УДК 538.37+517.97

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГОФРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ЖЕСТКОСТЕЙ

А. Г. Колпаков

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
630108 Новосибирск, Россия
E-mail: algk@ngs.ru

Определены наибольшие (наименьшие) эффективные жесткости, которые может приобрести гофрированная пластина при изменении формы гофра.

Ключевые слова: гофрированные пластины, эффективные жесткости, задача проектирования.

DOI: 10.15372/PMTF20170314

Введение. Задача вычисления эффективных жесткостей гофрированных пластин исследовалась во многих работах (см. [1–9]). Наибольшее число задач решено для тонкостенных пластин.

Задачей, обратной задаче расчета эффективных жесткостей, является проектирование формы и топологии [10]. При наличии формул для расчета эффективных жесткостей можно использовать хорошо разработанные методы теории оптимального управления [11–13]. В данной работе определяются максимальные (минимальные) значения эффективных жесткостей для гофрированной пластины симметричной формы и определяется соответствующая форма гофра.

1. Постановка задачи. Для расчета эффективных характеристик пластины, ячейка периодичности которой представляет собой тонкостенную конструкцию, можно применять методы теории оболочек [14]. В данной работе для расчета эффективных жесткостей используются формулы, полученные в [2]. Результаты расчетов по этим формулам хорошо согласуются как с результатами расчетов по другим формулам, проведенных с использованием методов теории оболочек (см. [8]), так и с результатами численных расчетов, выполненных с использованием теории осреднения [9]. Кроме того, формулы в [2] являются наиболее простыми среди известных формул для расчета эффективных жесткостей.

На рис. 1 приведена схема гофрированной пластины. Период гофра равен $2c$, длина гофра на периоде равна $2L$ ($L \geqslant c$). Верхняя и нижняя полуволны гофра, так же как в [2], полагаются симметричными относительно срединной поверхности $z = 0$. Согласно [2] эффективные жесткости данной пластины на растяжение-сдвиг $\bar{A}_{ij}$ и на изгиб-кручение $\bar{D}_{ij}$ вычисляются по формулам

$$\bar{A}_{11} = \frac{1}{I_1/A_{11} + I_2/D_{11}}, \qquad \bar{A}_{12} = \frac{A_{12}}{A_{11}}\,\bar{A}_{11},$$
$$\bar{A}_{22} = \frac{\bar{A}_{12}A_{12}}{A_{11}} + \frac{L}{c}\,\frac{A_{11}A_{12} - A_{12}^2}{A_{11}}, \qquad \bar{A}_{66} = \frac{c}{L}\,A_{66}; \tag{1}$$

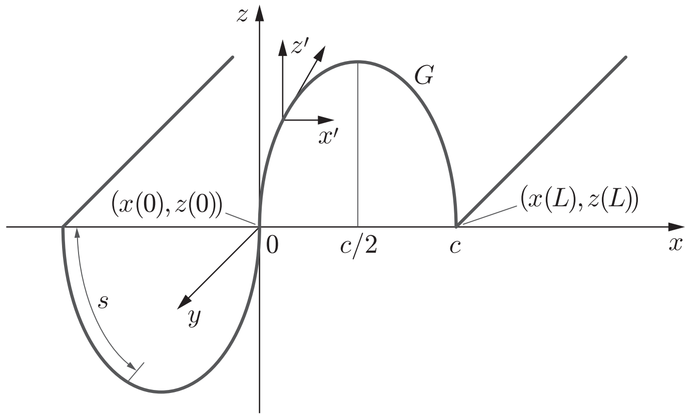

Рис. 1. Схема гофрированной пластины

$$\bar{D}_{11} = \frac{c}{L}\,D_{11}, \quad \bar{D}_{12} = \frac{D_{12}}{D_{11}}\,\bar{D}_{11}, \quad \bar{D}_{22} = I_2A_{22} + I_1D_{22}, \quad \bar{D}_{66} = \frac{c}{L}\,D_{66}, \tag{2}$$

где A_{ij}, D_{ij} — жесткости на растяжение-сдвиг и изгиб-кручение плоской пластины, из которой изготовлена гофрированная пластина,

$$I_1 = \frac{1}{2c}\int\limits_0^{2L} x'^2(s)\,ds, \qquad I_2 = \frac{1}{2c}\int\limits_0^{2L} z^2(s)\,ds, \tag{3}$$

s — длина дуги вдоль волны гофра $G = \{x(s), z(s)\colon s \in [0, 2L]\}$ (см. рис. 1); $(\,\cdot\,)' = d\,(\,\cdot\,)/ds$. В силу симметрии пластины несимметричные эффективные жесткости равны нулю.

