При развитой турбулентной естественной конвекции в парогазовой среде поток активного компонента на поверхность кристалла определяется соотношением [2, 3]

$$v \simeq br_0^2 \sqrt{g\beta\,(\partial T/\partial x)}\,\beta\,(\partial T/\partial x).$$

Здесь r_0 — радиус ампулы; β — коэффициент температурного расширения; g — ускорение силы тяжести; $b = 0{,}03$ для вертикальных и 0,008 для горизонтальных ампул. Полагая $\beta = 1/T_-$, $\partial T/\partial x \simeq (T_+ - T_-)/x_+$ (T_+, T_- — температура в зонах испарения и осаждения), получим

$$\tau_v = \frac{x_+^{5/2}}{br_0^2\sqrt{g}}\left(\frac{T_-}{T_+ - T_-}\right)^{3/2}.$$

Отсюда следует, что при развитом турбулентном режиме характерное время переноса вообще не зависит от давления в системе. Причем надо иметь в виду, что турбулентная конвекция наступает при определенных значениях чисел Грасгофа [8], которые в свою очередь являются функциями давления в системе. В связи с этим при изменении давления возможна смена турбулентного и ламинарного режимов. Однако для условий, в которых реализуется развитая турбулентная естественная конвекция, независимость τ_v от давления сохраняет силу.

Отметим, что при турбулентном режиме τ_v существенно зависит от радиуса ампулы: $\tau_v \sim r_0^{-2}$. В результате, изменяя только поперечные размеры системы и сохраняя все прочие условия неизменными, можно в принципе влиять па кинетику процесса, переходя от диффузионной к контролируемой, скоростью химической реакции, и наоборот. Об этом необходимо помнить, сопоставляя скорости роста кристаллов в ампулах с различными поперечными размерами. Обращаясь вновь к случаю иодидного транспорта германия в системе GeI_2 — GeI_4 (условия роста те же, что и ранее), найдем, что если при $r_0 = 0{,}2$ см отношение $\tau_v/\tau_r \simeq 500$, то при $r_0 = 2$ см продолжительности обеих стадий уже соизмеримы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аладьев С. И.** Скорость роста кристаллов из парогазовой среды // ПМТФ.— 1985.— № 4.
2. **Аладьев С. И.** Поток вещества на поверхность кристалла при турбулентной естественной конвекции // ПМТФ.— 1986.— № 4.
3. **Аладьев С. И.** К вопросу о скорости роста кристаллов на Земле и в невесомости // Космич. исслед.— 1986.— Т. 24, № 6.
4. **Френкель Я. И.** Кинетическая теория жидкостей. Собр. избранных трудов. Т. 3.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959.
5. **Чернов А. А.** Слоисто-спиральный рост кристаллов // УФН.— 1961.— Т. 73, вып. 2.
6. **Калдис Э.** Принципы выращивания кристаллов из паровой фазы // Рост кристаллов.— М.: Мир, 1977.
7. **Шефер Г.** Химические транспортные реакции. Транспорт неорганических веществ через газовую фазу и его применение.— М.: Мир, 1964.
8. **Аладьев С. И.** Об однородности распределения примесей в кристаллах при турбулентной естественной конвекции // ИФЖ.— 1988.— Т. 55, № 4.

г. Москва *Поступила 29/III 1989 г.*

УДК 536.25

А. Е. Редников, Ю. С. Рязанцев

К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ КАПЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАПИЛЛЯРНЫХ И МАССОВЫХ СИЛ

В [1] в стоксовом приближении рассмотрена задача о нестационарном дрейфе капли под действием изменяющихся со временем термокапиллярных и массовых сил, когда на бесконечности задан постоянный градиент температуры. Считалось, что движение начинается из состояния покоя жидкостей и обладает аксиальной симметрией.

