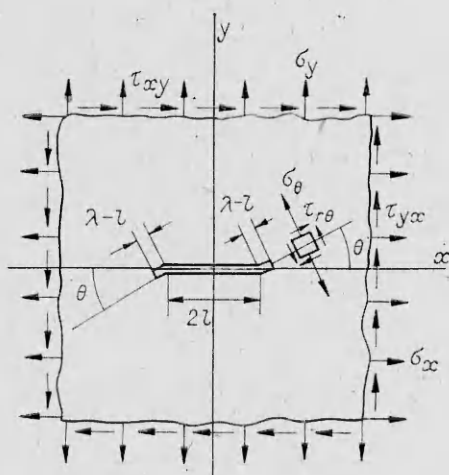
Для трещины, фронт которой может повернуть на угол θ , где $-\pi \leq \theta \leq \pi$, уравнение (1.5) принимает вид

$$(4.1) \quad G[I(n), s(n), \theta] = \Gamma[I(n), \psi(n, \theta)].$$

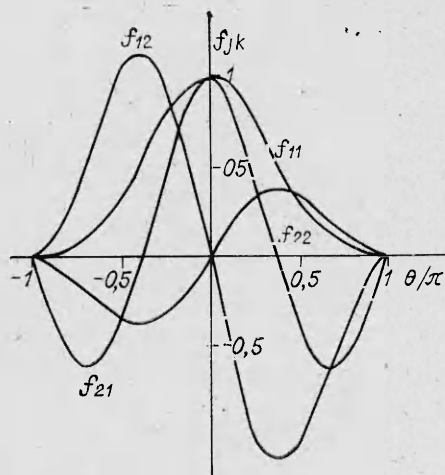
Здесь применительно к рассмотренной выше модели левая часть принята не зависящей от $\psi(n)$, правая — не зависящей от $s(n)$. Обобщенная сила G зависит от θ явно, а обобщенная сила Γ — через меру повреждений $\psi(n, \theta)$. Левую часть в (4.1) вычислим по формуле Ирвина (2.1) с учетом зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от угла θ :

$$(4.2) \quad G = [(1 - \nu^2)/E] \{ [K_1 f_{11}(\theta) + K_2 f_{12}(\theta)]^2 + [K_1 f_{21}(\theta) + K_2 f_{22}(\theta)]^2 \}.$$

Здесь K_1 и K_2 — коэффициенты интенсивности при $\theta = 0$, т. е. определяемые согласно (2.1). Графики для функций $f_{ij}(\theta)$, построенные с использованием данных из [10], приведены на фиг. 5. Номинальные напряжения σ_∞ , а также регулярные составляющие поля напряжений в формулу (4.2) не входят, что эквивалентно некоторому дополни-



Ф и г. 4



Ф и г. 5

тельному допущению, отвечающему идеям линейной механики разрушения. Если величина $K_1 f_{11}(\theta) + K_2 f_{12}(\theta)$ окажется отрицательной, то ее следует положить равной нулю.

Для описания повреждений на фронте трещины обобщим уравнения (2.2). Будем учитывать зависимость мер повреждений φ_1 и φ_2 от угла θ . При этом примем, что приращение меры φ_1 зависит от размаха $\Delta\sigma_\theta$ напряжения отрыва на площадке, наклоненной под углом θ . Для приращения меры φ_2 постулируем аналогичные зависимости от размаха $\Delta\tau_{r\theta}$ касательного напряжения на этой площадке (см. фиг. 4). Отсюда

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \varphi_1(\lambda, \theta, t_n) - \varphi_1(\lambda, \theta, t_{n-1}) &= (\Delta\sigma_\theta - \Delta\sigma_{th})^{m_1} / \sigma_f^{m_1}, \\ \varphi_2(\lambda, \theta, t_n) - \varphi_2(\lambda, \theta, t_{n-1}) &= (\Delta\tau_{r\theta} - \Delta\tau_{th})^{m_2} / \tau_f^{m_2}. \end{aligned}$$

Характеристики материала сохраняют прежний смысл. Для напряжений в окрестности фронта трещины возьмем выражения, согласованные с формулами (2.3) и (2.4):

