

УДК 532.526

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

С. А. Гапонов, А. В. Юдин

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследованы возмущения, возникающие в сверхзвуковом пограничном слое под влиянием внешней завихренности потока. Показано, что наряду с вихревыми большую роль играют безвихревые волны. Расчеты проведены для дозвукового течения и сверхзвукового потока при числе Маха  $M = 2$ .

**Введение.** В настоящее время при решении задач о возникновении турбулентности в пограничных слоях большое значение имеют исследования их восприимчивости к внешним возмущениям. В этом случае речь идет о возбуждении возмущений в пограничных слоях под влиянием стационарных и нестационарных воздействий (вибрация поверхности, акустические волны, внешняя турбулентность и т. д.). Одним из первых рассмотрел эту задачу и ввел термин “восприимчивость” М. В. Морковин [1]. В настоящее время существует большое количество экспериментальных и теоретических исследований восприимчивости дозвуковых пограничных слоев. Подробный их обзор имеется в [2, 3]. Существенно меньше изучена восприимчивость сверхзвукового пограничного слоя, причем все работы в этом направлении посвящены исследованию взаимодействия акустических волн с пограничным слоем [4–6]. В сверхзвуковом потоке наряду с акустическими возмущениями могут существовать вихревые и энтропийные, или тепловые волны. Взаимодействие последних со сверхзвуковым пограничным слоем до настоящего времени не изучалось. В случае дозвуковых скоростей проблема восприимчивости вихревых возмущений анализировалась в литературе, однако единой точки зрения на механизмы возникновения возмущений в пограничном слое нет. В данной работе проведены расчеты возбуждения стационарных и нестационарных волн в дозвуковом и сверхзвуковом пограничных слоях под влиянием внешних гидродинамических возмущений.

**Постановка задачи и основные уравнения.** Рассматривается линейная постановка. В качестве исходного невозмущенного потока принимается течение сжимаемого газа в пограничном слое на плоской пластине.

Следуя [7], возмущения в пограничном слое рассмотрим в ортогональной системе координат  $(\xi, \psi, z)$ , связанной с поверхностями тока основного течения. Здесь  $\psi$  — функция тока; для пластины  $\xi = x + O(\text{Re}^{-2})$ ;  $\text{Re} = \sqrt{u_\infty x / \nu_\infty}$  — число Рейнольдса;  $u_\infty, \nu_\infty$  — скорость и кинематическая вязкость набегающего потока;  $x, y, z$  — продольная, нормальная к стенке и трансверсальная координаты декартовой системы с началом на кромке пластины. Газ совершенный с постоянным числом Прандтля  $\text{Pr}$ . Используя, как и в [8], оценки по целым степеням числа Рейнольдса  $\text{Re}$  и отбрасывая члены порядка  $\text{Re}^{-2}$  относительно главных членов линеаризованных уравнений Навье — Стокса [7] для возмущений вида

$\tilde{a}(\xi, \psi) \exp(i\alpha\xi + i\beta z - i\omega t)$ , получим

$$\begin{aligned} \partial_2 \tilde{v} &= -(\partial_2 \ln \rho) \tilde{v} - [i\alpha - (\partial_1 \ln u) + \partial_1] \tilde{u} - i\beta \tilde{w} - u_c \tilde{\rho} / \rho - g_m u \partial_1 \tilde{p} + u \partial_1 (\tilde{T} / T), \\ \partial_2 [\tilde{p} + 2\mu(i\alpha \tilde{u} + i\beta \tilde{w} - 2\tilde{e}_0/3)] &= -\rho(h_1 u + d_t) \tilde{v} + i\alpha \tilde{\tau}_{12} + i\beta \tilde{\tau}_{23}, \\ \partial_2 \tilde{\tau}_{12} &= (i\alpha + \partial_1) \tilde{p} + \rho(\partial_2 u) \tilde{v} + \rho(\partial_1 u + d_t) \tilde{u} + u(\partial_1 u) \tilde{\rho} - i\alpha \tilde{\tau}_{11} - i\beta \tilde{\tau}_{13}, \\ \partial_2 \tilde{u} &= -(i\alpha + \partial_1) \tilde{v} - (\partial_2 u) \tilde{\mu} / \mu + \tilde{\tau}_{12} / \mu, \\ \partial_2 \tilde{\tau}_{23} &= i\beta \tilde{p} + \rho d_t \tilde{w} - i\alpha \tilde{\tau}_{13} - i\beta \tilde{\tau}_{33}, \quad \partial_2 \tilde{w} = -i\beta \tilde{v} + \tilde{\tau}_{23} / \mu, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \tilde{q} &= i\omega \tilde{p} + [\rho(\partial_2 H) - i\alpha \mu(\partial_2 u)] \tilde{v} + (\partial_1 H)(\rho \tilde{u} + u \tilde{\rho}) + (\alpha^2 + \beta^2) \mu \tilde{h} / \text{Pr} + \rho d_t \tilde{H} - u(i\alpha \tilde{\tau}_{11} + i\beta \tilde{\tau}_{13}), \\ \partial_2 \tilde{h} &= -\text{Pr}(\partial_2 u) \tilde{u} - (\partial_2 h) \tilde{\mu} / \mu + \text{Pr}(\tilde{q} - u \tilde{\tau}_{12}) / \mu, \end{aligned}$$