При решении тепловой задачи в [1] предполагалась малость чисел Пекле. Поэтому поле температуры и вызываемое им распределение коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности капли оказывались не зависящими от движения жидкостей. Аналогично такая же независимость будет иметь место в общем случае полей температуры и концентрации (или любого другого фактора, от которого, вообще говоря, зависит поверхностное натяжение), когда числа Пекле малы и можно пренебречь конвективным переносом тепла или вещества. Формализуя данное обстоятельство, как это сделано в [2] для стационарного случая, в настоящей работе рассматриваем нестационарный дрейф капли, когда коэффициент поверхностного натяжения задан как известная функция точек поверхности капли и времени. Осесимметричность при этом не предполагается, и выводимое здесь в стоксовом приближении интегродифференциальное уравнение для скорости движения центра масс капли будет иметь векторную форму. При применении полученных результатов эта функция поверхностного натяжения должна вычисляться в каждом конкретном случае.

Пусть капля вязкой несжимаемой жидкости находится в другой вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Рассмотрим задачу о нестационарном движении капли под действием массовых и капиллярных сил. Считается, что массовая сила обусловлена гравитационным полем с ускорением $\mathbf{g}(t)$, произвольно изменяющимся со временем t как по величине, так и по направлению. Коэффициент поверхностного натяжения задается как функция $\sigma(t, \theta, \varphi)$ координат θ, φ на поверхности капли и времени, непостоянство которой приводит к появлению капиллярных сил.

При решении используется стоксово приближение и считается, что движение начинается из состояния покоя жидкостей, плотности ρ_i и динамические вязкости μ_i жидкостей постоянны (здесь и в дальнейшем индексы $i = 1,2$ относятся к внешней жидкости и к капле соответственно). Предполагается, что поверхностное натяжение достаточно велико, так что форма капли лишь незначительно отклоняется от сферической. При этом, в частности, $\sigma^0 \gg \sigma'$, где σ^0 — порядок величины, а σ' — порядок изменения коэффициента поверхностного натяжения на поверхности капли (обе эти величины определяются функцией $\sigma(t, \theta, \varphi)$).

Рассмотрение проводится в неинерциальной системе отсчета, поступательно движущейся вместе с центром масс капли. От него отсчитывается радиус r в используемой здесь сферической системе координат (r, θ, φ) (θ, φ — меридиональный и азимутальный углы).

При математической формулировке задачи используем следующее обезразмеривание. Выберем радиус капли a за масштаб расстояния, величину σ'/μ_1 — скорости, $\rho_1 a^2/\mu_1$ — времени, σ'/a — давления. Вместо ускорения силы тяжести $\mathbf{g}(t)$ введем безразмерную величину $\eta(t) = \rho_1 \times a^2\mathbf{g}/\sigma'$. Для обезразмеренных времени и радиуса используем прежние обозначения. Тогда в безразмерных переменных уравнения, граничные и начальные условия для радиальной компоненты поля скорости u_{ir} и давления p_i $(i = 1,2)$ представятся в виде

$$\frac{\partial u_{1r}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\Delta(ru_{1r}); \tag{1}$$

$$\nu^{-1}\frac{\partial u_{2r}}{\partial t} = -\beta^{-1}\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\Delta(ru_{2r}); \tag{2}$$

$$\Delta p_i = 0 \quad (i = 1,2); \tag{3}$$

$$r \to \infty, \quad u_{1r} \to -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_r), \quad p_1 \to 0; \tag{4}$$

$$r \to 0, \quad u_{2r} < \infty, \quad p_2 < \infty; \tag{5}$$

$$r = 1, \quad u_{1r} = u_{2r} = 0; \tag{6}$$

$$\partial(r^2u_{1r})/\partial r = \partial(r^2u_{2r})/\partial r; \tag{7}$$

$$(2\partial/\partial r - \partial^2/\partial r^2)\{r^2(u_{1r} - \beta u_{2r})\} + \Delta_\Gamma\gamma = 0; \tag{8}$$

$$\int\limits_{\Gamma_1}\left\{-p_1 + p_2 + (\rho - 1)\left(\eta - \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\cdot\mathbf{e}_r + 2\frac{\partial}{\partial r}(u_{1r} - \beta u_{2r}) - 2\gamma\right\}\Phi_1\,d\Gamma = 0; \tag{9}$$