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \sigma_\theta &= [K_1 g_{11}(\theta) + K_2 g_{12}(\theta)] [\pi h_1(\lambda)]^{-1/2}, \\ \tau_{r\theta} &= [K_1 g_{21}(\theta) + K_2 g_{22}(\theta)] [\pi h_2(\lambda)]^{-1/2}. \end{aligned}$$

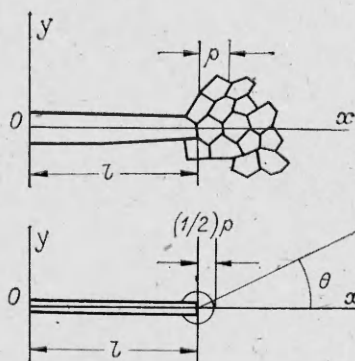
Угловые функции $g_{jk}(\theta)$ возьмем в виде

$$(4.5) \quad \begin{aligned} g_{11} &= \cos^3(\theta/2), \quad g_{12} = (3/2) \cos(\theta/2) \sin \theta, \\ g_{21} &= (1/2) \cos(\theta/2) \sin \theta, \quad g_{22} = (1/2)(3 \cos \theta - 1) \cos(\theta/2). \end{aligned}$$

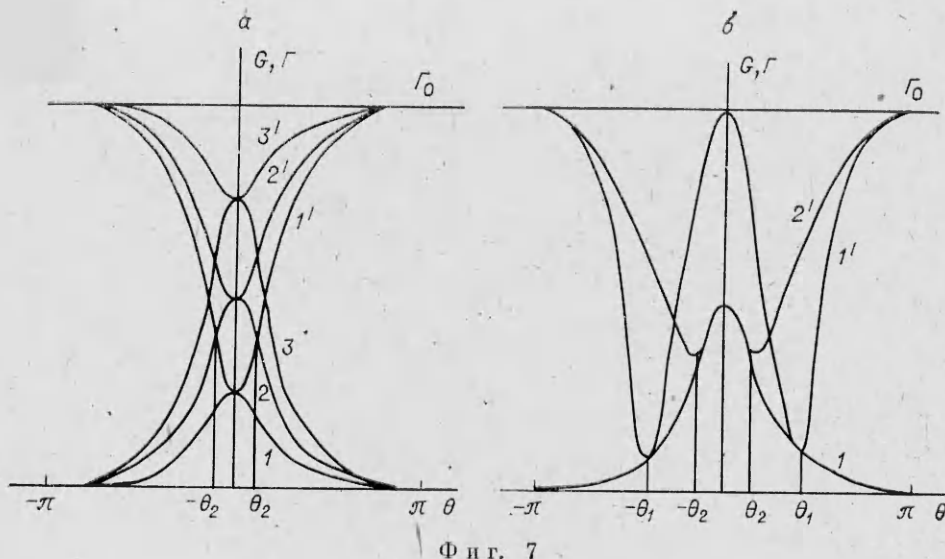
Графики функций (4.5) аналогичны приведенным на фиг. 5 графикам функций $f_{jk}(\theta)$. Более того, с относительно большой точностью (наибольшая погрешность на отрезке $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ не превышает 10%) можно положить $f_{jk}(\theta) \approx g_{jk}(\theta)$. Угловые функции (4.5) взяты из формул Вильямса о распределении напряжений в окрестности плоского математического разреза [2, 5]. Напряжения (4.4) при $l \leq \lambda \leq l + \rho$ совпадают с напряжениями, вычисляемыми по формулам Вильямса, если в последних принять полярный радиус $r = \rho/2$ (фиг. 6). Таким образом, представление о конечности напряжений на фронте растущей трещины согласовано с привычными представлениями линейной механики разрушения.

Для медленно растущих трещин с учетом формул (4.4) и обозначений (2.6) уравнения (4.3) принимают вид

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \partial\varphi_1/\partial n &= [\Delta K_1 g_{11}(\theta) + \Delta K_2 g_{12}(\theta) - \Delta K_{th,1}]^{m_1} / K_{f1}^{m_1}, \\ \partial\varphi_2/\partial n &= [|\Delta K_1 g_{21}(\theta) + \Delta K_2 g_{22}(\theta)| - \Delta K_{th,2}]^{m_2} / K_{f2}^{m_2}. \end{aligned}$$