где  $\partial_1 = \partial / \partial \xi$ ;  $\partial_2 = \rho u \partial / \partial \psi$ ;  $d_t = u_c + u \partial_1$ ;  $u_c = i\alpha u - i\omega$ ;  $h_1 = -\partial_1 \ln(\rho u)$ ;  $\tilde{\tau}_{11} = 2\mu(i\alpha \tilde{u} - \tilde{e}_0/3)$ ;  $\tilde{\tau}_{13} = \mu(i\alpha \tilde{w} + i\beta \tilde{u})$ ;  $\tilde{\tau}_{33} = 2\mu(i\beta \tilde{w} - \tilde{e}_0/3)$ ;  $\tilde{e}_0 = -(\partial_2 \ln \rho) \tilde{v} - u_c \tilde{\rho} / \rho$ ;  $u$  — скорость;  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность;  $H = h + u^2/2$  — полная энтальпия;  $\mu$  — вязкость;  $\tilde{p}$  — давление;  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  — комплексные амплитуды нормальной к поверхности тока и трансверсальной составляющих возмущения скорости;  $\tilde{\rho} / \rho = g_m \tilde{p} - \tilde{T} / T$ ;  $\tilde{T} = g_{m1} \tilde{h}$ ;  $\tilde{H} = \tilde{h} + u \tilde{u}$ ;  $g_m = 1/p$ ;  $g_{m1} = 1/c_p$ ;  $c_p$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении. Вид уравнений не изменится при обезразмеривании с помощью следующих масштабов:  $\nu_\infty / u_\infty$  — длина,  $\nu_\infty / u_\infty^2$  — время,  $\mu_\infty$  — вязкость и функция тока,  $u_\infty$  — скорость и ее возмущения,  $T_\infty$  — температура,  $\rho_\infty$  — плотность,  $u_\infty^2$  — энтальпия,  $\rho_\infty u_\infty^2$  — давление и возмущения вязких напряжений,  $\rho_\infty u_\infty^3$  — величина  $\tilde{q}$ ,  $u_\infty^2 / T_\infty$  — удельная теплоемкость (индекс  $\infty$  соответствует значениям в набегающем потоке). В этом случае  $g_m = \gamma M^2$ ,  $g_{m1} = (\gamma - 1) M^2$ , где  $\gamma = c_p / c_v$  — отношение теплоемкостей;  $M$  — число Маха.