(10) $$t = 0,\ u_{ir} = 0\ (i = 1{,}2),\ \mathbf{u} = 0,$$
$$\rho = \rho_2/\rho_1,\ \beta = \mu_2/\mu_1,\ \nu = \nu_2/\nu_1,\ \nu_i = \mu_i/\rho_i \quad (i = 1{,}2).$$

Уравнения (1), (2) представляют собой нестационарные уравнения Стокса для радиальной компоненты скорости; при этом угловые компоненты $u_{i\theta}$, $u_{i\varphi}$ уже исключены из них при помощи уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости

(11) $$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_{ir}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta u_{i\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_{i\varphi}}{\partial\varphi} = 0.$$

Уравнения (3) получаются при взятии дивергенции от обеих частей нестационарных уравнений Стокса и учете (11). Поведение на бесконечности отражено в условии (4), где $\mathbf{u}(t)$ — безразмерная скорость движения капли, а $\mathbf{e}_r$ — радиальный орт. Отсутствие особенностей в начале координат отмечено в (5.) Граничные условия на поверхности капли представлены в (6)—(9).

Условие (7), а также (8), в котором $\gamma = (\sigma(t, \theta, \varphi) - \sigma^0)/\sigma'$, а оператор Δ_Γ — угловая часть лапласиана, получены следующим образом. Запишем условия непрерывности касательных компонент скорости и касательных напряжений на поверхности капли:

(12) $$u_{1\theta} = u_{2\theta},\ \left(\frac{\partial u_{1r}}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{1\theta}}{\partial r} - u_{1\theta}\right) - \beta\left(\frac{\partial u_{2r}}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial r} - u_{2\theta}\right) + \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = 0;$$

(13) $$u_{1\varphi} = u_{2\varphi},\ \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{1r}}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial r} - u_{1\varphi}\right) - \beta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_{2r}}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial r} - u_{2\varphi}\right) + {}$$
$$+ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi} = 0.$$

Применим к равенствам (12) оператор $(\sin\theta)^{-1}(\partial/\partial\theta)\sin\theta$, а к (13) — оператор $(\sin\theta)^{-1}\partial/\partial\varphi$ и результаты попарно сложим. Затем, исключив угловые компоненты скорости при помощи (11), при учете (6) получим (7) и (8).

В граничном условии баланса нормальных напряжений (9) производится умножение на произвольную шаровую функцию первого порядка $\Phi_1(\theta, \varphi)$ и интегрирование по всей поверхности капли Γ_1 ($d\Gamma = \sin\theta \times \times d\theta d\varphi$). Смысл такого интегрирования состоит в следующем. Поскольку в данной работе пренебрегается отклонением формы капли от сферической, граничное условие для нормальных напряжений следует опустить, заменив его более грубым условием баланса сил, действующих на каплю как целое (как, в частности, сделано в [3]), что в известной мере эквивалентно проводимому здесь интегрированию (при подсчете действующей на каплю силы также нужно проводить интегрирование напряжений по всей поверхности капли).

Однако если все-таки записывать непосредственно условие для нормальных напряжений, то в него неизбежно должен быть включен в качестве слагаемого член, пропорциональный отклонению $\varepsilon(\theta, \varphi)$ формы капли от сферической $r = 1$ (см., например, [3]). В разложении этого члена по шаровым функциям

(14) $$\Phi_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{nk}\cos k\varphi + b_{nk}\sin k\varphi)P_n^k(\cos\theta) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $P_n^k(z)$ — присоединенная функция Лежандра, должны отсутствовать функции нулевого ($n = 0$) и первого ($n = 1$) порядков, поскольку объем капли при деформации не изменяется, а начало координат по-прежнему остается в центре масс капли. Поэтому при проведении такого, как в (9), интегрирования член, отвечающий за отклонение формы от сферической, исчезает и запись (9) полностью корректна. Отметим, что для настоящего рассмотрения условие (9) более удобно, чем условие баланса сил, действующих на каплю как целое, которым обычно пользуются при таких обстоятельствах. То, что движение начинается из состояния покоя, выражено в начальных условиях (10).