Задача формулируется следующим образом: какие максимальные (минимальные) значения эффективных жесткостей может приобрести гофрированная пластина за счет изменения формы волны гофра?

Сначала рассмотрим задачу при условии $L/c = \text{const}$. Решение задачи сводится к решению задачи о возможных значениях функционалов I_1, I_2.

В [2] рассмотрены гофры, нижняя и верхняя волны которых одинаковы (см. рис. 1). Рассмотрим гофры, у которых обе части волны представительного гофра G (см. рис. 1) симметричны относительно оси $x = c/2$, в силу чего $z(t) = z(c - t)$. Для таких гофров (будем называть их полностью симметричными) можно рассматривать только одну полуволну на интервале $[0, c/2]$, имеющую длину $L/2$. При этом функционалы (3) принимают вид

$$I_1 = \frac{2}{c}\int\limits_0^{L/2} x'^2(s)\,ds, \qquad I_2 = \frac{2}{c}\int\limits_0^{L/2} z^2(s)\,ds. \tag{4}$$

Введем управляющую переменную $u(s) = z'(s)$. Из выражения $z(t) = z(c - t)$ следует, что $u(t) = -u(c - t)$. Выполним замену переменных $t = 2s/L$. При значении s, изменяющемся в интервале от 0 до $L/2$, переменная t меняется в интервале от 0 до 1. При использовании переменной $t = s/L$ связь $u(s) = z'(s)$ принимает вид

$$z'(s) = Lu(t)/2, \tag{5}$$

а функционалы (4) — вид

$$I_1 = \frac{L}{c}\int\limits_0^{1} x'^2(t)\,dt, \qquad I_2 = \frac{L^3}{2c}\int\limits_0^{1} z^2(t)\,dt. \tag{6}$$

Функции $x(s)$ и $z(s)$ удовлетворяют условиям

$$x(L) - x(0) = c; \tag{7}$$

$$x'^2(s) + z'^2(s) = 1. \tag{8}$$

Из (7), (8) следует

$$\int\limits_0^{L/2} \sqrt{1 - u^2(s)}\, ds = \frac{c}{2}.$$

При использовании переменной $t = 2s/L$ это равенство принимает вид

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1 - u^2(t)}\, dt = \frac{1}{L}. \tag{9}$$

В силу (8) имеет место неравенство

$$|u(t)| \leqslant 1. \tag{10}$$

Положим $c = 1$, что не ограничивает общности задачи. При $c = 1$ в силу (8) функционал I_1 в (6) можно представить в виде

$$I_1 = L\Big(1 - \int\limits_0^1 u^2(t)\, dt\Big). \tag{11}$$

Если длина волны гофра L фиксирована, то от формы гофра непосредственно зависят только жесткости $\bar{A}_{11}$ и $\bar{D}_{22}$. Остальные жесткости в (1), (2) выражаются через c, L или $\bar{A}_{11}$, $\bar{D}_{22}$.

Если гофрированная пластина изготовлена из ортотропной пластины, то $A_{11} = A_{11}$, $D_{11} = D_{22}$ и имеет место равенство $I_1/A_{11} + I_2/D_{11} = (I_2 A_{11} + I_1 D_{11})/(A_{11} D_{11})$. С учетом этого получаем универсальное соотношение для $\bar{A}_{11}$ и $\bar{D}_{22}$

$$\bar{A}_{11} \bar{D}_{22} = A_{11} D_{11}, \tag{12}$$

справедливое независимо от локальных геометрических и материальных характеристик гофра.

С учетом (11) имеем

$$\bar{D}_{22} = I_2 A_{11} + I_1 D_{11} = (i_2 A_{11} L^2/2 - D_{11} i_1)L + D_{11} L, \tag{13}$$

где

$$i_1(u) = \int\limits_0^1 u^2(t)\, dt = 1 - \frac{I_1}{L}, \qquad i_2(z) = \int\limits_0^1 z^2(t)\, dt = \frac{2I_2}{L^3}. \tag{14}$$

Рассмотрим задачу о максимуме эффективной жесткости $\bar{D}_{22}$, с учетом (13), (14) сводящуюся к задаче о максимуме функционала

$$J = -D_{11} i_1 + i_2 A_{11} L^2/2 \tag{15}$$

при выполнении ограничений (9), (10) и соотношения (5). Для того чтобы получить решение этой задачи, рассмотрим сначала функционал $i_1(u)$, затем — функционал $i_2(z)$.