Произведем замену независимых переменных:  $\text{Re} = \sqrt{\xi}$ ,  $d\eta = df / u$ ,  $f = \psi / \text{Re}$ . Тогда  $\partial_1 \tilde{a} = (1 / \text{Re})(\partial \tilde{a} + f_1 \tilde{a}')$ ,  $\partial_2 \tilde{a} = \rho \tilde{a}' / \text{Re}$ , где  $\partial = 0,5 \partial / \partial \text{Re}$ ; штрих обозначает производную по  $\eta$ ;  $f_1 = -f / (2 \text{Re} u)$ . В этом случае уравнения, основанные на оценках критического слоя, имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}' &= -g_m u T \partial \tilde{p} + \rho T' \tilde{v} - T(f_0 u' + \partial) \tilde{u} - \tilde{u}_w - i_c T \tilde{r} - (f_2 \rho T' - u \partial) \tilde{T} - f_1 T \tilde{u}' + f_2 \tilde{T}', \\ \tilde{p}' &= -(i_c + r_h u) \tilde{v} + i_x \tilde{\tau}_{12} + i_z \tilde{\tau}_{23} - 2\mu_r \tilde{u}'_w, \\ \tilde{\tau}'_{12} &= (i_x + T \partial) \tilde{p} + \rho u' \tilde{v} + (i_c + f_1 u' + u \partial) \tilde{u} + f_2 u' \tilde{r} - \tilde{i}_t + f_2 \tilde{u}', \\ \tilde{u}' &= -i_x \tilde{v} - u' \mu_t \tilde{T} + \tilde{\tau}_{12} / \mu_r, \\ \tilde{\tau}'_{23} &= i_z \tilde{p} + (i_c - \mu_a + u \partial) \tilde{w} - i_z \mu_r \tilde{u}'_w + f_2 \tilde{w}', \quad \tilde{w}' = -i_z \tilde{v} + \tilde{\tau}_{23} / \mu_r, \\ \tilde{q}' &= i\omega \text{Re} T \tilde{p} + \rho H' \tilde{v} + (i_c u + f_1 H' + f_2 u' + u^2 \partial) \tilde{u} + (i_c - \mu_a / \text{Pr} + u \partial) \tilde{h} + f_2 H' \tilde{r} - u \tilde{i}_t + f_2 u \tilde{u}' + f_2 \tilde{h}', \\ \tilde{h}' &= -\text{Pr} u' \tilde{u} - h' \mu_t \tilde{T} + \text{Pr}(\tilde{q} - u \tilde{\tau}_{12}) / \mu_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tilde{u}_w = i_x \tilde{u} + i_z \tilde{w}$ ;  $\tilde{i}_t = i_x \mu_r \tilde{u}'_w + \mu_a \tilde{u}$ ;  $\mu_a = (i_x^2 + i_z^2) \mu_r$ ;  $\tilde{p} = \tilde{\pi} - 2\mu(i\alpha \tilde{u} + i\beta \tilde{w} - 2\tilde{e}_0/3)$ ;  $\tilde{r} = \tilde{\rho} / \rho = g_m \tilde{p} - \rho \tilde{T}$ ;  $i_c = \text{Re} u_c = i \text{Re}(u\alpha - \omega)$ ;  $i_x = i\alpha \text{Re} T$ ;  $i_z = i\beta \text{Re} T$ ;  $r_h = \text{Re} h_1 = f_0 u' + f_1 \rho T'$ ;  $f_0 = -f_1 / u$ ;  $f_2 = f_1 u$ ;  $\mu_r = \mu \rho / \text{Re}$ ;  $\mu_t = d \ln \mu / dT$ .

Системы уравнений (1) и (2) с учетом подстановок имеют вид

$$\mathbf{Z}' = (A + D \partial) \mathbf{Z}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{Z} = (\tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{h}, \tilde{\tau}_{12}, \tilde{\tau}_{23}, \tilde{q})$  в уравнениях (2);  $A, D$  — квадратные матрицы заданных функций  $\text{Re}, \eta$ .

Параболизованная система уравнений (3) решается при следующих граничных условиях. Возмущения скоростей и температуры (или теплового потока) на поверхности равны нулю:

$$\tilde{v}(0) = \tilde{u}(0) = \tilde{w}(0) = \tilde{T}(0) = 0 \quad (\tilde{T}'(0) = 0). \quad (4)$$

Вне пограничного слоя возмущения определяются соответствующими значениями в свободном (в отсутствие модели) потоке.

**Численная схема, результаты.** С использованием аппроксимации  $\partial\tilde{a}/\partial\text{Re} \approx (\tilde{a} - \tilde{a}_0)/\Delta\text{Re}$  ( $\Delta\text{Re} = \text{Re} - \text{Re}_0$  — шаг маршевой схемы; индекс 0 соответствует значениям, рассчитанным на предыдущем шаге) система (3) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{AZ} + \mathbf{B}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0). \quad (5)$$

Общим ее решением является суперпозиция четырех линейно независимых решений однородной системы и произвольного частного:  $\mathbf{Z} = \sum_{m=1}^4 C_m(x)\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_5$ . При этом коэффициенты  $C_m$  определяются из условий на поверхности (4). В качестве четырех фундаментальных решений следует выбрать те из них, которые затухают при  $\eta \rightarrow \infty$ . В качестве частного следует взять решение, описывающее внешние (не возмущенные пограничным слоем) волны. Таким образом, предполагается, что  $\mathbf{Z}_5$  известно. Для внешних акустических волн, когда  $\alpha \neq \omega$ ,  $\alpha = O(\beta)$ , в [8] четыре фундаментальных решения строились на основе теории параллельных течений:

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i\alpha \\ \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1^2 + \alpha^2 \\ \alpha\beta \\ \lambda_1^2 + \alpha^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i\beta \\ 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \alpha\beta \\ \lambda_2^2 + \beta^2 \\ \alpha\beta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} B - B^2/\text{Pr} \\ \lambda_3 B_1 \\ i\alpha B_1 \\ i\beta B_1 \\ B \\ 2i\alpha\lambda_3 B_1 \\ 2i\beta\lambda_3 B_1 \\ \lambda_3 B/\text{Pr} + 2i\alpha\lambda_3 B_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_4 = \begin{bmatrix} A - A^2/\text{Pr} \\ \lambda_4 A_1 \\ i\alpha A_1 \\ i\beta A_1 \\ A \\ 2i\alpha\lambda_4 A_1 \\ 2i\beta\lambda_4 A_1 \\ \lambda_4 A/\text{Pr} + 2i\alpha\lambda_4 A_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = (\tilde{p}, \tilde{v}, \tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{h}, \tilde{\tau}_{12}, \tilde{\tau}_{23}, \tilde{q}),$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{i(\alpha - \omega) + \lambda^2}, \quad \lambda_3 = \sqrt{Bi(\alpha - \omega) + \lambda^2},$$

$$\lambda_4 = \sqrt{Ai(\alpha - \omega) + \lambda^2}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$C = \text{Pr} + \frac{g_m i(\alpha - \omega) - (4/3)g_{m1} i(\alpha - \omega) \text{Pr}}{1 + (4/3)g_m i(\alpha - \omega)},$$

$$A = \frac{\Pr(g_m - g_{m1})i(\alpha - \omega)}{(1 + (4/3)i(\alpha - \omega))C} \left( 1 + \frac{\Pr(g_m - g_{m1})i(\alpha - \omega)}{(1 + (4/3)i(\alpha - \omega))C^2} \right),$$

$$B = C - A, \quad A_1 = g_{m1} - g_m(1 - A/\Pr), \quad B_1 = g_{m1} - g_m(1 - B/\Pr).$$

В данной работе рассматривается случай, когда внешние возмущения сносятся потоком. Для параллельного течения и пренебрежимо малой вязкости газа  $\omega = \alpha$ , поэтому вне пограничного слоя  $u_c = 0$ . В этом случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -\lambda$ , и из четырех построенных фундаментальных векторов  $\mathbf{Z}_m$  линейно независимыми являются три, например  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_3$ ,  $\mathbf{Z}_4$ . Следует отметить, что у всех этих векторов  $\tilde{p} = 0$ . В то же время можно показать, что в однородном потоке возмущение давления удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \tilde{p} = 0$ . Поэтому наряду с решениями, соответствующими  $\tilde{p} = 0$ , можно построить решение для  $\tilde{p} = \exp(-\lambda y)$ , удовлетворяющее уравнению Лапласа. При этом возмущения скорости  $\mathbf{V} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  удовлетворяют уравнению

$$\text{grad } \tilde{p} = \left( \frac{d^2}{dy^2} - \lambda^2 \right) \mathbf{V}.$$

В силу того что показатель экспоненты у  $\tilde{p}$  равен  $-\lambda$ , решение имеет вид  $\mathbf{V} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}y) \exp(-\lambda y)$ . Опуская промежуточные выкладки, приведем один из возможных векторов на внешней границе пограничного слоя:  $\mathbf{Z}_2 = (2\lambda, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Таким образом, имеем четыре линейно независимых решения на границе пограничного слоя, непрерывно переходящих в затухающие при  $y \rightarrow \infty$ .

Кроме того, на границе пограничного слоя следует задать пятый вектор  $\mathbf{Z}_5$ , соответствующий внешним возмущениям. Его можно взять в виде линейной комбинации нарастающих по  $y$  четырех линейно независимых решений, аналогичных  $\mathbf{Z}_m$ , в которых  $\lambda_m$  заменены на  $-\lambda_m$ . В основном расчеты выполнены для случая, когда в качестве  $\mathbf{Z}_5$  брался вектор безвихревых возмущений, полученный из  $\mathbf{Z}_2$  путем замены  $\lambda_2$  на  $-\lambda_2$  и нормированный на четвертую компоненту. При такой нормировке амплитуда трансверсальной составляющей компоненты скорости внешних возмущений на границе пограничного слоя равна единице. Результаты расчетов показывают, что внутри пограничного слоя наиболее интенсивные возмущения продольной скорости достигаются в области низких частот и при условии, что  $\alpha \ll \beta$ . Их максимум наблюдается для волн с характерным значением волнового числа  $\beta = \beta^*$ .