Главная цель данной работы — выразить скорость движения капли $\mathbf{u}(t)$ через известные характеристики массовых и капиллярных сил $\mathbf{g}(t)$ и $\sigma(t, \theta, \varphi)$, что осуществляется путем решения задачи (1)—(10). Для достижения этой цели вовсе не обязательно, как видно из дальнейшего, находить поле скорости в завершенном виде. Например, можно совсем не рассматривать угловые компоненты скорости, а ограничиться только радиальной компонентой и давлением, для которых и сформулирована задача (1)—(10).

Обозначим изображения по Лапласу от всех зависящих от времени и входящих в (1)—(9) функций прежними символами со звездочкой наверху. При этом вместо времени t данные функции будут зависеть от параметра преобразования Лапласа s.

Учитывая начальные условия (10), из (1)—(9) получим следующую задачу для изображений:

$$su_{1r}^* = -\frac{\partial p_1^*}{\partial r} + \frac{1}{r}\Delta\left(ru_{1r}^*\right), \tag{15}$$

$$\nu^{-1}su_{2r}^* = -\beta^{-1}\frac{\partial p_2^*}{\partial r} + \frac{1}{r}\Delta\left(ru_{2r}^*\right),\ \Delta p_i^* = 0 \quad (i = 1,\ 2);$$

$$r \to \infty,\ u_{1r}^* \to \Phi_1^{(u)},\ p_1^* \to 0, \tag{16}$$

$$r \to 0,\ u_{2r}^* < \infty,\ p_2^* < \infty,\ r = 1,\ u_{1r}^* = u_{2r}^* = 0,$$

$$\partial\left(r^2u_{1r}^*\right)/\partial r = \partial\left(r^2u_{2r}^*\right)/\partial r,$$

$$(2\partial/\partial r - \partial^2/\partial r^2)\left\{r^2\left(u_{1r}^* - \beta u_{2r}^*\right)\right\} + \Delta_\Gamma\gamma^* = 0;$$

$$\int\limits_{\Gamma_1}\left\{-p_1^* + p_2^* + (\rho - 1)\left(s\Phi_1^{(u)} + \Phi_1^{(\eta)}\right) + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(u_{1r}^* - \beta u_{2r}^*\right) - 2\gamma^*\right\}\Phi_1\,d\Gamma = 0. \tag{17}$$

Появившиеся в (16), (17) шаровые функции первого порядка определяются соотношениями

$$\Phi_1^{(u)} = -\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{e}_r,\ \Phi_1^{(\eta)} = \eta^*\cdot\mathbf{e}_r.$$

Решение уравнений (15), не обладающее особенностями на оси сферической системы координат, ищется в виде разложения по шаровым функциям (14). При этом, как видно из граничного условия (17), для определения искомой зависимости между $\mathbf{u}(t)$, $\eta(t)$ и $\gamma(t, \theta, \varphi)$ достаточно рассмотреть только одну составляющую полного решения, соответствующую моде с $n = 1$. Решение уравнений (15) для этой моды, удовлетворяющее граничным условиям (16), имеет вид

$$u_{1r}^* = \left(1 + a_1\frac{1}{r}G\left(\sqrt{s}\,r\right) + \frac{a_2}{r^3}\right)\Phi_1^{(u)} + \left(a_1'\frac{1}{r}G\left(\sqrt{s}\,r\right) + \frac{a_2'}{r^3}\right)\Phi_1^{(\gamma)}, \tag{18}$$

$$u_{2r}^* = \left(b_1 + b_2\frac{1}{r}F\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\,r\right)\right)\Phi_1^{(u)} + \left(b_1' + b_2'\frac{1}{r}F\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\,r\right)\right)\Phi_1^{(\gamma)},$$

$$p_1^* = \left(-sr + \frac{sa_2}{2}\frac{1}{r^2}\right)\Phi_1^{(u)} + \frac{sa_2'}{2}\frac{1}{r^2}\Phi_1^{(\gamma)},$$

$$p_2^* = -\rho sb_1r\Phi_1^{(u)} - \rho sb_1'r\Phi_1^{(\gamma)},$$

где постоянные a_1, a_2, a_1', a_2', b_1, b_2, b_1', b_2' определяются соотношениями