2. Возможные значения функционала $i_1(u)$. Для определения возможных значений $i_1(u)$ при ограничениях (9) рассмотрим функцию $U = \{u(t) \in L_\infty(0, L)\colon |u(t)| \leqslant 1\}$ и кривую, описываемую уравнением

$$\Gamma = \{(x, y)\colon \quad x = \sqrt{1 - v^2}, \quad y = v^2, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

Согласно [12] множество значений пары функционалов $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - u^2(t)}\, dt$, $\displaystyle\int_0^1 u^2(t)\, dt$ для функций $u(t) \in U$ представляет собой выпуклую оболочку $\operatorname{conv}\Gamma$ кривой Γ. В переменных x, y уравнение кривой (16) записывается в виде $\Gamma = \{(x, y)\colon y = 1 - x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Верхней и нижней границами выпуклой оболочки $\operatorname{conv}\Gamma$ являются линии $y = 1 - x^2$ и $y = 1 - x$.

При выполнении (9), (10) число α может являться значением функционала $i_1(u)$ тогда и только тогда, когда точка $(1/L, \alpha) \in \operatorname{conv}\Gamma$, т. е. $m \leqslant \alpha \leqslant M$ (m, M — точки пересечения верхней и нижней границ области $\operatorname{conv}\Gamma$ с прямой $x = 1/L$). Следовательно, при ограничениях (9), (10) функционал $i_1(u)$ может принимать любые значения в интервале $[1 - 1/L, 1 - 1/L^2]$, а функционал I_1 — любые значения в интервале $[1/L, 1]$.

3. Задача о максимуме функционала $i_2(z)$. Рассмотрим задачу

$$i_2(z) = \int_0^1 z^2(t)\, dt \to \max \tag{17}$$

при ограничениях (9), (10) и ограничении $i_1(u) = \alpha$, которое в силу (5) имеет вид

$$\int_0^1 u^2(t)\, dt = \alpha. \tag{18}$$

При этом $1 - 1/L \leqslant \alpha \leqslant 1 - 1/L^2$.

Используем принцип максимума Понтрягина [15]. Для задачи (17), (18), (9), (5) лагранжиан записывается в виде $l(t, z, z', u) = \lambda_0 z^2 + \lambda_1 u^2 + \lambda_2 \sqrt{1 - u^2} + p(t)(z' - Lu/2)$, а функция Понтрягина — в виде $H(t, z, u, p) = Lpu/2 - \lambda_0 z^2 - \lambda_1 u^2 - \lambda_2 \sqrt{1 - u^2}$.

В данном случае принцип максимума Понтрягина принимает следующий вид [15]: если $\bar z(t)$, $\bar u(t)$ — решение задачи (17), (18), (9), то найдутся множители Лагранжа $\lambda_0 \geqslant 0$, λ_1, λ_2, $p(t)$, не все одновременно равные нулю и такие, что выполнены условие стационарности $-p(t)' + 2\lambda_0 \bar z = 0$ и принцип максимума

$$Lp\bar u/2 - \lambda_0 \bar z^2 - \lambda_1 \bar u^2 - \lambda_2 \sqrt{1 - \bar u^2} = \max_{u \in U} (Lpu/2 - \lambda_0 \bar z^2 - \lambda_1 u^2 - \lambda_2 \sqrt{1 - u^2}\,). \tag{19}$$

Если $\lambda_1 \neq 0$ или $\lambda_2 \neq 0$, то выполняется условие (18) или (9) соответственно.

