

6. Huang F., Bai C., Ding J. Mechanical response of a composite propellant to dynamic loading // Shock compression of condensed matter — 1991: Proc. conf.— Amsterdam a. o.: Elsevier, 1992.
7. Asay J. R., Barker L. M. Interferometric measurement of shock-induced internal particle velocity and spatial variations of particle velocity // J. Appl. Phys.— 1974.— V. 45, N 6.
8. Эйрих Ф. Р., Смит Т. Л. Молекулярно-механические аспекты изотермического разрушения эластомеров // Разрушение/Под ред. Г. Либовица.— М.: Мир, 1976.— Т. 7, ч. 2.
9. Уткин А. В., Канель Г. И. Анализ вязкого откольного разрушения материалов в акустическом приближении // Динамическая прочность и трещиностойкость конструкционных материалов при однократном импульсном нагружении: Тез. докл. III Республ. семинара.— Киев, 1991.
10. Афанасенков А. Н., Богомолов В. М., Воскобойников И. М. Обобщенная ударная адiabата конденсированных веществ // ПМТФ.— 1969.— № 4.
11. Дремин А. Н., Першин С. В., Погорелов В. Ф. Структура ударных волн в KCl и KBr при динамическом сжатии до 200 тыс. атм // ФГВ.— 1965.— № 4.

г. Черноголовка

Поступила 27/IV 1992 г.

УДК 539.3

С. В. Андреев, В. Н. Паймушин

СОТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

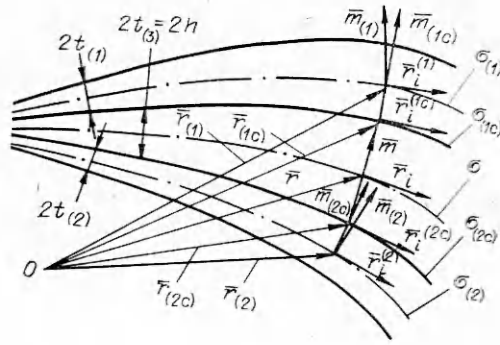
Предложенные к настоящему времени варианты теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины, базирующиеся на различных физических или кинематических гипотезах, построены, как правило, при введении ряда ограничений, накладываемых на величины перемещений, толщины слоев и их изменчивость и др. [1—6]. Разнообразие вариантов конструктивного исполнения таких оболочек, выполненных из обычных и композитных материалов, а также условий их эксплуатации требует построения для них разрешающих уравнений более общего вида, свободных от указанных выше ограничений.

В данной работе для трехслойных оболочек, имеющих произвольную геометрию внешних слоев и заполнителя, построен необходимый комплекс соотношений геометрически нелинейной теории при произвольных смещениях, который базируется на хорошо апробированной в расчетной практике статико-кинематической модели ломаной линии [7]. Используемая здесь модель и отвечающие ей уравнения являются предельно упрощенными для построения на их основе линеаризованных уравнений нейтрального равновесия и постановки соответствующих задач по определению смешанных [8] форм потери устойчивости трехслойных элементов конструкций рассматриваемого класса при существенно моментном докритическом их напряженно-деформированном состоянии. В частности, привлечения построенных в работе уравнений общего вида потребовали задачи по анализу напряженно-деформированного состояния и определению критических значений действующих нагрузок для ряда элементов конструкций летательных аппаратов, имеющих значительную переменность толщины заполнителя и находящихся при эксплуатации в условиях поперечного изгиба (закрылки, элероны и предкрылки крыла самолета, выполненные в виде трехслойных пластин и оболочек со слоями переменной толщины, хвостовые отсеки несущего винта вертолета и т. д.), а также некоторые задачи технологической механики трехслойных элементов конструкций.

1. При построении теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины нетривиальными являются вопросы, связанные с построением параметризаций в занимаемых слоями неканонических областях.

© С. В. Андреев, В. Н. Паймушин, 1993

Эти вопросы с той или иной степенью полноты были изучены в [2, 3, 5, 9], следуя которым для параметризации срединных поверхностей $\sigma_{(k)}$ ($k = 1, 2$) внешних слоев трехслойной оболочки выберем в качестве базы параметризации срединную поверхность заполнителя $\sigma = \sigma_{(3)}$, предполагая при этом, что для нее задано векторное уравнение $\bar{r} = \bar{r}(\alpha^i)$, определены компоненты первого (a_{in}, a^{in}) и второго (b_{in}, b^{in})



метрических и дискриминантного (c_{in}, c^{in}) тензоров, символы Кристоффеля (Γ_{in}^s) и другие величины, определяющие геометрию σ . Используя метод нормальной фиктивной деформации [9], осуществим параметризацию $\sigma_{(k)}$ в два этапа, что позволяет решить эту задачу более корректно по сравнению с [2, 3, 5]. На первом этапе отобразим σ на поверхности сопряжения (контакта) слоев $\sigma_{(kc)}$ с помощью векторного равенства (см. рисунок)

$$(1.1) \quad \bar{r}_{(kc)} = \bar{r} + h_{(k)} \bar{m} \quad (h_{(k)} = \delta_{(k)} h, \quad h = t_{(3)}),$$

а на втором этапе поверхности $\sigma_{(kc)}$ отобразим на $\sigma_{(k)}$, определяя радиус-вектор $\bar{r}_{(k)}$ точек $M_{(k)} \in \sigma_{(k)}$ равенством

$$(1.2) \quad \bar{r}_{(k)} = \bar{r}_{(kc)} + \tilde{t}_{(k)} \bar{m}_{(kc)} \quad (\tilde{t}_{(k)} = \delta_{(k)} t_{(k)}),$$

где \bar{m} , $\bar{m}_{(kc)}$ и $\bar{m}_{(k)}$ — векторы единичных нормалей к σ , $\sigma_{(kc)}$ и $\sigma_{(k)}$ соответственно; $2t_{(3)}$ и $2t_{(k)}$ — толщины заполнителя и внешних слоев, измеряемые в направлении нормалей \bar{m} и $\bar{m}_{(k)}$; $\delta_{(1)} = -\delta_{(2)} = 1$. Векторные равенства (1.1) и (1.2) позволяют определить на $\sigma_{(kc)}$ и $\sigma_{(k)}$ базисные векторы

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \bar{r}_i^{(kc)} &= \theta_{i(kc)}^s \bar{r}_s + h_i^{(k)} \bar{m}, & \bar{m}_{(kc)} &= \xi_{(kc)} (\bar{m} - \tilde{h}_{(k)}^s \theta_{s(kc)}^n \bar{r}_n), \\ \bar{r}_i^{(k)} &= \theta_{i(k)}^s \bar{r}_s^{(kc)} + \tilde{t}_i^{(k)} \bar{m}_{(kc)} = \lambda_{i(k)}^s \bar{r}_s + \lambda_i^{(k)} \bar{m}, \\ \bar{m}_{(k)} &= \xi_{(k)} (\bar{m}_{(kc)} - \tilde{t}_{(k)}^s \theta_{s(k)}^n \bar{r}_n^{(kc)}) = \mu_{(k)} \bar{m} + \mu_{(k)}^s \bar{r}_s. \end{aligned}$$