Характерные распределения амплитуд  $|\tilde{u}|$  по пограничному слою при заданных векторах приведены на рис. 1 для трех приближений (модель параллельного течения, локальная модель и модель с использованием параболизированных уравнений устойчивости). Локальная модель получена путем пренебрежения в (3) членами, пропорциональными  $\partial \mathbf{Z}$ . Поведение амплитуд возмущений температуры аналогично. Видно, что в первом из рассмотренных

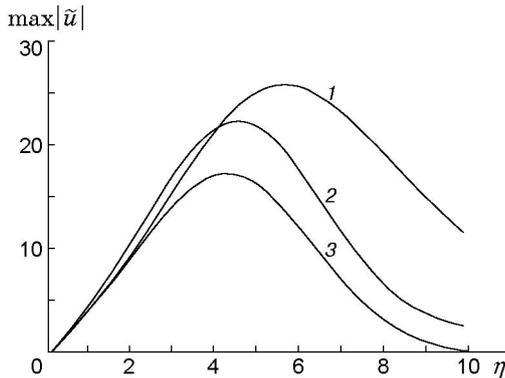


Рис. 1. Распределения амплитуд возмущений продольной скорости по пограничному слою для трех приближений:

1 — модель параллельного течения; 2 — локальная модель; 3 — модель с использованием параболизированных уравнений устойчивости

приближений значения  $|\tilde{u}|$  на границе пограничного слоя одного порядка с максимальным значением внутри пограничного слоя. Из расчетов по локальной модели следует, что возмущения  $|\tilde{u}|$  на границе пограничного слоя близки к нулю. Использование более точных параболизированных уравнений устойчивости приводит к дополнительному уменьшению  $|\tilde{u}|$  на границе пограничного слоя. Ненулевые значения  $|\tilde{u}|$  на границе пограничного слоя для модели параллельного течения и локальной модели обусловлены использованием вектора  $\mathbf{Z}_1$ , у которого  $\tilde{u} \neq 0$ . Это справедливо и для распределения возмущений температуры, которые на границе пограничного слоя не стремятся к нулю из-за использования вектора  $\mathbf{Z}_3$ , у которого  $\tilde{h} \neq 0$ . Таким образом, решение с использованием векторов  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_3$  не согласуется с решениями по локальной модели и параболизированным уравнениям.

Ниже предлагаются другие векторы  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_3$ , полученные на основе точных уравнений движения, неразрывности и теплопроводности для однородного потока вне пограничного слоя. Следует отметить, что у векторов  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_3$   $\tilde{p} = 0$ ,  $\tilde{w} = 0$ . Кроме того, у вектора  $\mathbf{Z}_1$   $\tilde{h} = 0$ , а у вектора  $\mathbf{Z}_3$   $\tilde{u} = 0$ .

При  $\tilde{p} = \tilde{T} = \tilde{w} = 0$  имеем два уравнения

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} - \lambda^2 \tilde{u}^2, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + i\alpha \tilde{u} = 0.$$

Здесь и ниже волновые числа и координаты обезразмерены с помощью масштаба длины  $\nu_\infty/u_\infty$ . Первое из этих уравнений имеет фундаментальное решение

$$\tilde{u} = (1/\sqrt{x}) \exp(-\lambda^2 x - y^2/(4x)).$$

Поэтому при  $y \gg 1$   $\tilde{u} \ll \partial \tilde{u}/\partial y \ll \partial^2 \tilde{u}/\partial y^2$  и вместо второго уравнения можно взять следующее:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{v} \right) \approx 0.$$