Исключая слагаемое $\lambda_0 \bar z^2$ из левой и правой частей (19), получаем

$$Lp\bar u/2 - \lambda_1 \bar u^2 - \lambda_2 \sqrt{1 - \bar u^2} = \max_{u \in U} (Lpu/2 - \lambda_1 u^2 - \lambda_2 \sqrt{1 - u^2}\,) = F^*(Lp/2), \tag{20}$$

где $F(u) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 \sqrt{1 - u^2}$; $F^*(p) = \max\limits_{u \in U} (Lpu/2 - \lambda_1 u^2 - \lambda_2 \sqrt{1 - u^2}\,)$ — функция, сопряженная с функцией $F(u)$ [15]. В результате имеем задачу

$$-p(t)' + 2\lambda_0 \bar z = 0; \tag{21}$$

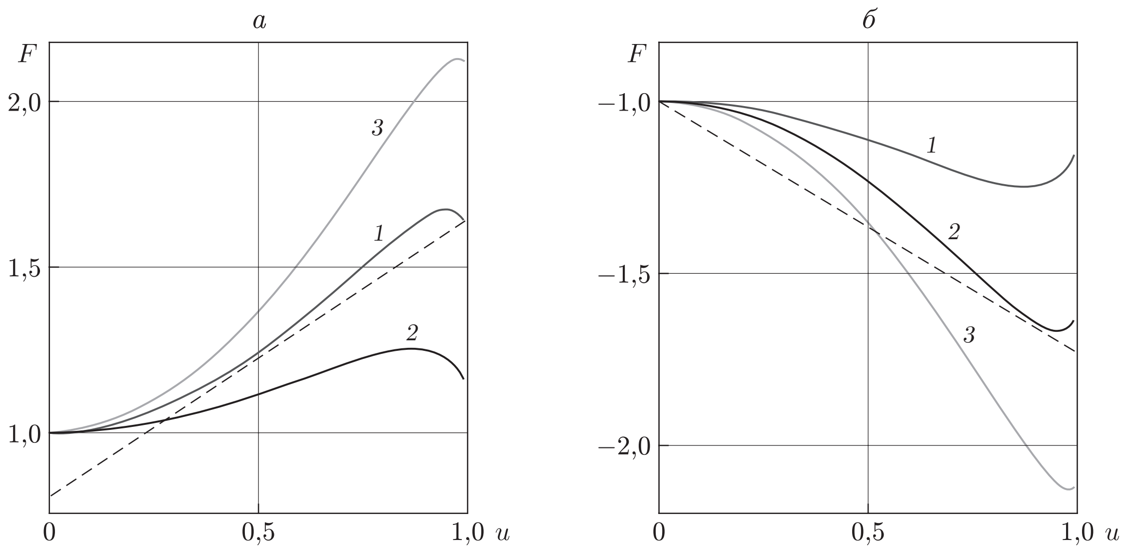

Рис. 2. Графики функции $F(u)$ при различных значениях λ_1, λ_3:
а — $\lambda_3 = 1$ (*1* — $\lambda_1 = 1$, *2* — $\lambda_1 = 1{,}5$, *3* — $\lambda_1 = 2$), *б* — $\lambda_3 = -1$ (*1* — $\lambda_1 = -1$, *2* — $\lambda_1 = -1{,}5$, *3* — $\lambda_1 = -2$); штриховые линии — опорные функции

$$Lp\bar{u}/2 - \lambda_1\bar{u}^2 - \lambda_2\sqrt{1-\bar{u}^2} = F^*(Lp/2); \tag{22}$$

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{Lu(t)}{2} \tag{23}$$

с условиями (9), (10), (18).

Примем $\lambda_0 = 0$. Тогда в силу (21) $p = \mathrm{const}$. Равенство (22) при $p = \mathrm{const}$ означает, что функция $Lpu/2 + F^*(Lp/2)$ является опорной для функции $F(u) = \lambda_1 u^2 + \lambda_3\sqrt{1-u^2}$. График опорной функции может касаться графиков функции $F(u)$ в одной или в двух точках (рис. 2). Координата u точки касания $(u, F(u))$ графика опорной функции и графика функции $F(u)$ является корнем уравнения (22). Значит, уравнение (22) имеет один или два корня.

При наличии двух корней возможны два случая (см. рис. 2). В первом случае (см. рис. 2,*а*) больший корень $\bar{u}_2 = 1$, а меньший корень $\bar{u}_1$ может принимать любое значение в интервале $(0, 1)$. Во втором случае (см. рис. 2,*б*) меньший корень $\bar{u}_1 = 0$, а больший корень $\bar{u}_2$ может принимать любое значение в интервале $(0, 1)$. Двух корней указанного типа достаточно, чтобы выполнялись условия (9), (18), но одного корня (22) недостаточно, чтобы выполнялись условия (9), (18).