С помощью (1.3) и соответствующих формул из [9] могут быть найдены зависимости для вычисления на $\sigma_{(kc)}$ и $\sigma_{(k)}$ компонент дискриминантного $(c_{in}^{(kc)}, c_{in}^{(k)})$ и метрических $(a_{in}^{(kc)}, a_{in}^{(k)}, b_{in}^{(kc)}, b_{in}^{(k)})$ тензоров, символов Кристоффеля $(\Gamma_{in}^{(kc)s}, \Gamma_{in}^{(k)s})$, а также других величин, входящих в соотношения теории оболочек. В частности,

$$(1.4) \quad \begin{aligned} c_{in}^{(kc)} &= \xi_{(kc)}^{-1} \theta_{(kc)} c_{in}, & c_{in}^{(k)} &= \xi_{(k)}^{-1} \theta_{(k)} c_{in}^{(kc)}, \\ a_{in}^{(kc)} &= \theta_{i(kc)}^s \theta_{n(kc)}^m a_{sm} + h_i^{(k)} h_n^{(k)}, & a_{in}^{(k)} &= \lambda_{i(k)}^s \lambda_{n(k)}^m a_{sm} + \lambda_i^{(k)} \lambda_n^{(k)}, \\ b_{in}^{(kc)} &= \xi_{(kc)} (b_{i(kc)}^s a_{sn}^{(kc)} + \nabla_i^{(kc)} h_n^{(k)}), & b_{in}^{(k)} &= \xi_{(k)} (b_{i(k)}^s a_{sn}^{(k)} + \nabla_i^{(k)} \tilde{t}_n^{(k)}). \end{aligned}$$

В выражениях (1.3), (1.4) введены в рассмотрение функции

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \theta_{(kc)} &= 1 - 2h_{(k)} K + h_{(k)}^2 \Gamma, & \theta_{(k)} &= 1 - 2\tilde{t}_{(k)} K_{(kc)} + \tilde{t}_{(k)}^2 \Gamma_{(kc)}, \\ \xi_{(kc)} &= (1 + h_{(k)}^i h_i^{(k)})^{-1/2}, \\ \xi_{(k)} &= (1 + \tilde{t}_{(k)}^i \tilde{t}_i^{(k)})^{-1/2}, & \theta_{i(kc)}^s &= \delta_i^s - h_{(k)} b_i^s, & \theta_{i(k)}^s &= \delta_i^s - \tilde{t}_{(k)} b_{i(kc)}^s, \\ h_i^{(k)} &= \partial h_{(k)} / \partial \alpha^i, & \tilde{t}_i^{(k)} &= \partial \tilde{t}_{(k)} / \partial \alpha^i, & h_{(k)}^s &= a_{(kc)}^{s1} h_i^{(k)}, & \tilde{t}_{(k)}^s &= a_{(k)}^{s1} \tilde{t}_i^{(k)}, \end{aligned}$$

* Индекс (3), относящийся к параметрам заполнителя, в дальнейшем, как правило, опущен; индексы (k) и (kc) относятся к параметрам на $\sigma_{(k)}$ и $\sigma_{(kc)}$ соответственно.

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(h)} &= \theta_{i(h)}^s \tilde{h}_s^{(h)} + \tilde{t}_i^{(h)} \xi_{(hc)}, \quad \lambda_{i(h)}^n = \theta_{i(hc)}^s (\theta_{s(h)}^n - \tilde{h}_{(h)}^n \tilde{t}_s^{(h)} \xi_{(hc)}), \\ \mu_{(h)} &= \xi_{(hc)} (\xi_{(hc)} - \tilde{t}_{(h)}^s \tilde{h}_{(h)}^n \theta_{s(h)}^n), \quad \mu_{(h)}^n = -\xi_{(h)} \theta_{s(hc)}^n (\xi_{(hc)} \tilde{h}_{(h)}^s + \tilde{t}_{(h)}^m \theta_{m(h)}^s), \\ a_{in}^{\prime(i)} &= \theta_{i(h)}^s \theta_{n(h)}^h a_{sh}^{(hc)}, \quad a_{in}^{\prime(hc)} = \theta_{i(hc)}^s \theta_{n(hc)}^h a_{sh}^{(hc)}, \\ b_{i(hc)}^{\prime n} &= \theta_{(hc)}^{-1} (b_i^n - \delta_i^n h_{(h)} \Gamma), \quad b_{i(h)}^{\prime n} = \theta_{(h)}^{-1} (b_{i(hc)}^n - \delta_i^n \tilde{t}_{(h)} \Gamma_{(hc)}), \end{aligned}$$

причем K , $K_{(hc)}$ и Γ , $\Gamma_{(hc)}$ — средние и гауссовы кривизны поверхностей σ , $\sigma_{(hc)}$; $\nabla^{\prime(hc)}$, $\nabla^{\prime(h)}$ — операторы ковариантного дифференцирования по метрикам, определяемым тензорами $a_{in}^{\prime(hc)}$ и $a_{in}^{\prime(h)}$ соответственно. Остальные обозначения аналогичны принятым в [5].

Полученные соотношения между геометрическими параметрами на σ , $\sigma_{(hc)}$ и $\sigma_{(h)}$ с точностью $1 + \varepsilon \approx 1$ (ε — малая величина) могут быть упрощены для наиболее используемого в конструкциях класса трехслойных оболочек, внешние слои которых являются тонкими, а изменимость их толщин вдоль координат α^i — малой, т. е. имеют место оценки (L — характерный линейный размер оболочки)

$$(1.6) \quad |2t_{(h)}/L|_{\max} \sim \varepsilon, \quad |2t_i^{(h)}/\sqrt{a_{ii}}|_{\max} \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Для этого класса оболочек поверхности $\sigma_{(h)}$ в смысле [9] являются пологими относительно $\sigma_{(hc)}$ и из соотношений (1.3) — (1.5) с принятой степенью точности могут быть получены приближенные зависимости (при $\xi_{(hc)} \approx \theta_{(h)} \approx 1$, $\theta_{i(h)}^s \approx \delta_i^s$)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \bar{r}_i^{(h)} &= \bar{r}_i^{(hc)} + \tilde{t}_i^{(h)} \bar{m}_{(hc)} = \bar{\theta}_{i(hc)}^n \bar{r}_n + \Pi_i^{(h)} \bar{m}, \\ \bar{m}_{(h)} &= \bar{m}_{(hc)} - \tilde{t}_{(h)}^s \bar{r}_{(hc)}^s = \xi_{(hc)} \bar{m} - H_{(h)}^s \theta_{s(hc)}^n \bar{r}_n, \quad c_{in}^{(h)} = c_{in}^{(hc)}, \\ a_{in}^{(h)} &= a_{in}^{(hc)}, \quad \bar{z}_{in}^{(h)} = \bar{z}_{in}^{(hc)} + \nabla_i^{(h)} \tilde{t}_n^{(h)} (\Pi_i^{(h)} = \tilde{h}_i^{(h)} + \tilde{t}_i^{(h)} \xi_{(hc)}). \end{aligned}$$