$$a_2 = -1 - a_1G\left(\sqrt{s}\right),\ a_2' = -a_1'G\left(\sqrt{s}\right),\ b_1 = -b_2F\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\right), \tag{19}$$

$$b_1' = -b_2'F\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\right),$$

$$a_1 = -3\exp\left(\sqrt{s}\right)\frac{2 + \beta H\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\right)}{3 + \sqrt{s} + \beta H\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\right)},$$

$$a_1' = \exp(\sqrt{s})\frac{2}{3+\sqrt{s}+\beta H(\sqrt{\nu^{-1}s})},$$

$$b_2 = \frac{3(1+\sqrt{s})}{\left(3+\sqrt{s}+\beta H(\sqrt{\nu^{-1}s})\right)\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\,F'(\sqrt{\nu^{-1}s})-F(\sqrt{\nu^{-1}s})\right)},$$

$$b_2' = \frac{2}{\left(3+\sqrt{s}+\beta H(\sqrt{\nu^{-1}s})\right)\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\,F'(\sqrt{\nu^{-1}s})-F(\sqrt{\nu^{-1}s})\right)}.$$

Функция $\Phi_1^{(\gamma)}$ возникает при разложении γ^* по шаровым функциям как соответствующая моде с номером $n = 1$ этого разложения. Входящие в (18) и (19) функции F, G, H определяются так же, как и в [1]:

$$F(z) = \left(\frac{\operatorname{sh} z}{z}\right)_z' = \frac{\operatorname{ch} z}{z} - \frac{\operatorname{sh} z}{z^2}, \quad G(z) = \left(\frac{e^{-z}}{z}\right)_z' = -e^{-z}\left(1+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z},$$

$$H(z) = \frac{z^2 F''(z)}{zF'(z)-F(z)}.$$

Подстановка в (17) решений (18) с учетом (19) приводит к соотношению

$$(20) \qquad 0 = \left(\frac{1}{2}+\rho\right)s\Phi_1^{(u)} + B^*(s)\,\Phi_1^{(u)} - C^*(s)\,\Phi_1^{(\gamma)} + (\rho-1)\,\Phi_1^{(\eta)}.$$

Домножим выражение в (20) на r и возьмем от него градиент. При этом, используя тождества, которые легко можно доказать, исходя из свойств сферических функций

$$\nabla\left(r\Phi_1^{(u)}\right) = -\mathbf{u}^*, \quad \nabla\left(r\Phi_1^{(\eta)}\right) = \boldsymbol{\eta}^*, \quad \nabla\left(r\Phi_1^{(\gamma)}\right) = \frac{3}{8\pi}\int_{\Gamma_1}\nabla_\Gamma\gamma^*\,d\Gamma$$

(∇_Γ — оператор поверхностного градиента), окончательно приходим к соотношению

$$(21) \quad 0 = -\left(\frac{1}{2}+\rho\right)s\mathbf{u}^* - B^*(s)\,\mathbf{u}^* - C^*(s)\frac{3}{8\pi}\int_{\Gamma_1}\nabla_\Gamma\gamma^*\,d\Gamma + (\rho-1)\,\boldsymbol{\eta}^*.$$

Здесь коэффициенты $B^*(s)$, $C^*(s)$ определены так же, как и в [1]:

$$C^*(s) = \frac{3(1+\sqrt{s})}{3+\sqrt{s}+\beta H(\sqrt{\nu^{-1}s})}, \quad B^*(s) = \frac{3}{2}\left(2+\beta H\left(\sqrt{\nu^{-1}s}\right)\right)C^*(s).$$

Если задача ставится так, что нужно найти скорость движения капли под действием известных массовых и капиллярных сил, то выражение (21) удобно переписать в виде

$$(22) \quad \mathbf{u}^*(s) = \left[-C^*(s)\frac{3}{8\pi}\int_{\Gamma_1}\nabla_\Gamma\gamma^*\,d\Gamma + (\rho-1)\,\boldsymbol{\eta}^*\right]\left[\left(\frac{1}{2}+\rho\right)s + B^*(s)\right]^{-1}$$

и определение движения сводится к восстановлению оригинала по изображению (22).

