ПМТФ, № 3, 1960

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ С. А. ЧАПЛЫГИНА

Л. В. Овсянников

(*Новосибирск*)

При исследовании плоских стационарных безвихревых задач газовой динамики существенную роль играют методы, основанные на переходе в плоскость годографа скоростей. В результате этого перехода возникает линейное уравнение с частными производными второго порядка — уравнение Чаплыгина. Однако краевые задачи в общем случае остаются нелинейными. Кроме того, в соответствии с природой явления, уравнение Чаплыгина имеет смешанный, эллиптико-гиперболический тип. Для преодоления возникающих из-за этого трудностей усилия многих исследователей были направлены на отыскание таких приближенных форм уравнения Чаплыгина, для которых общее решение имеет относительно простой вид. При этом приближенное уравнение можно рассматривать как уравнение, описывающее движение некоторого фиктивного газа, в котором зависимость давления от плотности (или плотности от скорости) в каком-то смысле апроксимирует реальную зависимость.

Как известно, первый пример подобной апроксимации был дан С. А. Чаплыгиным еще в 1902 г. [1]. Следующий этап наступил почти через сорок лет. В работе С. А. Христиановича [2] метод Чаплыгина был развит применительно к задаче о дозвуковом обтекании тела. Ф. И. Франкль [3] и С. В. Фалькович [4] предложили апроксимировать уравнение Чаплыгина уравнением Трикоми. Различные апроксимации были рассмотрены в работах С. А. Христиановича [5], Л. И. Седова [6], Томотика и Тамада [14], Жермена и Лиже [15], М. А. Лаврентьева и А.В. Бицадзе [7], Г. А. Домбровского [8], С. В. Валландера [9], И. М. Юрьева [10], А. А. Гриба и А. Г. Рябинина [11] и др. Более подробную библиографию по этому вопросу можно найти в книге Л. Берса [13].

Большинство предлагавшихся апроксимаций получалось в основном одним и тем же приемом: требовалось, чтобы апроксимирующее уравнение обладало частными решениями предписанной структуры или приводилось к подобному уравнению простыми подстановками. Однако ясно, что этот прием не является достаточно регулярным для того, чтобы с его помощью можно было обозреть все «хорошие» апроксимации с единой точки зрения.

В предлагаемой статье качество апроксимации оценивается в том смысле, насколько широкую группу преобразований допускает апроксимирующее уравнение, исходя из следующего принципа: чем шире группа, тем «лучше» уравнение. Этот путь требует предварительного исследования групповых свойств дифференциального уравнения второго порядка. Классификация таких уравнений (при двух независимых переменных) с групповой точки зрения была выполнена еще Ли [16]. Однако классификация Ли не имела инвариантной формы, что служило препятствием при применении ее к конкретным вопросам. Восполнение этого недостатка дает возможность перечислить все уравнения Чаплыгина, допускающие трехпараметрическую группу, а тем самым, все «хорошие» апроксимации в газодинамической задаче. Полученный результат оправдывает ожидания: большинство известных апроксимаций оказываются удовлетворяющими условию, чтобы приближенное уравнение допускало по возможности наиболее обширную группу. Исключением является лишь апроксимация Томотика и Тамада [14], не принадлежащая к числу наилучших с групповой точки зрения. Впрочем, при этой апроксимации авторам удалось найти лишь отдельные примеры интересных течений.

Таким образом, в этой статье подводится своеобразный итог в области приближенных методов исследования плоской газодинамической задачи. Вместе с тем, изложенные здесь факты имеют и самостоятельное значение, указывая общие закономерности, связанные с линейными уравнениями второго порядка при двух независимых переменных.