Таким образом, решение $\bar{u}(t)$ задачи (22), (23) с условиями (9), (10), (18) является одной из двух функций: либо $u_a(t)$, принимающей значения 1 и $\bar{u}_2$, либо $u_b(t)$, принимающей значения 0 и $\bar{u}_2$. Поэтому можно решать задачу (21)–(23), не используя методы оптимального управления [15]. Достаточно построить функции $z_a(t)$ и $z_b(t)$, соответствующие $u_a(t)$ и $u_b(t)$, и определить максимум функционала $i_2(z)$ для $z_a(t)$ и $z_b(t)$. Поскольку функции $u_a(t)$ и $u_b(t)$ являются кусочно-постоянными, функции $z_a(t)$ и $z_b(t)$ являются кусочно-линейными. Следовательно, можно показать, что максимум функционала в (17) реализуется на одной из функций $u_a(t)$ и $u_b(t)$, приведенных на рис. 3. Функции $u_a(t)$ и $u_b(t)$ сначала определяются на интервале $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$ для полуволны гофра. Профили гофра $z_a(t)$ и $z_b(t)$, соответствующие функциям $u_a(t)$ и $u_b(t)$, показанным на рис. 3, приведены на рис. 4. При $0{,}5 < t \leqslant 1{,}0$ функции $u_a(t)$ и $u_b(t)$ определяются равенством $u(t) = -u(1-t)$, что позволяет построить верхние $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ волны гофра. Нижние

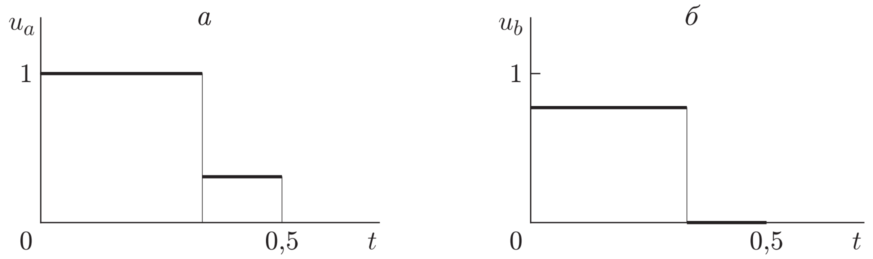

Рис. 3. Функции $u_a(t)$ (*а*) и $u_b(t)$ (*б*), на которых реализуется максимум функционала (17)

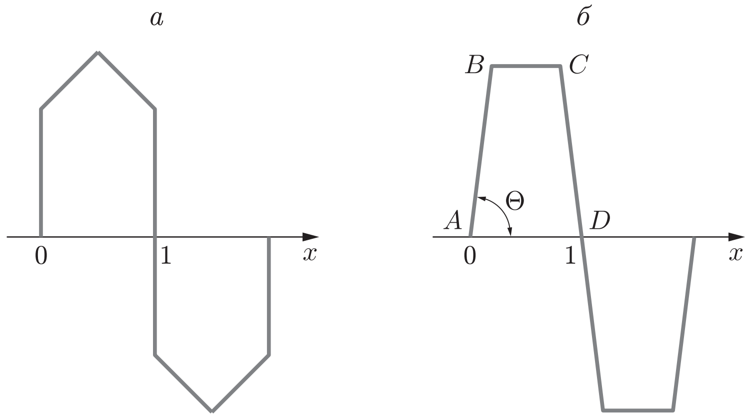

Рис. 4. Профили гофра, соответствующие решениям, приведенным на рис. 3,*а* (*а*) и рис. 3,*б* (*б*)

($1 \leqslant t \leqslant 2$) волны гофра строятся путем отражения верхних волн гофра относительно оси $z = 0$.

Уравнения (9), (18) для функций вида $u_a(t)$ и $u_b(t)$ принимают вид

$$\begin{gathered}\lambda_1\sqrt{1-u_1^2}+\lambda_2\sqrt{1-u_2^2}=1/L,\\ \lambda_1u_1^2+\lambda_2u_2^2=\alpha,\quad \lambda_1+\lambda_2=1,\quad \lambda_1\geqslant 0,\quad \lambda_2\geqslant 0\end{gathered}\tag{24}$$

($u_1 = 1$, $u_2 = x \in [0, 1]$ для $u_a(t)$ и $u_1 = 0$, $u_2 = x \in [0, 1]$ для $u_b(t)$).