Перейдем в (21) к оригиналам и придадим получаемому прп этом соотношению вид второго закона Ньютона

$$(23) \qquad \rho\mathbf{u}'(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}'(t) - \int_0^t b(t-t_1)\,\mathbf{u}'(t_1)\,dt_1 - \frac{3}{2}\frac{2+3\beta}{1+\beta}\mathbf{u}(t) -$$

$$- \frac{9}{8\pi(1+\rho\sqrt{\nu})}\int_{\Gamma_1}\nabla_\Gamma\gamma(t)\,d\Gamma - \frac{3}{8\pi}\int_0^t c(t-t_1)\left\{\int_{\Gamma_1}\nabla_\Gamma\gamma(t_1)\,d\Gamma\right\}dt_1 + (\rho-1)\,\boldsymbol{\eta}(t),$$

где, как и в [1], коэффициенты $B^*(s)$ и $C^*(s)$ с учетом их асимптотики при $s \to \infty$ представлены в виде

$$B^*(s) = B^*(0) + sb^*(s),\ C^*(s) = C^*(\infty) + c^*(s),$$
$$B^*(0) = \frac{3}{2}\frac{2+3\beta}{1+\beta},\ C^*(\infty) = \frac{3}{1+\rho\sqrt{\nu}}.$$

Следуя [1], отметим, что асимптотика оригиналов таким образом введенных функций $b^*(s)$, $c^*(s)$ при $t \to 0$ будет

$$b(t) = \frac{9}{2}\frac{\rho\sqrt{\nu}}{1+\rho\sqrt{\nu}}\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O(1),\ c(t) = \frac{3(\rho\sqrt{\nu}-2)}{(1+\rho\sqrt{\nu})^2}\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O(1),$$

при $t \to \infty$

$$b(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2+3\beta}{1+\beta}\right)^2\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O\left(t^{-3/2}\right),\ c(t) = -\frac{2+3\beta}{6(1+\beta)^2}\frac{1}{\sqrt{\pi t^3}} + O\left(t^{-5/2}\right).$$

Соотношение (23) представляет собой интегродифференциальное уравнение для движения капли.

В частных по отношению к капле случаях твердого шарика и пузыря выражения несколько упрощаются. Так, можно явно выписать оригиналы $b(t)$, $c(t)$, а интегродифференциальное уравнение свести к дифференциальному. Обсуждение всех этих вопросов можно найти в [1]. В рассматриваемой ситуации все будет аналогично.

Как уже отмечалось, уравнение (23) записано в форме второго закона Ньютона (в безразмерном виде). В левой части (23) стоит произведение массы капли на ее ускорение, а в правой — действующие на каплю силы. Чтобы более наглядно представить себе эти силы, перейдем в (23) к размерным переменным, произведем домножение на $4\pi/3$ и получим

$$\frac{4\pi}{3}\rho_2 a^3\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{2\pi}{3}\rho_1 a^3\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{4\pi}{3}\mu_1 a\int_0^t b\left(\frac{\nu_1(t-t_1)}{a^2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t_1)\,dt_1 - \tag{24}$$
$$-2\pi\mu_1 a\frac{2+3\beta}{1+\beta}\mathbf{u} - \frac{3}{2(1+\rho\sqrt{\nu})}\int_{\Gamma_a}\nabla_\Gamma\sigma\,d\Gamma - \frac{\nu_1}{2a^2}\int_0^t c\left(\frac{\nu_1(t-t_1)}{a^2}\right)\times$$
$$\times\left\{\int_{\Gamma_a}\nabla_\Gamma\sigma(t_1)\,d\Gamma\right\}dt_1 + \frac{4\pi}{3}(\rho_2-\rho_1)a^3\mathbf{g},$$

где для размерных скорости, времени и элемента площади ($d\Gamma = a^2\sin\theta d\theta d\varphi$) использованы прежние обозначения.

Первое слагаемое в правой части (24) является силой за счет эффекта присоединенных масс, второе — силой Бассе, третье — силой Стокса, сумма четвертого и пятого — капиллярной силой, шестое — суммой силы тяжести и выталкивающей силы. Отметим, что в отличие от [1] здесь данное соотношение имеет существенно векторный характер.