Выражения (1.7) в свою очередь с этой же степенью точности для тонких трехслойных оболочек ($|2H_{(h)}/L|_{\max} \sim \varepsilon$), поверхности $\sigma_{(h)}$ которых являются пологими относительно σ ($|H_i^{(h)} H_n^{(h)}/\sqrt{a_{ii} a_{nn}}|_{\max} \sim \varepsilon$), могут быть приведены к виду [5, 6] (при $\theta_{i(hc)}^s \approx \delta_i^s$, $\xi_{(hc)} \approx 1$, $H_{(h)} = h_{(h)} + \tilde{t}_{(h)}$)

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \bar{r}_i^{(h)} &= \bar{r}_i + H_i^{(h)} \bar{m}, \quad \bar{m}_{(h)} = \bar{m} - H_i^{(h)} \bar{r}^i = \bar{m} - H_{(h)} \bar{r}_i, \\ a_{in}^{(h)} &= a_{in}, \quad \bar{z}_{in}^{(h)} = b_{in} + \nabla_i H_n^{(h)}. \end{aligned}$$

В соотношениях (1.3) — (1.8) учитываются различия в положении базисных векторов на σ и $\sigma_{(h)}$, в компонентах дискриминантного и метрических тензоров, символов Кристоффеля и других величинах, определяющих геометрию σ и $\sigma_{(h)}$. Тем самым в рамках используемых ниже статико-кинематических моделей для слоев оболочки появляется возможность учета основных геометрических особенностей конструкций рассматриваемого класса и связанных с ними особенностей механики их деформирования.

2. При использовании для трехслойного пакета модели ломаной линии [7], в рамках которой к внешним слоям привлекаются гипотезы Кирхгофа — Лява, а к заполнителю — гипотезы теории Тимошенко в уточненной постановке [10], векторы перемещений $\bar{V}_{(\beta)}^z$ точек, находящихся на уровнях $z_{(\beta)}$ от $\sigma_{(\beta)}$, представим как ($\beta = 1, 3$)

$$(2.1) \quad \bar{V}_{(\beta)}^z = \bar{V}_{(\beta)} + z_{(\beta)} \bar{\gamma}_{(\beta)} \quad (-t_{(\beta)} \leq z_{(\beta)} \leq t_{(\beta)}).$$

Здесь

$$(2.2) \quad \bar{V}_{(\beta)} = u_i^{(\beta)} \bar{r}_i^{(\beta)} + w_{(\beta)} \bar{m}_{(\beta)}, \quad \bar{\gamma}_{(\beta)} = v_i^{(\beta)} \bar{r}_i^{(\beta)} + \gamma_{(\beta)} \bar{m}_{(\beta)}, \quad \bar{\gamma}_{(h)} = \bar{m}_{(h)}^* - \bar{m}_{(h)}$$

— векторы перемещений точек срединных поверхностей $\sigma_{(\beta)}$ и поворота нормалей $\bar{m}_{(\beta)}$ к $\sigma_{(\beta)}$ в процессе деформации; $\bar{r}_i^{*(\beta)}$, $\bar{m}_{(\beta)}^*$ — координатные векторы основных базисов, построенных на деформированных поверхностях $\sigma_{(\beta)}^*$ [10].

Следует отметить, что компоненты векторов $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{(3)}$ для заполнителя являются искомыми неизвестными, в то время как компоненты векторов $\bar{\gamma}_{(k)}$ могут быть выражены через компоненты векторов перемещений $\bar{V}_{(k)}$ точек $\sigma_{(k)}$ и их производные по α^i [10].

Представлению векторов перемещений в слоях оболочки в виде (2.1) и (2.2) соответствуют компоненты тензоров их деформаций, вычисляемые на уровнях $z_{(\beta)}$ от $\sigma_{(\beta)}$ по формулам

(2.3)

$$\varepsilon_{in}^{z(\beta)} = \varepsilon_{in}^{(\beta)} + z_{(\beta)} \chi_{in}^{(\beta)}, \quad 2\varepsilon_{i3}^{z(3)} = 2\varepsilon_{i3} + z_{(3)} \nabla_i \varepsilon_3, \quad \varepsilon_{33}^{z(3)} = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_{i3}^{z(k)} = \varepsilon_{33}^{z(k)} = 0,$$

где

(2.4)

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{in}^{(\beta)} &= u_{in}^{*(\beta)} - a_{in}^{(\beta)}, \quad \chi_{in}^{(k)} = b_{in}^{(k)} - b_{in}^{*(k)}, \\ 2\chi_{in}^{(3)} &= \bar{r}_i^* \nabla_n \bar{\rho}_3^* + \bar{r}_n^* \nabla_i \bar{\rho}_3^* + 2b_{in}, \quad 2\varepsilon_{i3} = \bar{r}_i^* \bar{\rho}_3^*, \\ 2\varepsilon_3 &= \bar{\gamma} (2\bar{m}^* + \bar{\gamma}), \quad \nabla_i \varepsilon_3 = \bar{\rho}_3^* \nabla_i \bar{\rho}_3^* \\ (a_{in}^{*(\beta)} &= \bar{r}_i^{*(\beta)} \bar{r}_n^{*(\beta)}, \quad u_{in}^{*(\beta)} = -\bar{r}_i^{*(\beta)} \bar{m}_n^{*(\beta)}, \quad \bar{\rho}_3^* = \bar{m} + \bar{\gamma}). \end{aligned}$$

Записывая условия сопряжения слоев по перемещениям

$$V_{(3)}^z(z_{(3)} = h_{(k)}) = \bar{V}_{(k)}^z(z_{(k)} = -\tilde{t}_{(k)}) \quad \text{или} \quad \bar{V}_{(kc)} = \bar{V}_{(3k)} \quad (k = 1, 2)$$

и используя равенства (1.3), (1.5), (2.1), (2.2), найдем зависимости между векторами перемещений в слоях оболочки

$$(2.5) \quad V_{(k)} = \bar{V}_{(3k)} + \tilde{t}_{(k)} \bar{\gamma}_{(k)}$$

и их компонентами

$$u_i^{(k)} = \lambda_{i(k)}^s u_s^{(3k)} + \lambda_i^{(k)} w_{(3k)} + \tilde{t}_{(k)} \gamma_i^{(k)}, \quad w_{(k)} = \mu_{(k)}^s w_{(3k)} + \mu_{(k)}^s u_s^{(3k)} + \tilde{t}_{(k)} \gamma_{(k)}.$$

Здесь введены обозначения для векторов перемещений точек поверхностей сопряжения $\sigma_{(kc)}$ во внешних слоях $V_{(kc)}$ и заполнителя $\bar{V}_{(3k)}$, разложенных по базисам, построенным на $\sigma_{(k)}$ и σ :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \bar{V}_{(kc)} &= \bar{V}_{(k)} - \tilde{t}_{(k)} \bar{\gamma}_{(k)} = u_i^{(kc)} \bar{r}_i^{(k)} + w_{(kc)} \bar{m}_{(k)}, \\ \bar{V}_{(3k)} &= \bar{V} + h_{(k)} \bar{\gamma} = u_i^{(3k)} \bar{r}^i + w_{(3k)} \bar{m}. \end{aligned}$$