Решение (24) зависит от параметра $\alpha \in [1-1/L, 1-1/L^2]$, поэтому и форма профилей гофра зависит от α: $z_a(t) = z_a(t, \alpha)$, $z_b(t) = z_b(t, \alpha)$. Максимум функционала $i_2(z)$ равен максимуму функции $F(\alpha) = \max\,(i_2(z_a(t, \alpha)), i_2(z_b(t, \alpha)))$. Этот максимум достигается при некотором значении α_0 на функции $z_a(t)$ или $z_b(t)$ (или на обеих функциях).

Параметр α меняется в интервале от $1 - 1/L$ до $1 - 1/L^2$. Введем параметр $\alpha^* = (\alpha - (1 - 1/L))/(1/L - 1/L^2)$, меняющийся в интервале от 0 до 1.

Проведенные расчеты показывают, что при $L \leqslant 1{,}02$ ($c = 1$) график функции $z_b(t)$ лежит ниже графика функции $z_a(t)$ и максимум достигается для обеих функций при $\alpha^* = 1$. При этом гофр имеет П-образный профиль. При длине гофра $L \geqslant 1{,}02$ абсолютный максимум функции $F(\alpha)$ достигается на функции $z_b(t)$ при $\alpha^* = 1 - \delta$. (Величина δ показана на рис. 5 для кривой *2*.)

В общем случае $\delta = 1 - \alpha_0$, где α_0 определяется из решения задачи

$$F(\alpha^*) \to \max, \qquad \alpha \in [0, 1]. \tag{25}$$

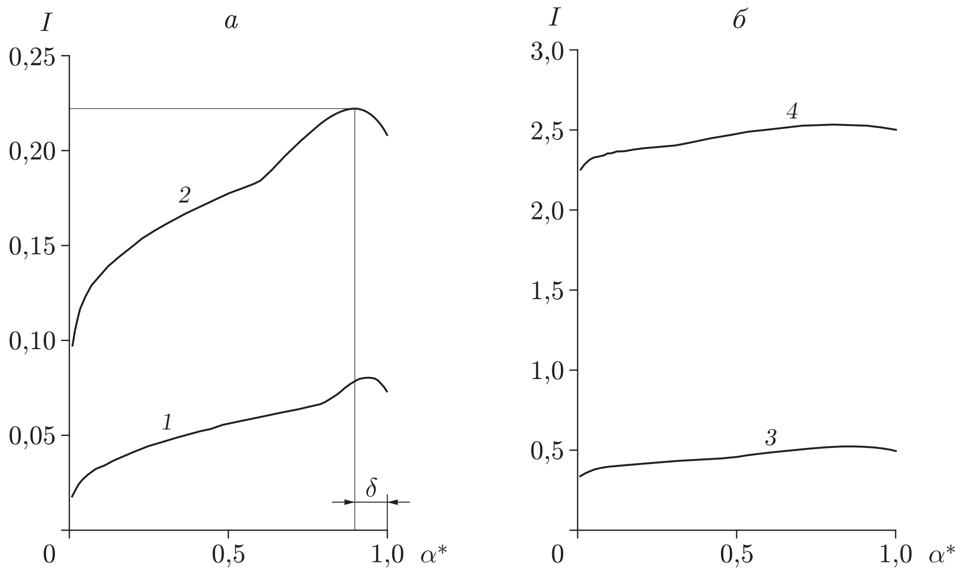

Рис. 5. Графики функции $I(\alpha^*)$ при различных значениях L: *а* — *1* — $L = 1{,}2$, *2* — $L = 1{,}5$; *б* — *3* — $L = 2$, *4* — $L = 4$

4. Гофрированные пластины, полученные из однородной пластины постоянной толщины. Проведем расчеты для пластины, полученной путем гофрирования пластины постоянной толщины h из однородного изотропного материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν. В этом случае $A_{ii} = Eh/(1-\nu^2)$, $D_{ii} = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ и функционал (15) принимает вид

$$J = \frac{Eh}{1-\nu^2}\Big(-\frac{1}{12}\,h^2 i_1 + i_2\,\frac{L^2}{2}\Big).$$

Введем следующие обозначения:

$$i(\alpha) = i_2(\alpha)\,\frac{L^2}{2} - \frac{1}{12}\,h^2\alpha, \qquad I(\alpha^*) = i(m + \alpha^*|Mm|). \tag{26}$$

На рис. 5 приведены графики функции $I(\alpha^*)$ при $h = 0{,}05$ и различных значениях L.