Ф и г. 6



Ф и г. 7

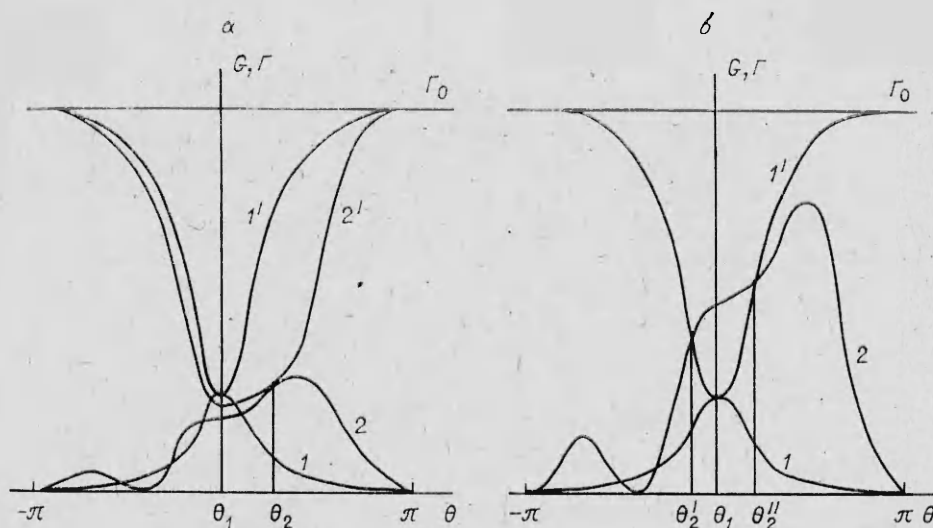
Общее представление (2.7) для обобщенной силы сопротивления Γ и его частный случай (2.8) оставляем неизменными, причем зависимость от θ входит неявно через решение уравнений (4.6).

5. Обсудим некоторые качественные выводы из предложенной теории. Вначале рассмотрим трещину нормального отрыва (фиг. 7). Пусть материал таков, что продвижению усталостной трещины способствуют лишь микротрещины нормального отрыва. Тогда в (4.6) надо положить $\bar{K}_{f2} \rightarrow \infty$, а вместо (2.8) взять $\Gamma = \Gamma_0 (1 - \psi_1^2)^{\bar{p}}$. Медленный квазиравновесный рост такой трещины схематически описан на фиг. 7, а. Кривая 1 соответствует функции $G(\theta, n)$, вычисляемой по формуле (4.2), кривая 1' — функции $\Gamma(\theta, n)$. Растущая трещина мало отличается от равновесной по Гриффитсу. При увеличении ее размера угловая зависимость обобщенной силы $G(\theta, n)$ описывается кривыми 2, 3, а обобщенной силы $\Gamma(\theta, n)$ — кривыми 2', 3'. Направление роста трещины остается неизменным, т. е. отвечает углу $\theta_1 = 0$.

Картина существенно изменяется, если продвижение усталостной трещины происходит из-за накопления микротрещин сдвига (фиг. 7, б). Для обобщенной силы $G(\theta, n)$ по-прежнему имеем кривую 1, в то время как для обобщенной силы $\Gamma(\theta, n)$ — кривую 1'. Условие равновесия по Гриффитсу достигается при $\theta = \pm\theta_1$. Это означает, что трещина имеет тенденцию к ветвлению по этим углам, а также к зигзагообразному подрастанию под указанными углами. Впрочем, предлагаемая теория не учитывает изменение полей напряжений повреждений из-за вторичного поворота или ветвления трещины. В общем случае повреждения на фронте трещины складываются из микротрещин нормального отрыва и микротрещин сдвига, а угловая зависимость функции $\Gamma(\theta, n)$ имеет вид 2' на фиг. 7, б. На отрезке $[-\theta_2, \theta_2]$ условия близки к равновесным. Это означает, что все направления из этого отрезка примерно равновероятны. Таким образом, элемент непредсказуемости при ветвлении трещины в значительной степени объясняется взаимодействием механизмов накопления повреждений. В этой ситуации математическое ожидание угла распространения $\langle\theta\rangle = 0$.