Компоненты векторов, входящих в (2.6), выражаются через ранее введенные компоненты (2.2) с помощью формул

$$\begin{aligned} u_s^{(kc)} &= u_s^{(k)} - \tilde{t}_{(k)} \gamma_s^{(k)}, \quad w_{(kc)} = w_{(k)} - \tilde{t}_{(k)} \gamma_{(k)}, \quad u_s^{(3k)} = u_s + h_{(k)} \gamma_s, \\ w_{(3k)} &= w + h_{(k)} \gamma. \end{aligned}$$

Используя выражения (1.1)–(1.4), параметризирующие поверхности $\sigma_{(kc)}$ и $\sigma_{(k)}$ относительно σ в исходном состоянии, и найденные зависимости между векторами перемещений в слоях оболочки (2.5), определим радиусы-векторы точек $M_{(kc)}^* \in \sigma_{(kc)}^*$ и $M_{(k)}^* \in \sigma_{(k)}^*$ в деформированном состоянии:

$$(2.7) \quad \bar{r}_{(kc)}^* = \bar{r}_{(kc)} + \bar{V}_{(kc)} = \bar{r}_* + h_{(k)} \bar{\rho}_3^*, \quad \bar{r}_{(k)}^* = \bar{r}_{(k)} + \bar{V}_{(k)} = \bar{r}_{(kc)}^* + \tilde{t}_{(k)} \bar{m}_{(k)}^* + \tilde{t}_{(k)} \bar{\psi}_{(k)}^*$$

а также базисные векторы, построенные на $\sigma_{(kc)}^*$ и $\sigma_{(k)}^*$:

$$(2.8) \quad \bar{r}_i^{*(kc)} = \bar{r}_i^* + h_i^{(k)} \bar{\rho}_3^* + h_{(k)} \nabla_i \bar{\rho}_3^*, \quad \bar{\theta}_{i(k)}^n \bar{r}_n^{*(k)} = \bar{r}_i^{*(kc)} + \tilde{t}_{(k)} (\bar{m}_{(k)}^* + \bar{\psi}_{(k)}^*) + \tilde{t}_{(k)} \nabla_i \bar{\psi}_{(k)}^*$$

Здесь

$$(2.9) \quad \bar{r}_* = \bar{r} + \bar{V}, \quad \bar{\psi}_{(k)} = \bar{m}_{(kc)} - \bar{m}_{(k)}, \quad \bar{\theta}_{i(k)}^n = \delta_i^n + \tilde{t}_{(k)} b_{i(k)}^{in}, \quad \bar{V} = \bar{V}_{(3)}.$$

При малой изменяемости толщин внешних слоев вдоль координат α^i , удовлетворяющих условиям (1.6), последние равенства в (2.7) и (2.8) с точностью $1 + \varepsilon \approx 1$ могут быть переписаны в приближенном виде

$$(2.10) \quad \bar{r}_{(kc)}^* = \bar{r}_{(k)}^* - \tilde{t}_{(k)} \bar{m}_{(k)}^*, \quad \bar{r}_i^{*(kc)} = \bar{\theta}_{i(k)}^n \bar{r}_n^{*(k)} - \tilde{t}_{(k)} \bar{m}_{(k)}^*.$$

Выражения (1.3) и (1.7), (2.8) и (2.10) позволяют найти зависимости между компонентами тензоров тангенциальных деформаций поверхностей $\sigma_{(hc)}$ и σ :

$$(2.11) \quad 2\varepsilon_{in}^{(hc)} = a_{in}^{*(hc)} - a_{in}^{(hc)} = 2\varepsilon_{in}^{(3)} + 2h_{(h)}\chi_{in}^{(3)} + h_i^{(h)}(2\varepsilon_{n3} + h_{(h)}\nabla_n\varepsilon_3) + \\ + h_n^{(h)}(2\varepsilon_{i3} + h_{(h)}\nabla_i\varepsilon_3) + 2h_i^{(h)}h_n^{(h)}\varepsilon_3 + h_{(h)}^2v_{in},$$

а также поверхностей $\sigma_{(hc)}$ и $\sigma_{(h)}$

$$(2.12) \quad \varepsilon_{in}^{(hc)} = \varepsilon_{in}^{(h)} - \tilde{t}_{(h)}\chi_{in}^{(h)} + \tilde{t}_{(h)}^2v_{in}^{(h)}/2,$$

которые допускают дальнейшие упрощения, связанные возможностью пренебрежения последними членами, содержащими $h_{(h)}^2$ и $\tilde{t}_{(h)}^2$. Здесь компоненты деформаций в слоях оболочки вычисляются по формулам (2.3) и (2.4), а

$$v_{in} = \nabla_i\bar{\rho}_3^*\nabla_n\bar{\rho}_3^* - \nabla_i\bar{m}\nabla_n\bar{m}, \quad v_{in}^{(h)} = b_{i(h)}^{*s}b_{ns}^{*(h)} - b_{i(h)}^sb_{ns}^{(h)}.$$

Для установления зависимости между компонентами тензоров изгибных деформаций рассматриваемых поверхностей построим векторы единичных нормалей m_* к σ_* и $\bar{m}_{(hc)}^*$ к $\sigma_{(hc)}$, представив их в виде разложений

$$(2.13) \quad \bar{m}_* = \xi_* (\bar{\rho}_3^* + \xi_i^{*i}r_i^*), \quad \bar{m}_{(hc)}^* = \xi_{(hc)}^* (\bar{\rho}_3^* + \xi_i^{*(hc)}\bar{r}_{i(hc)}^*) = \\ = \xi_{(h)}^* (\bar{m}_{(h)}^* + \xi_i^{*(h)}\bar{r}_{i(h)}^*).$$

Из условий $\bar{m}_*^2 = \bar{m}_{(hc)}^{*2} = 1$ и $\bar{m}_* \bar{r}_i^* = \bar{m}_{(hc)}^* \bar{r}_i^{*(hc)} = 0$ с помощью равенств (2.4), (2.8)–(2.10) находим коэффициенты разложений, входящие в (2.13):

$$\xi_i^* = -\bar{\rho}_3^* r_i^* = -2\varepsilon_{i3}, \quad \xi_* = (1 + 2\varepsilon_*)^{-1/2}, \quad \xi_i^{*(hc)} = -\bar{\rho}_3^* r_i^{*(hc)} = -2\varepsilon_{i3}^{(hc)}, \\ \xi_{(hc)}^* = (1 + 2\varepsilon_{hc}^*)^{-1/2}, \quad \xi_i^{*(h)} = \tilde{t}_s^{(h)}(\delta_i^s - \tilde{t}_{(h)}b_{i(h)}^{*s}), \quad \xi_{(h)}^* = (1 + \xi_{*(h)}^2 \xi_i^{*(h)})^{-1/2}, \\ \varepsilon_* = \varepsilon_3 - 2\varepsilon^{i3}\varepsilon_{i3}, \quad \varepsilon_{(hc)}^* = \varepsilon_3 - 2\varepsilon_{(hc)}^{i3}\varepsilon_{i3}^{(hc)}, \quad 2\varepsilon_{i3}^{(hc)} = 2\varepsilon_{i3} + h_i^{(i)}(1 + 2\varepsilon_3) + h_{(h)}\nabla_i\varepsilon_3.$$