Функция $I(\alpha^*)$ (26) зависит от h. Расчеты показали, что при изменении толщины h в интервале от 0,050 до 0,005 эта зависимость является очень слабой.

Вариация

$$V = \frac{\max I(\alpha^*) - \min I(\alpha^*)}{\max I(\alpha^*)}$$

функции $I(\alpha^*)$ на отрезке $[0,1]$ характеризует возможные изменения изгибной жесткости $\bar{D}_{22} = (i + D_{11})L/c$ вследствие изменения формы гофра. Напомним, что формула (13) записана для $c = 1$. На рис. 5 видно, что чем меньше длина волны гофра L, тем больше значение V (при $L = 1{,}2$ $V = 0{,}78$, при $L = 4$ $V = 0{,}11$). Этот вывод справедлив при $L > 1{,}02$ (заметим, что гофры с $L < 1{,}02$ практически не используются).

5. Алгоритм определения формы гофра с экстремальной жесткостью. Сначала следует определить величину δ, решив задачу (25). Для нахождения решения, при котором достигается максимум функции $I(\alpha^*)$, нужно решить задачи о представлении точки $D = (1/L, 1-1/L^2-\delta|I|)$ в виде выпуклой комбинации точек $B = (1,0)$ и $X = (x, 1-x^2)$ (точка X неизвестна, точки B и D известны). В результате получаем систему трех уравнений относительно трех неизвестных x, λ_1, λ_2

$$\lambda_1 x + \lambda_2 = \frac{1}{L}, \quad \lambda_1(1-x^2) = 1 - \frac{1}{L^2} - \delta\Big(\frac{1}{L} - \frac{1}{L^2}\Big), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \tag{27}$$

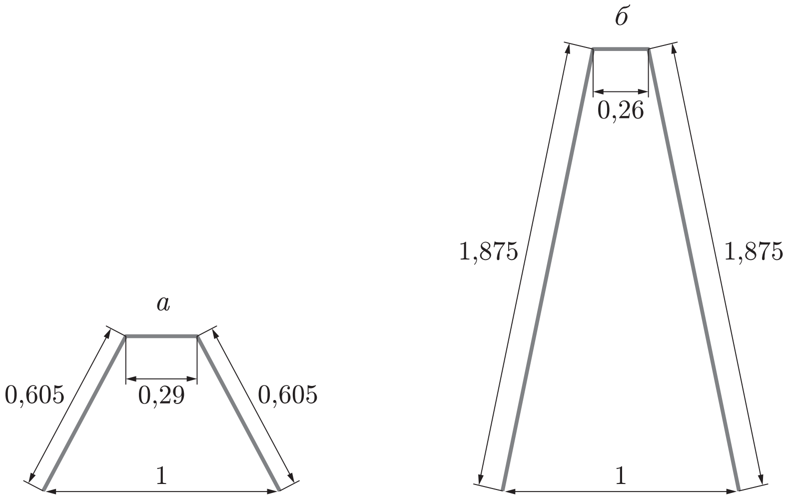

Рис. 6. Трапециевидные формы гофров:
а — $L = 1{,}5$, *б* — $L = 4$

решение которой записывается в виде

$$x = \frac{1-\delta}{L}, \quad \lambda_1 = \frac{L-1}{L-1+\delta}, \quad \lambda_2 = \frac{\delta}{L-1+\delta}. \tag{28}$$

Вектор $(\sqrt{1-u^2}, u)$ — единичный вектор касательной к кривой G (см. рис. 1). Тогда для участка AB гофра на рис. 4,*б* $\cos\Theta = \sqrt{1-u^2}$. Согласно (16) $x = \sqrt{1-u^2}$, следовательно, $\cos\Theta = x$. С учетом (28) получаем

$$\Theta = \arccos\frac{1-\delta}{L}. \tag{29}$$

Относительные длины наклонного AB и горизонтального BC участков гофра равны λ_2 и λ_1 соответственно, абсолютные значения их длин $\lambda_2 L$ и $\lambda_1 L$ равны

$$|AB| = \frac{(L-1)L}{L-1+\delta}, \qquad |BC| = \frac{\delta L}{L-1+\delta}. \tag{30}$$