Далее рассмотрим случай, когда гравитационное поле $\mathbf{g}(t)$ и распределение коэффициента поверхностного натяжения $\sigma(t, \theta, \varphi)$ при $t \to \infty$ приходят к неким стационарным значениям $\mathbf{g}$ и $\sigma(\theta, \varphi)$, т. е.

$$\lim_{s\to 0} s\mathbf{g}^*(s) = \mathbf{g},\ \lim_{s\to 0} s\sigma^*(s, \theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi). \tag{25}$$

При этом интересно найти стационарные пределы выражений, например, для капиллярной силы и скорости движения капли. Умножив изображения этих величин (в безразмерном виде это (22) и капиллярные слагаемые в (21)) на s и взяв пределы $s \to 0$, при учете (25) получим (в размерном виде)

$$\mathbf{F}_k = -\frac{1}{2(1+\beta)} \int\limits_{\Gamma_a} \nabla_\Gamma \sigma \, d\Gamma; \tag{26}$$

$$\mathbf{u} = \frac{2(1+\beta)(\rho_2-\rho_1)a^2}{3(2+3\beta)\mu_1}\mathbf{g} - \frac{1}{4\pi a\mu_1(2+3\beta)} \int\limits_{\Gamma_a} \nabla_\Gamma \sigma \, d\Gamma. \tag{27}$$

Выражение для стационарной капиллярной силы (26) полностью совпадает с полученным в [2].

Для искушенного читателя отметим, что в принципе полученные здесь основные результаты при помощи достаточно простого обобщающего рассуждения, в основе которого лежат линейность задачи и важность лишь одной моды решения для описания движения центра масс капли, можно было бы записать непосредственно, исходя из формул (5.1), (5.2) работы [1], рассмотрев независимо движение вдоль каждой из трех взаимно перпендикулярных координатных осей. Однако авторы предпочли не идти таким путем.

Если распределение коэффициента поверхностного натяжения $\sigma(\theta, \varphi)$ и гравитационное поле $\mathbf{g}$ с самого начала принимают постоянные во времени значения, то оригинал выражения (22) может быть проанализирован несколько более детально в некоторых предельных случаях (см. [4, § 5, гл. 4]).

Далее, следуя Ландау и Лифшицу ([5, задача 7, § 24]), рассмотрим задачу без начальных условий. В применении к исследуемой в данной работе ситуации она может быть сформулирована так: найти силу сопротивления (или, здесь лучше сказать, гидродинамическую силу), действующую на каплю, если скорость капли и распределение коэффициента поверхностного натяжения есть заданные функции времени $\mathbf{u}(t_1)$ и $\sigma(t_1, \theta, \varphi)$ при $-\infty < t_1 < t$. Ответ сразу может быть выписан на основании правой части (24):

$$\mathbf{F} = -\frac{2\pi}{3}\rho_1 a^3 \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{4\pi}{3}\mu_1 a \int\limits_{-\infty}^{t} b\left(\frac{\nu_1(t-t_1)}{a^2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t_1)\, dt_1 - 2\pi\mu_1 a \frac{2+3\beta}{1+\beta}\mathbf{u} -$$
$$- \frac{3}{2(1+\rho\sqrt{\nu})} \int\limits_{\Gamma_a} \nabla_\Gamma \sigma \, d\Gamma - \frac{\nu_1}{2a^2} \int\limits_{-\infty}^{t} c\left(\frac{\nu_1(t-t_1)}{a^2}\right)\left\{\int\limits_{\Gamma_a} \nabla_\Gamma \sigma(t_1)\, d\Gamma\right\} dt_1. \tag{28}$$

Соотношение (28) является в известном смысле обобщением соответствующей формулы в [5].