Дифференцируя формулы (2.13) по α^i , с учетом приближенных равенств $\xi_* \approx 1 - \varepsilon_*$, $\xi_{(hc)}^* \approx 1 - \varepsilon_{(hc)}^*$, $\xi_{(h)}^* \approx 1$ определим компоненты второго метрического тензора поверхностей σ_* , $\sigma_{(hc)}^*$ и $\sigma_{(h)}$

$$b_{in}^* = (1 - \varepsilon_*)(b_{in} + \nabla_i^*\varepsilon_{n3} + \nabla_n^*\varepsilon_{i3} - \chi_{in}^{(3)}), \quad b_{in}^{*(hc)} = b_{in}^{*(h)} - \nabla_i^{*(h)}\tilde{t}_n^{(h)}, \\ b_{in}^{*(hc)} = (1 - \varepsilon_{(hc)}^*)(b_{in} - \chi_{in}^{(3)} + \nabla_i^{*(hc)}\varepsilon_{n3}^{(hc)} + \nabla_n^{*(hc)}\varepsilon_{i3}^{(hc)} - h_i^{(h)}\nabla_n\varepsilon_3 - h_{(h)}v_{in})$$

и компоненты тензора изгибных деформаций

$$\chi_{in}^{(3)} = \chi_{in}^{0(3)} + \nabla_i^*\varepsilon_{n3} + \nabla_n^*\varepsilon_{i3} - \varepsilon_*b_{in}^*, \quad \chi_{in}^{(h)} = \chi_{in}^{(hc)} + A_{in}^{s(h)}\tilde{t}_s^{(h)}, \\ \chi_{in}^{(hc)} = \chi_{in}^{(3)} + \varepsilon_{(hc)}^*b_{in}^{*(hc)} - \varepsilon_{(hc)}^*b_{in}^{(hc)} + h_i^{(h)}\nabla_n\varepsilon_3 + A_{in}^{s(hc)}\tilde{t}_s^{(h)} - \nabla_i^{*(hc)}\varepsilon_{n3}^{(hc)} - \nabla_n^{*(hc)}\varepsilon_{i3}^{(hc)}, \\ (\chi_{in}^{0(3)} = b_{in}^* - b_{in}^*, \quad A_{in}^{s(h)} = \Gamma_{in}^{(h)*s} - \Gamma_{in}^{(h)s}, \quad A_{in}^{s(hc)} = \Gamma_{in}^{(hc)*s} - \Gamma_{in}^{(hc)s}),$$

где ∇_i^* , $\nabla_i^{*(hc)}$ и $\nabla_i^{*(h)}$ — операторы ковариантного дифференцирования по метрикам, определяемым тензорами a_{in}^* , $a_{in}^{*(hc)}$ и $a_{in}^{*(h)}$ соответственно.

3. Для получения уравнений равновесия и отвечающих им естественных граничных условий воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа

$$(3.1) \quad \delta\Pi = \delta A - \delta W = 0.$$

Вариации потенциальной энергии деформации внешних слоев $\delta W_{(h)}$ и заполнителя $\delta W_{(3)}$, отвечающие принятым статико-кинематическим моделям, имеют вид

$$(3.2) \quad \delta W_{(h)} = \int \int_{\sigma_{(h)}} (\bar{T}_{(h)}^n \nabla_n \delta \bar{V}_{(h)} + \bar{M}_{(h)}^n \nabla_n \delta \bar{m}_{(h)}^*) d\sigma_{(h)}, \\ \delta W_{(3)} = \int \int_{\sigma} (\bar{T}_{(3)}^n \nabla_n \delta \bar{V} + \bar{M}_{(3)}^n \nabla_n \delta \bar{\gamma} + \bar{N}_{(3)} \delta \bar{\gamma}) d\sigma.$$

Здесь введены векторы внутренних усилий и моментов в слоях оболочки, отнесенные к единицам длин координатных линий недеформированных поверхностей $\sigma_{(\beta)}$ и заданные относительно базисных векторов на деформированных поверхностях $\sigma_{(\beta)}^*$ ($\beta = \overline{1, 3}$):

$$\begin{aligned}\bar{T}_{(k)}^n &= T_{(k)}^{ns} \bar{r}_s^{*(k)} + M_{(k)}^{is} \nabla_s \bar{m}_i^{*(k)}, & \bar{M}_{(k)}^n &= M_{(k)}^{ns} \bar{r}_s^{*(k)} + H_{(k)}^{ns} \nabla_s \bar{m}_i^{*(k)}, \\ \bar{T}_{(3)}^n &= T_{(3)}^{ns} \bar{r}_s^{*} + T_{(3)}^{n3} \bar{\rho}_3^{*} + M_{(3)}^{ns} \nabla_s \bar{\rho}_3^{*}, & \bar{M}_{(3)}^n &= M_{(3)}^{ns} \bar{r}_s^{*} + M_{(3)}^{n3} \bar{\rho}_3^{*} + H_{(3)}^{ns} \nabla_s \bar{\rho}_3^{*}, \\ \bar{N}_{(3)} &= T_{(3)}^{n3} \bar{r}_n^{*} + T_{(3)}^{33} \bar{\rho}_3^{*} + M_{(3)}^{n3} \nabla_n \bar{\rho}_3^{*}.\end{aligned}$$

Их компоненты вычисляются по формулам ($\nu, \gamma = \overline{1, 3}$)

$$\begin{aligned}T_{(\beta)}^{\nu\gamma} &= \Gamma_{(\beta)}(I_{(\beta)} \sigma_{(\beta)}^{\nu\gamma}), & M_{(\beta)}^{\nu\gamma} &= \Gamma_{(\beta)}(I_{(\beta)} \sigma_{(\beta)}^{\nu\gamma} z_{(\beta)}), & H_{(\beta)}^{\nu\gamma} &= \Gamma_{(\beta)}(I_{(\beta)} \sigma_{(\beta)}^{\nu\gamma} z_{(\beta)}^2), \\ \Gamma_{(\beta)}(\dots) &= \int_{-t(\beta)}^{t(\beta)} (\dots) dz_{(\beta)}, & I_{(\beta)} &= \sqrt{g_{(\beta)}/a_{(\beta)}}, & g_{(\beta)} &= \det(\bar{\rho}_i^{(\beta)} \bar{\rho}_n^{(\beta)}), \\ & & \bar{\rho}_i^{(\beta)} &= \bar{r}_i^{(\beta)} + z_{(\beta)} \bar{m}_i^{(\beta)}.\end{aligned}$$

Проводя суммирование выражений (3.2) и учитывая формулы (2.14) — (2.13), после некоторых преобразований приходим к следующему выражению для вариации потенциальной энергии деформаций трехслойной оболочки ($\Sigma = \sum_{k=1}^3$):

$$(3.2)' \delta W = \sum_{\sigma_{(k)}} \int \int \bar{M}_{(k)}^{in} \bar{r}_i^{*(k)} \nabla_n \delta \bar{m}_i^{*(k)} d\sigma_{(k)} + \int_{\sigma} (\bar{T}^n \nabla_n \delta \bar{V} + \bar{M}^n \nabla_n \delta \bar{\gamma} + \bar{N} \delta \bar{\gamma}) d\sigma,$$