Таким образом,  $\tilde{v} = -\partial \tilde{u}/\partial y$ . В силу того что при  $\tilde{T} = \tilde{w} = \tilde{p} = 0$   $\tilde{\tau}_{12} = \partial \tilde{u}/\partial y + i\alpha \tilde{v}$ ,  $\tilde{\tau}_{23} = \partial \tilde{w}/\partial y + i\beta \tilde{v}$ ,  $\tilde{q} = \tilde{\tau}_{12} + \lambda \partial T/\partial y$ , и при условии  $\partial \tilde{v}/\partial y \ll \tilde{v}$ ,  $\tilde{u} \ll \partial \tilde{u}/\partial y$  имеем  $\mathbf{Z}_1 = (0, -1, 0, 0, 0, 1 - i\alpha, -i\beta, 1)$ . При  $\tilde{p} = \tilde{w} = \tilde{u} = 0$  используем уравнения теплопроводности и неразрывности в виде

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} - \lambda^2 \tilde{T} \right), \quad -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0.$$

Из сказанного выше следует, что в качестве третьего вектора можно взять  $\mathbf{Z}_3 = (0, -1, 0, 0, 0, -i\alpha, -i\beta, -1/g_{m1})$ .

На рис. 2 приведены распределения амплитуд возмущений продольной скорости по пограничному слою для различных значений частотного параметра при  $\beta = 10^{-3}$ . На

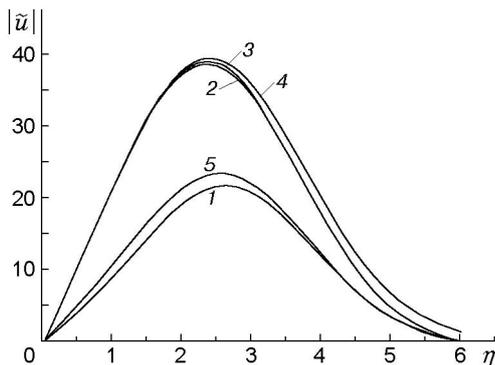


Рис. 2. Распределения амплитуд возмущений продольной скорости по пограничному слою при  $\beta = 10^{-3}$ :

1 —  $\omega = 10^{-5}$ ,  $M = 0$ ; 2 —  $\omega = 10^{-6}$ ,  $M = 0$ ; 3 —  $\omega = 10^{-7}$ ,  $M = 0$ ; 4 —  $\omega = 10^{-6}$ ,  $M = 2$ ; 5 — зависимость, пропорциональная  $\eta u'$  [9]

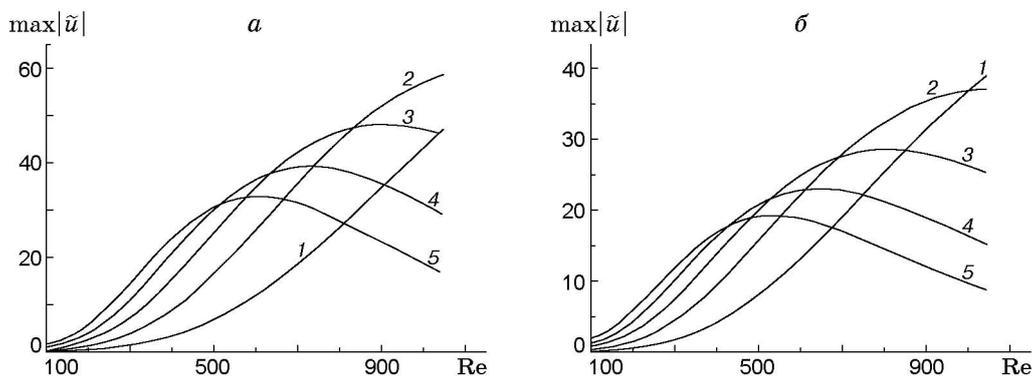


Рис. 3. Зависимости максимальных значений амплитуды продольной скорости внутри пограничного слоя от числа Рейнольдса при  $\omega = 10^{-6}$ :  
 а —  $M = 0$ ; б —  $M = 2$ ; 1 —  $\beta = 0,4 \cdot 10^{-3}$ ; 2 —  $\beta = 0,6 \cdot 10^{-3}$ ; 3 —  $\beta = 0,8 \cdot 10^{-3}$ ; 4 —  $\beta = 10^{-3}$ ; 5 —  $\beta = 1,2 \cdot 10^{-3}$

рис. 2 показана также зависимость, пропорциональная  $\eta u'$ , полученная в [9] аналитически при  $M = 0$  и являющаяся собственной автомодельной функцией уравнений пограничного слоя для малых значений  $\beta$  [10]. Аналогичные результаты для  $M = 0$  получены в [11, 12] методом оптимальных возмущений, заданных при  $x = X_0$  в отсутствие возмущений на границе пограничного слоя. Слабая зависимость формы профиля  $|\tilde{u}|$  от изменения  $\beta$  и возмущений при  $x = X_0$  обсуждается в [12]. Независимость формы профиля амплитуды  $\tilde{u}$  от параметров возмущения на внешней границе пограничного слоя, по-видимому, вызвана причинами, указанными в [12]. Главная из них заключается в том, что внешние возмущения возбуждают собственные возмущения с амплитудой  $\tilde{u} \sim yu'$ .