Случай сложного напряженного состояния проиллюстрирован на фиг. 8. Пусть вначале трещина развивается по типу нормального отрыва. Этому соответствуют кривые 1 и 1'. Начиная с некоторого цикла характер напряженного состояния изменяется: например, циклическое растяжение сменяется циклическим сдвигом. Угловая зависимость обобщенной силы $G(\theta, n)$ показана кривой 2 на фиг. 8, а. Пусть новый режим нагружения таков, что вначале трещина остается субравновесной. Это продолжается до тех пор, пока на фронте не будут накоплены дополнительные повреждения, так что угловая зависимость $\Gamma(\theta, n)$ примет вид, показанный кривой 2'. Трещина начинает расти под углом θ_2 (в этом примере $\tau_{xy} < 0$).

На фиг. 8, б показана ситуация, когда после смены напряженного состояния трещина становится неравновесной, т. е. появляется отрезок (θ_2', θ_2'') , на котором $H(\theta, n) = G(\theta, n) - \Gamma(\theta, n) > 0$. При этом трещина подрастает резким скачком и даже может скачкообразно ветвиться. Соответствующие углы распределены случайно на отрезке (θ_2', θ_2'') . По-видимому, основной величиной, которая характеризует вероятностное распределение углов, является разность обобщенных сил $H(\theta, n)$. Естественно высказать предположение, что плотность вероятности $f(\theta)$ имеет вид $f(\theta) = \text{const} \{1 - \exp[-\beta H(\theta)]\}$, где β — некоторая положительная постоянная. Наиболее вероятно направление, при котором функция $H(\theta, n)$ достигает максимума. Аналогичные результаты получим и в том случае, когда уровень напряжений меняется



Ф и г. 8

скачкообразно без изменения типа напряженного состояния. Например, если при нормальном отрыве номинальные напряжения увеличиваются так, что на фиг. 7, а график 1 обобщенной силы $G(\theta, n)$ сменяется графиком 2, то углы ветвления трещины будут распределены на отрезке $(-\theta_2, \theta_2)$, для которого $H(\theta, n) > 0$. Наиболее вероятному направлению распространения трещины соответствует угол $\langle \theta \rangle = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4.
2. Fracture. An advanced treatise, vol. 2. Mathematical fundamentals/Ed. H. Liebowitz.— N. Y.— L.: Acad. Press, 1968. Рус. пер. Разрушение/Под ред. Г. Лбовица. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975.
3. Proctor M. W., Duggan T. V. A simple generalized model for fatigue crack propagation.— In: Fracture mechanics in engineering application/Ed. G. C. Sih, S. R. Valuri. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1979.
4. Yokobori T., Konosu S., Yokobori A. T., Jr. Micro and macro fracture mechanics approach to brittle fracture and fatigue crack growth.— In: Advances in research on the strength and fracture of materials/Ed. D. W. R. Taplin. N. Y.; Oxford a. o.: Pergamon Press, 1978, vol. 1. Рус. пер. Екобори Т., Коносу С., Екобори А. Микро- и макроподходы в механике разрушения к описанию хрупкого разрушения и усталостного роста трещин.— В кн.: Механика разрушения. Разрушение конструкций/Под ред. Д. Тэплина. М.: Мир, 1980.
5. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Киев: Наук. думка, 1977.
6. Болотин В. В. Распределение времен до разрушения при случайных нагрузках.— ПМТФ, 1980, № 5.
7. Smith E. W., Pascoe K. J. The behaviour of fatigue cracks subject to applied biaxial stress: a review of experimental evidence.— Fatigue Engng Mater. and Struct., 1983, vol. 6, N 2.
8. Kitagawa H., Yuuki R. Analysis of branched cracks under biaxial stresses.— In: Fracture, 1977, ICF 4/Ed. D. M. R. Taplin. Waterloo: University of Waterloo Press, 1977, vol. 3.
9. Cotterell B., Rice J. R. Slightly curved or kinked cracks.— Intern. J. Fracture, 1980, vol. 16, N 2.
10. Wu C. H. Maximum-energy-release-rate criterion applied to a tension — compression specimen with crack.— J. Elasticity, 1978, vol. 8, N 3.
11. A modified strain-energy density criterion applied to crack propagation: Discussion/Sih G. C., Gdoutos E. E., Theocaris P. S., Andrianopoulos N. P.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1982, vol. 49, p. 678.

—Поступила 15/II 1984 г.