где векторы внутренних усилий и моментов для оболочки в целом, приведенные к срединной поверхности заполнителя σ , определяются выражениями

$$(3.3) \quad \begin{aligned}\bar{T}^n &= T^{ns} \bar{r}_s^{*} + T^{n3} \bar{\rho}_3^{*} + M^{ns} \nabla_s \bar{\rho}_3^{*}, & \bar{M}^n &= M^{ns} \bar{r}_s^{*} + M^{n3} \bar{\rho}_3^{*} + H^{ns} \nabla_s \bar{\rho}_3^{*}, \\ \bar{N} &= T^{n3} \bar{r}_n^{*} + T^{33} \bar{\rho}_3^{*} + M^{n3} \nabla_n \bar{\rho}_3^{*},\end{aligned}$$

а их компоненты оказываются равными ($\tilde{T}_{(k)}^{in} = T_{(k)}^{is} \theta_{s(k)}^{*i} \sqrt{a_{(k)}/a}$)

$$(3.4) \quad \begin{aligned}T^{ns} &= T_{(3)}^{ns} + \sum \tilde{T}_{(k)}^{ns}, & M^{ns} &= M_{(3)}^{ns} + \sum \tilde{T}_{(k)}^{ns} h_{(k)}, \\ M^{n3} &= M_{(3)}^{n3} + \sum \tilde{T}_{(k)}^{ns} h_{(k)} h_s^{(k)}, \\ T^{n3} &= T_{(3)}^{n3} + \sum \tilde{T}_{(k)}^{ns} h_s^{(k)}, & H^{ns} &= H_{(3)}^{ns} + \sum \tilde{T}_{(k)}^{ns} h_{(k)}^2, & T^{33} &= T_{(3)}^{33} + \sum \tilde{T}_{(k)}^{ns} h_n^{(k)} h_s^{(k)}.\end{aligned}$$

Вводя контурные изгибающие и крутящие моменты внутренних сил $\bar{M}_n^{(k)} = \frac{\tilde{M}_{(k)}^{is} n_s^{*(k)}}{\tilde{M}_{(k)}^{is} n_s^{*(k)}} \tilde{M}_{(k)}^{is} n_s^{*(k)}$ и используя формулы преобразования поверхностных интегралов [10], из равенства (3.2)' для δW получим окончательное выражение

$$(3.5) \quad \begin{aligned}\delta W &= -(\bar{M}_{n\tau} \delta \bar{V} + \bar{G}_{n\tau} \delta \bar{\gamma})|_c + \int_c [(d\bar{M}_{n\tau}/dS + \bar{T}^i n_i) \delta \bar{V} + \\ &+ (\bar{G}_{n\tau} + \bar{M}^i n_i) \delta \bar{\gamma} + \sum \bar{M}_n^{(k)} \delta \bar{m}_i^{*(k)}] dS + \int_{\sigma} [\nabla_i \bar{T}^i \delta \bar{V} + (\nabla_i \bar{M}^i - \bar{N}) \delta \bar{\gamma}] d\sigma.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{M}_{n\tau} &= \sum \bar{M}_{n\tau}^{(k)}, & \bar{G}_{n\tau} &= \sum \bar{M}_{n\tau}^{(k)} h_{(k)}, & \bar{M}_{n\tau}^{(k)} &= \bar{M}_{n\tau}^{(k)} \theta_{,s}^{(k)} \bar{m}_i^{*(k)}, & \bar{M}_{(k)}^{is} &= M_{(k)}^{is} + T_{(k)}^{is} \tilde{t}^{(k)}; \\ \bar{M}_n^{(k)} &= \bar{n}_i^{*(k)} (\bar{M}_n^{(k)} + \bar{M}_{n\tau}^{(k)} \tilde{t}_{(k)} h_{n\tau}^{*(k)}) ds_{(k)}/ds; & \bar{G}_{n\tau} &= \sum h_{(k)} d\bar{M}_{n\tau}^{(k)}/ds; \\ \theta_{,s}^{(k)} &= 1 + \tilde{t}_{(k)} k_s^{*(k)}; & \bar{T}^i &= T^i + \sum \bar{N}_{(k)}^i = \tilde{T}^{is} \bar{r}_s^{*} + \tilde{T}^{i3} \bar{m}_3^{*}; \\ \bar{M}^i &= \bar{M}^i + \sum \bar{N}_{(k)}^i h_{(k)} = \bar{M}^{is} \bar{r}_s^{*} + \bar{M}^{i3} \bar{m}_3^{*}; & \bar{N} &= \bar{N} + \sum \bar{N}_{(k)}^i h_i^{(k)} = \bar{N}^i \bar{r}_i^{*} + \bar{N}^3 \bar{m}_3^{*}; \\ \bar{N}_{(k)}^i &= \nabla_s^{*(k)} \tilde{M}_{(k)}^{is} \theta_{j(k)}^{*i} \sqrt{a_{(k)}/a} \bar{m}_i^{*(k)}; & \theta_{s(k)}^{*i} &= \delta_s^i - \tilde{t}_{(k)} b_s^{*i};\end{aligned}$$

$(\bar{n}_{(\beta)}^*, \bar{\tau}_{(\beta)}^*, \bar{m}_{(\beta)}^*)$, $(\bar{n}_{(\beta)}, \bar{\tau}_{(\beta)}, \bar{m}_{(\beta)})$ — правосторонние триэдры ортогональных единичных векторов, построенных на контурных линиях $C_{(\beta)}^* \in \sigma_{(\beta)}^*$ и $C_{(\beta)} \in \sigma_{(\beta)}$ соответственно. Для них имеют место представления

$$\bar{n}_{(\beta)}^* = n_i^{*(\beta)} r_i^{\beta} = n_{*i(\beta)}^* \bar{r}_i^{\beta}, \quad \bar{\tau}_{(\beta)}^* = \tau_i^{*(\beta)} r_i^{\beta} = \tau_{*i(\beta)}^* \bar{r}_i^{\beta}, \quad \bar{n}_{(\beta)} = n_i^{(\beta)} r_i^{\beta}, \\ \bar{\tau}_{(\beta)} = \tau_i^{(\beta)} r_i^{\beta},$$

$dS_{(\beta)}$ — элемент дуги $C_{(\beta)} \in \sigma_{(\beta)}$, $k_{n\tau}^{*(\beta)} = -b_{is}^{*(\beta)} n_{*i(\beta)}^* \tau_{*s(\beta)}^*$, $k_{\tau}^{*(\beta)} = -b_{is}^{*(\beta)} \times \tau_{*i(\beta)}^* \tau_{*s(\beta)}^*$.