На рис. 3,а приведены зависимости максимальных значений амплитуды продольной скорости внутри пограничного слоя от числа Рейнольдса при  $\omega = 10^{-6}$ ,  $M = 0$  и различных волновых числах  $\beta$ . На рис. 2 видно, что при  $\omega = 10^{-6}$  и  $\omega = 10^{-7}$  результаты совпадают. Это означает, что при  $\omega \leq 10^{-6}$  возмущения можно считать стационарными. Из результатов, приведенных на рис. 3,а, следует, что максимальные значения амплитуд соответствуют волновому числу (вычисленному по толщине  $x/Re = Re$ ),  $(\beta Re)_1 = 0,7$  при фиксированном  $\beta$  и значению  $(\beta Re)_2 = 0,55$  при фиксированном числе Рейнольдса. Эти данные хорошо согласуются с результатами, полученными методом оптимальных возмущений [11], возбужденных в области передней кромки пластины. Кроме того, значение  $(\beta Re)_2 = 0,55$  хорошо согласуется с результатами экспериментов по развитию продольных структур [13]. В [13] установлено, что период по  $z$  равен примерно двум толщинам пограничного слоя, т. е.  $\lambda \approx 2 \cdot 5x/Re$ , поэтому  $\beta Re = 2\pi/10 \approx 0,6$  (здесь учтено, что  $x = Re^2$ ).

Результаты расчетов при  $M = 2$ ,  $\omega = 10^{-6}$  приведены на рис. 3,б. Качественно они близки к данным, полученным при  $M = 0$ . Однако амплитуда возмущений, обусловленных внешними гидродинамическими волнами, уменьшается в случае сверхзвукового пограничного слоя.

На рис. 4 приведены зависимости  $\max|\tilde{u}|(Re)$  при  $\beta = 10^{-3}$ . Из рис. 4 следует, что амплитуда сильно зависит от частотного параметра  $\omega$ : с увеличением  $\omega$  амплитуда возмущений уменьшается.

Из анализа зависимости фазовой скорости  $c$  от  $Re$  (определенной по нарастанию фазы вдоль оси  $x$  для возмущения  $\tilde{u}$  в области его максимума, т. е. при  $\eta \approx 2,3$ ) при  $\omega = 0,3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta = 10^{-3}$ ,  $M = 0$ ; 2 следует, что в диапазоне значений  $Re = 200 \div 400$  фазовая скорость изменяется от 0,7 до 0,9. В экспериментальных исследованиях распространения зарож-

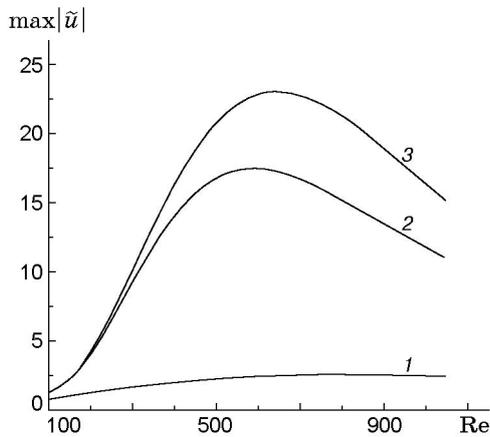


Рис. 4. Зависимости максимальных значений амплитуды продольной скорости внутри пограничного слоя от числа Рейнольдса при  $M = 2$ ,  $\beta = 10^{-3}$ :

1 —  $\omega = 10^{-4}$ ; 2 —  $\omega = 10^{-5}$ ; 3 —  $\omega = 10^{-6}$

дающихся турбулентных пятен [3] установлено, что их передний фронт, находящийся в области больших значений  $Re$ , распространяется со скоростью  $c \approx 0,9$ , а задний — со скоростью  $c \approx 0,5$ , что качественно соответствует результатам настоящих расчетов. Следует учитывать, что рассчитывалась фазовая скорость, в то время как в экспериментах, скорее всего, измерялась групповая скорость. Однако настоящие расчеты показывают, что  $\partial c / \partial \alpha \ll 1$  и групповая скорость близка к фазовой.