Если непостоянство поверхностного натяжения вызвано неоднородными полями температуры, концентрации и т. п., то можно провести дальнейшую конкретизацию полученных результатов, находя эти поля и зная вид термодинамической зависимости коэффициента поверхностного натяжения. Здесь существенно, что числа Пекле малы, т. е. распределения температуры, концентрации и т. п., а значит, и поверхностного натяжения не зависят от движения жидкостей — иначе настоящее рассмотрение неправомерно. Таким способом из результатов данной работы можно найти, например, результаты [1], а также соответствующие результаты для нестационарного термокапиллярного движения капли под действием излучения (что в стационарной постановке исследовано в [3]) и для нестационарного термокапиллярного движения капли во внешнем постоянном градиенте температуры при нелинейной температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения (что в квазистационарном приближении рассмотрено в [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антановский Л. К., Копбосынов Б. К.** Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 2.
2. **Subramanian R. S.** The Stokes force on a droplet in an unbounded fluid medium due to capillary effects // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 153.
3. **Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.** О термокапиллярном движении капли под действием излучения // ПМТФ.— 1989.— № 2.
4. **Повицкий А. С., Любин Л. Я.** Основы динамики и тепломассообмена жидкостей и газов при невесомости.— М.: Машиностроение, 1972.
5. **Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
6. **Гупало Ю. П., Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.** Термокапиллярный дрейф капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // ПММ.— 1989.— Т. 53, № 3.

г. Москва *Поступила 13/III 1990 г.*

УДК 532.529.6

П. К. Волков

ВСПЛЫВАНИЕ ПУЗЫРЯ В ВОСХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ

В современных теплообменных аппаратах, трубопроводах и капиллярах происходит движение жидкости, содержащей разного размера пузыри растворенных газов или пара. Вынужденное движение жидкости (прокачивание) осуществляется либо путем создания разности давлений на концах трубы, либо с помощью насосов. В первом случае говорят, что течение происходит при заданном перепаде давления (расход неизвестен и является определяемым параметром), во втором — при заданном расходе (перепад давления должен быть найден при решении задачи). С математической точки зрения, как правило, эти две постановки эквивалентны в том смысле, что если решена задача с заданным расходом, то можно вычислить перепад давления. И если теперь решить задачу с найденным перепадом давления, то получим исходный расход [1].

Теоретическое исследование локальных характеристик движущейся в трубе жидкости при всплытии газового пузыря представляет значительные трудности, обусловленные тем, что имеется течение со свободной поверхностью, которая заранее неизвестна и должна быть определена одновременно с функциями течения. Экспериментальные данные [2—4] весьма малочисленны и дают лишь некоторое качественное представление о процессе. Учитывая, что в задаче содержится более трех независимых входных параметров, обобщить результаты экспериментов в настоящее время невозможно. Пожалуй, только численное решение уравнений Навье — Стокса позволит дать полную картину течения около деформируемого пузыря. В [5] изложен алгоритм численного решения полных уравнений Навье — Стокса, описывающих всплытие газового пузыря в вертикальной трубе, заполненной покоящейся жидкостью. Анализ полученных решений и карты режимов течений для широкого набора входных параметров даны в [6]. В настоящей работе приводятся результаты расчетов стационарного всплытия пузыря в жидкости, имеющей вдали от него параболический профиль скорости по сечению трубы.

1. Постановка задачи. Пусть имеем вертикальную трубу, заполненную вязкой жидкостью, движущейся снизу вверх. Ускорение силы тяжести g направлено сверху вниз. Если запустить пузырь газа в трубу, то он будет всплывать под действием силы Архимеда и сноситься потоком движущейся жидкости. И если на некотором участке своего движения он не изменяет существенно объем, форму, скорость, то считаем, что осуществляется стационарное всплытие. В системе координат, связанной со стенками трубы, скорость всплытия u, очевидно, больше скорости всплытия пузыря в покоящейся жидкости u_0 и зависит от величины прокачиваемого расхода, течения около пузыря и его формы. Считаем, что вдали от пузыря вверх и вниз по трубе устанавливается течение Пуазейля, характеризуемое одним параметром, например максимальным значением скорости u_n на оси.

Математическое описание удобно проводить в системе координат, связанной с пузырем. В этом случае пузырь покоится, а стенки трубы и жидкость движутся сверху вниз (рис. 1). В сферической системе коор-