Для нахождения элементарной работы внешних сил на возможных перемещениях оболочки предположим, что действующая на нее нагрузка приведена к векторам поверхностных и контурных усилий $\bar{X}_{(\beta)}$, $\bar{\Phi}_{(\beta)}$ и моментов $\bar{L}_{(\beta)}$, $\bar{H}_{(\beta)}$, приложенным к точкам деформированных поверхностей $\sigma_{(\beta)}^*$ и контурных линий $C_{(\beta)}^* \in \sigma_{(\beta)}^*$ и отнесенным к единицам недеформированных площадей $\sigma_{(\beta)}$ и длин $C_{(\beta)}$:

$$(3.6) \quad \bar{X}_{(\beta)} = X_{(\beta)}^i r_i^{\beta} + X_{(\beta)}^3 \bar{m}_{(\beta)}^*, \quad \bar{\Phi}_{(\beta)} = \Phi_n^{(\beta)} \bar{n}_{(\beta)}^* + \Phi_{\tau}^{(\beta)} \bar{\tau}_{(\beta)}^* + \Phi_m^{(\beta)} \bar{m}_{(\beta)}^*, \\ \bar{L}_{(\beta)} = L_{(\beta)}^i r_i^{\beta} + L_{(\beta)}^3 \bar{m}_{(\beta)}^*, \quad \bar{H}_{(\beta)} = H_n^{(\beta)} \bar{n}_{(\beta)}^* + H_{\tau}^{(\beta)} \bar{\tau}_{(\beta)}^* + H_m^{(\beta)} \bar{m}_{(\beta)}^*.$$

Для элементарной работы внешних нагрузок, заданных векторами (3.6), запишем выражение

$$\delta A = \sum_{\beta=1}^3 \left[\int_{\sigma_{(\beta)}^*} (\bar{X}_{(\beta)} \delta \bar{V}_{(\beta)} + \bar{L}_{(\beta)} \delta \bar{\gamma}_{(\beta)}) d\sigma_{(\beta)} + \int_{C_{(\beta)}} (\bar{\Phi}_{(\beta)} \delta \bar{V}_{(\beta)} + \bar{H}_{(\beta)} \delta \bar{\gamma}_{(\beta)}) dS_{(\beta)} \right],$$

которое по аналогии с (3.2)' и (3.5) преобразуем к виду

$$(3.7) \quad \delta A = -(\bar{H}_{n\tau} \delta \bar{V} + \bar{H}_{n\tau} \delta \bar{\gamma})|_C + \int_C (\bar{\Phi} \delta \bar{V} + \bar{H} \delta \bar{\gamma} + \sum \bar{H}_n^{(h)} \delta \bar{m}_{(h)}^*) dS + \\ + \int_{\sigma} (\bar{X} \delta \bar{V} + \bar{L} \delta \bar{\gamma}) d\sigma.$$

Здесь для контурных и поверхностных внешних усилий и моментов, приведенных к σ , введены обозначения:

$$\bar{H}_{n\tau} = \sum \bar{H}_{n\tau}^{(h)}; \quad \bar{H}_{n\tau} = \sum \bar{H}_{n\tau}^{(h)} h_{(h)}; \quad \bar{H}_{n\tau}^{(h)} = (H_{\tau}^{(h)} + \Phi_{\tau}^{(h)} \tilde{t}_{(h)}) \theta_{,s}^{(h)} \bar{m}_{(h)}^*; \\ \bar{H}_n^{(h)} = \bar{n}_{(h)}^* [H_n^{(h)} + \Phi_n^{(h)} \tilde{t}_{(h)} + \tilde{t}_{(h)} k_{n\tau}^{*(h)} (H_{\tau}^{(h)} + \Phi_{\tau}^{(h)} \tilde{t}_{(h)})] dS_{(h)}/dS; \\ \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_{(3)} + \sum [(\bar{\Phi}_{(h)} - \bar{H}_H^{(h)}) dS_{(h)}/dS + d\bar{H}_{n\tau}/dS]; \quad \bar{H}_H^{(h)} = \theta_{,i}^{*s} L_{(h)}^i n_s^{(h)} \bar{m}_{(h)}^*; \\ \bar{H} = \bar{H}_{(3)} + \sum h_{(h)} [(\bar{\Phi}_{(h)} - \bar{H}_H^{(h)}) dS_{(h)}/dS + d\bar{H}_{n\tau}/dS]; \quad \bar{H}_s^{(h)} = \theta_{,i}^{*s} L_{(h)}^i \bar{m}_{(h)}^*; \\ \bar{X} = \bar{X}_{(3)} + \sum (\bar{X}_{(h)} + v_s^{*(h)} \bar{H}_s^{(h)}) \sqrt{a_{(h)}/a} = X^i r_i^* + X^3 \bar{m}_*; \\ \bar{L} = \bar{L}_{(3)} + \sum h_{(h)} (\bar{X}_{(h)} + v_s^{*(h)} \bar{H}_s^{(h)}) \sqrt{a_{(h)}/a} = L^i r_i^* + L^3 \bar{m}_*.$$

Подставляя полученные выражения (3.5) и (3.7) в равенство (3.1), приходим к вариационному уравнению Лагранжа

$$(3.8) \quad \delta \Pi = (\bar{H}_{\tau} \delta \bar{V} + \bar{G}_{\tau} \delta \bar{\gamma})|_C + \int_C (\bar{R} \delta \bar{V} + \bar{M}_H \delta \bar{\gamma} + \sum \bar{G}_H^{(h)} \delta \bar{m}_{(h)}^*) dS + \\ + \int_{\sigma} (\bar{F} \delta \bar{V} + \bar{Z} \delta \bar{\gamma}) d\sigma = 0,$$

из которого ввиду произвольности варьируемых вектор-функций могут быть получены уравнения равновесия в векторной форме

$$(3.9) \quad \bar{F} = F^i r_i^* + F^3 \bar{m}_* = 0, \quad \bar{Z} = Z^i r_i^* + Z^3 \bar{m}_* = 0$$

и скалярной

$$(3.10) \quad F^i = 0, \quad F^3 = 0, \quad Z^i = 0, \quad Z^3 = 0,$$

естественные граничные условия на контуре оболочки C

$$(3.11) \quad \bar{R} = R_n \bar{n}_* + R_\tau \bar{\tau}_* + R_m \bar{m}_* = 0 \text{ при } \delta \bar{V} \neq 0, \quad \bar{M}_H = M_n^H \bar{n}_* + M_\tau^H \bar{\tau}_* + \\ + M_m^H \bar{m}_* = 0 \text{ при } \delta \bar{\gamma} \neq 0, \quad \sum G_H^{(h)} = 0 \text{ при } \bar{n}_{(h)}^* \delta \bar{m}_{(h)}^* \neq 0$$

и ее угловых точках

$$(3.12) \quad \bar{H}_\tau = 0 \text{ при } \delta \bar{V} \neq 0, \quad \bar{G}_\tau = 0 \text{ при } \delta \bar{\gamma} \neq 0.$$

В равенствах (3.8)–(3.12) введены обозначения:

$$F^i = \nabla_s^* \tilde{r}^{is} - \tilde{T}^{s3} b_s^{*i} + X^i; \quad F^3 = \nabla_s \tilde{T}^{s3} + \tilde{T}^{is} b_{is}^* + X^3; \\ Z^i = \nabla_s^* \tilde{M}^{is} - \tilde{M}^{s3} b_s^{*i} - \tilde{N}^i + L^i; \\ Z^3 = \nabla_s \tilde{M}^{s3} + \tilde{M}^{is} b_{is}^* - \tilde{N}^3 + L^3; \quad \bar{R} = \bar{\Phi} - \bar{T}^{is} \bar{i}_s - d\bar{M}_{n\tau}/dS; \\ \bar{H}_\tau = \bar{M}_{n\tau} - \bar{H}_{n\tau}; \quad \bar{M}_H = \bar{H} - \bar{G}_{n\tau} - \bar{M}^i n_i; \quad \bar{G}_\tau = \bar{G}_{n\tau} - \bar{H}_{n\tau}; \\ \bar{G}_H^{(h)} = G_H^{(h)} \bar{n}_{(h)}^* = \bar{H}_n^{(h)} - \bar{M}_n^{(h)}.$$