Определим геометрические характеристики гофров с наибольшей жесткостью $\bar{D}_{22}$. Рассмотрим случай, когда общая длина гофра равна $L = 1{,}5$ при длине периода $c = 1$. Решением задачи (25) при $L = 1{,}5$ (для нахождения δ можно использовать кривую *2* ($L = 1{,}5$) на рис. 5) является значение $\delta = 0{,}12$. Определив δ, из (29), (30) получаем $\Theta = 54°$, $AB = 0{,}605$, $BC = 0{,}290$. Верхняя волна гофра при указанных значениях Θ, AB, BC показана на рис. 6,*а*. При общей длине гофра $L = 4$ и $c = 1$ получаем $\delta = 0{,}2$. Из (29), (30) находим $\Theta = 78°$, $AB = 1{,}875$, $BC = 0{,}250$. Верхняя волна гофра при указанных значениях Θ, AB, BC показана на рис. 6,*б*.

В силу (12) спроектированные пластины обладают наименьшей жесткостью $\bar{A}_{11}$.

Заключение. На практике наибольший интерес представляют эффективные жесткости гофрированных пластин $\bar{A}_{11}$ и $\bar{D}_{22}$, зависимость которых от характеристик гофра является достаточно сложной. Остальные эффективные жесткости либо выражаются явно через величины $\bar{A}_{11}$ и $\bar{D}_{22}$ (жесткости $\bar{A}_{12}$, $\bar{A}_{22}$, $\bar{D}_{12}$), либо через величины L и c (жесткости $\bar{A}_{66}$, $\bar{D}_{11}$, $\bar{D}_{66}$). Поэтому задача об экстремальных значениях всех эффективных жесткостей гофрированной пластины сводится к исследованию зависимостей жесткостей $\bar{A}_{11}$ и $\bar{D}_{22}$ от характеристик гофра. В силу соотношения (12) достаточно исследовать зависимость от характеристик гофра только жесткости $\bar{A}_{11}$ или жесткости $\bar{D}_{22}$. В работе приведен алгоритм определения геометрических характеристик гофрированных пластин, имеющих экстремальные значения эффективных жесткостей.

В большинстве случаев решение задачи об экстремальных значениях эффективных жесткостей гофрированной пластины сводится к определению параметров трапециевидного гофра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Huber M. T.** Die theorie des kreuzweise bewehrten eisenbetonplatten // Bauingenieur. 1923. Bd 4. S. 354–360.
2. **Xia Y., Friswell M. I., Saavedra Flores E. I.** Equivalent models of corrugated panels // Intern. J. Solids Structures. 2012. V. 49, N 14. P. 1453–1462.
3. **Andrianov I. V., Diskovsky A. A., Kholod E. G.** Homogenization method in the theory of corrugated plates // Tech. Mech. 1998. Bd 18. S. 123–133.
4. **Buannic N., Cartraud P., Quesnel T.** Homogenization of corrugated core sandwich panels // Composite Structures. 2003. V. 59. P. 299–312.
5. **Архангельский А. Ф., Горбачев В. И.** Эффективные характеристики гофрированных пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 3. С. 137–155.
6. **Talbi N., Batti A., Ayad R., Guo Y. Q.** An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard // Composite Structures. 2009. V. 88. P. 280–289.
7. **Bartolozzi G., Pierini M., Orrenius U., Baldanzini N.** An equivalent material formulation for sinusoidal corrugated cores of structural sandwich panels // Composite Structures. 2013. V. 100. P. 173–185.
8. **Ye Z., Berdichevsky V. L., Yu W.** An equivalent classical plate model of corrugated structures // Intern. J. Solids Structures. 2014. V. 51, N 11/12. P. 2073–2083.
9. **Колпаков А. Г., Ракин С. И.** Расчет эффективных жесткостей гофрированной пластины путем решения задачи на поперечном сечении пластины // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 4. С. 211–223.
10. **Bendsøe M. P.** Optimization of structural topology, shape and material. Heidelberg: Springer, 1995.
11. **Kolpakov A. A.** Design of laminated plate possessing the required stiffnesses using the minimal number of materials and layers // J. Elasticity. 2007. V. 86. P. 245–261.
12. **Аннин Б. Д.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламкаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
13. **Хог Э.** Анализ чувствительности при проектировании конструкций / Э. Хог, К. Чой, В. М. Комков. М.: Мир, 1988.
14. **Колпаков А. Г.** К определению усредненных характеристик упругих каркасов // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 6. С. 969–977.
15. **Алексеев В. М.** Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 10/V 2016 г.