Как сказано выше, приведенные в данной работе результаты получены для безвихревых внешних возмущений. Дополнительные расчеты с учетом вихревых возмущений во внешнем потоке, сносимых основным течением, показали, что характер возмущений внутри слоя при этом не меняется. Изменяется только соотношение между амплитудами внешних и внутренних возмущений. Полученные результаты можно объяснить следующим образом. При больших числах Рейнольдса развитие возмущений слабо зависит от присутствия волн на границе пограничного слоя, при малых амплитуда возмущений внутри слоя зависит от условий при  $x = X_0$ . Изменение внешних условий на границе пограничного слоя эквивалентно изменению начальных данных при  $x = X_0$ , что приводит к вариации абсолютного значения амплитуды при  $x > X_0$ , в то время как характер зависимости  $|\tilde{u}|$  от  $\eta$  определяется первым собственным решением [12].

**Выводы.** На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Внешние вихревые и безвихревые волны, сносимые потоком, могут возбуждать в пограничном слое возмущения большой интенсивности.

2. Эффективность возбуждения возмущений увеличивается с уменьшением частоты, и ее максимум наблюдается для волн с характерным значением волнового числа  $\beta^*$  в боковом направлении. В области низких частот значение  $\beta^*$  много больше волнового числа в продольном направлении  $\alpha$ , что характерно для продольных структур, наблюдаемых в экспериментах.

3. Для стационарных возмущений и значения  $M = 0$  при изменении  $Re$  и  $\beta = \text{const}$  наибольшая эффективность возбуждения возмущений в пограничном слое соответствует значению  $(\beta Re)_1 \approx 0,7$ , а при изменении  $\beta$  и  $Re = \text{const}$  —  $(\beta Re)_2 \approx 0,55$ . Последнее значение хорошо согласуется с периодом продольных структур, полученным в экспериментах [11].

4. Эффективность возбуждения возмущений в сверхзвуковом пограничном слое ниже, чем в дозвуковом.

Авторы выражают благодарность Г. В. Петрову за предоставленную программу расчета.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Morkovin M. V.** Critical evaluation of transition from laminar to turbulent shear layer with emphasis on hypersonically travelling bodies: Tech. Rep. / AFFDL. N 68-149. S. l., 1969.
2. **Kachanov Yu. S.** Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 411–482.
3. **Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В.** Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1999.
4. **Гапонов С. А.** О взаимодействии сверхзвукового пограничного слоя с акустическими возмущениями // Теплофизика и аэромеханика. 1993. Т. 2, № 3. С. 209–217.
5. **Федоров А. В., Хохлов А. П.** Возбуждение неустойчивых мод в сверхзвуковом пограничном слое акустическими волнами // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. № 4. С. 67–71.
6. **Semionov N. V., Kosinov A. D., Maslov A. A.** Experimental investigation of supersonic boundary-layer receptivity // Transitional boundary layers in aeronautics. Amsterdam etc.: S. n., 1996. P. 413–420.
7. **Петров Г. В.** Новая параболизированная система уравнений устойчивости сжимаемого пограничного слоя // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 63–69.
8. **Петров Г. В.** Реакция сверхзвукового пограничного слоя на акустическое воздействие // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 1. С. 77–86.
9. **Stewartson K.** On asymptotic expansion in the theory of boundary layer // J. Math. Phys. 1957. V. 36. P. 137–191.
10. **Luchini P.** Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface // J. Fluid Mech. 1996. V. 327. P. 101–115.
11. **Anderson P., Berggren M., Henningson D. S.** Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // Phys. Fluids. 1999. V. 11, N 1. P. 134–150.
12. **Luchini P.** Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // J. Fluid Mech. 2000. V. 404. P. 289–309.
13. **Westin K. J. A., Vakchinov A. A., Kozlov V. V., Alfredsson P. H.** Experiments on localized disturbances in a flat plate boundary layer. Pt 1. The receptivity and evolution of a localized free stream disturbances // Europ. J. Mech. B. Fluids. 1998. V. 17, N 6. P. 823–846.

*Поступила в редакцию 24/V 2001 г.,  
в окончательном варианте — 3/IX 2001 г.*

---