Вариационное уравнение (3.8) и следующие из него уравнения равновесия (3.9), (3.10) и граничные условия (3.11), (3.12) теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины являются в рамках используемой статико-кинематической модели наиболее общими и справедливыми при произвольных перемещениях. Введение тех или иных ограничений на величины перемещений, толщины слоев и их изменяемость по α^i позволяет упростить основные соотношения предлагаемого варианта теории трехслойных оболочек и привести их к известным вариантам теории. В частности, при рассмотрении среднего изгиба [5, 10] тонких оболочек для параметризации внешних слоев справедливы формулы (1.8), компоненты вектора перемещений $\bar{V}_{(h)}$ поверхностей $\sigma_{(h)}$ могут быть выражены через компоненты \bar{V} и $\bar{\gamma}$ поверхности σ с помощью приближенных формул [6]

$$u_i^{(h)} = u_i + h_{(h)} \gamma_i + H_i^{(h)} w - \tilde{t}_{(h)} \omega_i, \quad w_{(h)} = w + h_{(h)} \gamma - a^{is} H_s^{(h)} u_i^{(h)},$$

в силу которых $\omega_i^{(h)} \approx \omega_i$ ($\omega_i^{(\beta)} = \bar{m}_{(\beta)} \nabla_i \bar{V}_{(\beta)}$). Для данного класса трехслойных оболочек уравнения равновесия (3.10) и граничные условия (3.11), (3.12), отнесенные к координатным векторам недеформированного базиса на σ , связанного с базисом (\bar{r}_i^*, \bar{m}_*) зависимостями

$$\bar{r}_i^* = \bar{r}_i + \omega_i \bar{m}, \quad \bar{m}_* = \bar{m} - \omega_i \bar{r}^i = \bar{m} - \omega_\tau \bar{\tau} - \omega_n \bar{n}, \quad \bar{i}_* = \bar{n} + \omega_n \bar{m}, \\ \bar{\tau}_* = \bar{\tau} + \omega_\tau \bar{m}, \quad \omega_n = \omega_i n^i, \quad \omega_\tau = \omega_i \tau^i,$$

в случае пренебрежения моментами M^{s3} и H^{in} , входящими в (3.3) и (3.4), могут быть значительно упрощены и приведены к виду, совпадающему с [6]. При этом шестое уравнение равновесия моментов $Z^3 = 0$ будет алгебраическим.

При рассмотрении тонких трехслойных оболочек с весьма тонкими внешними слоями ($2h/L \sim \varepsilon$, $t_{(h)}/h_{(h)} \sim \varepsilon$) система уравнений равновесия еще более упрощается и может быть приведена к виду [5], совпадающему по структуре дифференциальных операторов с уравнениями равновесия теории однослойных оболочек типа Тимошенко [10]. При этом с принятой степенью точности внешние слои можно считать безмоментными, вычисляя компоненты тангенциальных деформаций в них по приближенным формулам, следующим из (2.11):

$$\varepsilon_{is}^{(h)} = \varepsilon_{is} + \bar{H}_{(h)} \chi_{is} + \bar{H}_i^{(h)} \varepsilon_{s3} + \bar{H}_s^{(h)} \varepsilon_{i3} + \bar{H}_i^{(h)} \bar{H}_s^{(h)} \varepsilon_3 \\ (H_{(h)} = h_{(h)} + \tilde{t}_{(h)} \approx h_{(h)}, \quad H_i^{(h)} = \partial H_{(h)} / \partial \alpha^i).$$

Дальнейшие упрощения основных соотношений теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины связаны, в частности, с введением условий пологости оболочки [1], ограничений на изменяемость (переменность) толщин внешних слоев или заполнителя [4] и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Теория трехслойных оболочек с заполнителем и слоями переменной толщины // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.— 1962.— № 4.
2. Гольденштейн А. М., Муштари Х. М. Уравнения равновесия трехслойных оболочек со слоями переменной толщины с учетом различия в метрике слоев // Некоторые вопросы теории пластин и оболочек.— Казань: Казан. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1967.
3. Паймушин В. Н., Галимов Н. К. К общей теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины // Тр. семинара по теории оболочек.— Казань: Казан. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1975.— Вып. 6.
4. Пухлий В. А. Трехслойные ортотропные оболочки переменной жесткости (теория и приложения) // ПМ.— 1980.— Т. 16, № 9.
5. Андреев С. В., Паймушин В. Н. К теории среднего изгиба тонких трехслойных оболочек со слоями переменной толщины и сложной геометрии // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.— 1980.— № 2.
6. Паймушин В. Н., Андреев С. В. К нелинейной теории трехслойных оболочек со слоями переменной толщины и сложной геометрии // Исследования по теории пластин и оболочек.— Казань: КГУ, 1981.— Вып. 16.
7. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем // Изв. АН СССР. ОТН.— 1958.— № 1.
8. Паймушин В. Н., Бобров С. Н. О формах устойчивости трехслойных пластин и оболочек с внешними слоями из однородных и армированных материалов // Механика композит. материалов.— 1985.— № 1.
9. Галимов Н. З., Паймушин В. П. Теория оболочек сложной геометрии.— Казань: КГУ, 1985.
10. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига/Под ред. Н. З. Галимова.— Казань: КГУ, 1977.

г. Пошкар-Ола

Поступила 27/X 1989 г.,
в окончательном варианте —
27/XII 1991 г.

УДК 539.3 : 629.7.015.4 : 624.07

В. Н. Максименко

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТРЕЩИН ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Применение аналитических методов к оценке прочности композитных материалов с трещинами и тонкими включениями затруднительно из-за недостатка сведений о распределении напряжений в окрестности вершин разрезов и включений сложной конфигурации в анизотропных материалах. Обсуждение данной проблемы и обзор работ в этом направлении (главным образом для прямолинейных трещин и включений) можно найти, например, в [1—5].

Ниже на основе метода функций влияния дается решение основных задач плоской теории упругости для анизотропных тел, ослабленных криволинейными разрезами. Построены интегральные представления, позволяющие единообразно формировать разрешающую систему сингулярных интегральных уравнений (СИУ) первой, второй и смешанной задач теории упругости. Эффективность построенных интегральных представлений и предложенных алгоритмов численной реализации возникающих СИУ демонстрируется при решении ряда задач теории трещин для анизотропных пластин.

1. Рассмотрим бесконечную прямолинейно-анизотропную пластину, ослабленную системой гладких криволинейных непересекающихся разрезов $L_j = (a_j, b_j)$, $j = \overline{1, n}$ (рис. 1). Угол между Ox и нормалью n к левому берегу разреза в точке $t \in L = \bigcup_{j=1}^n L_j$ обозначим $\varphi(t)$. Определим на-