Содержание статьи таково: после краткого вывода уравнения Чаплыгина (§ 1) и напоминания общих свойств эквивалентности, связанных с уравнениями второго порядка и их инвариантами Лапласа (§ 2, леммы 1—4), мы переходим к задаче Ли о групповой классификации таких уравнений (§ 3). Решение этой задачи дается в терминах инвариантов Лапласа исходного уравнения (теорема 1 и ее следствие). Затем дается групповая классификация уравнений Чаплыгина (§ 4, теорема 3), которая формулируется с помощью групповых свойств вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема 2). Далее мы указываем канонические формы «допустимых» уравнений Чаплыгина и выясняем правила приведения к этим формам (§ 5). В заключение среди уравнений Чаплыгина, допускающих трехпараметрическую группу, мы находим все уравнения типа Трикоми, то есть простейшие уравнения смешанного типа (§ 6, теоремы 4 и 5), а также уравнения, которые асимптотически переходят в уравнение Лапласа и дают хорошую апроксимацию уравнения Чаплыгина при малых скоростях (§ 7, теорема 6).

На протяжении статьи все встречающиеся «произвольные» функции предполагаются аналитическими, что позволяет не различать участвующие в промежуточных рассуждениях уравнения второго порядка по типам. Окончательные результаты от этого предположения не зависят.

§ 1. Уравнение и функция Чаплыгина. Если через u, v обозначить проекции вектора скорости на оси прямоугольной системы координат x, y, а через ρ — плотность, то уравнения плоско-параллельного установившегося безвихревого движения газа запишутся так

$$u_y - v_x = 0, \qquad (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \qquad \rho = \rho_0 R(w) \tag{1.1}$$

где $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ — скорость, отнесенная к критической, $R(w)$ — некоторая заданная функция, $R(0) = 1$, а ρ_0 — постоянная. Например, для политропического газа с показателем политропы γ имеем

$$R = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} w^2\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (1 < \gamma < \infty) \tag{1.2}$$

В силу уравнений (1.1) существует потенциал скорости φ и функция тока ψ, определяемые равенствами

$$d\varphi = u dx + v dy, \quad d\psi = Ru\, dy - Rv dx$$

Обращение этих равенств с последующим переходом к полярным координатам в плоскости годографа $u = w \cos\theta$, $v = w \sin\theta$ дает

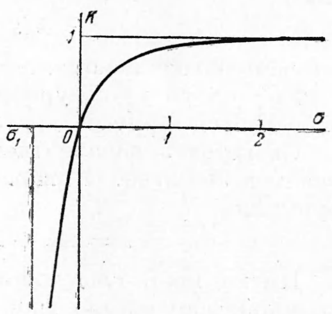
$$dx = \frac{\cos\theta}{w} d\varphi - \frac{\sin\theta}{Rw} d\psi, \quad dy = \frac{\sin\theta}{w} d\varphi + \frac{\cos\theta}{Rw} d\psi \tag{1.3}$$

Отсюда для φ и ψ, рассматриваемых как функции от w, θ, следуют уравнения

$$\varphi_w = w \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{Rw}\right) \psi_\theta, \qquad \varphi_\theta = \frac{w}{R} \psi_w \tag{1.4}$$

Исключение φ приводит к одному уравнению для функции тока

$$w \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{Rw}\right) \psi_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{w}{R} \psi_w\right) \tag{1.5}$$



Если теперь, следуя, Чаплыгину [1], ввести новую независимую переменную $\sigma = \sigma(w)$ согласно уравнениям

$$\frac{d\sigma}{dw} = -\frac{R(w)}{w}, \qquad \sigma(1) = 0 \tag{1.6}$$

то уравнение (1.5) примет вид

$$K(\sigma) \psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0 \qquad \left(K(\sigma) = \frac{wR' + R}{R^3}\right) \tag{1.7}$$

В дальнейшем уравнение вида (1.7) будем называть уравнением Чаплыгина, а входящую в него функцию $K(\sigma)$ — функцией Чаплыгина.

Качественный график функции Чаплыгина в случае зависимости (1.2) приведен на фиг. 1. При этом уточнение поведения $K(\sigma)$ дается следующими асимптотическими формулами

$$K(0) = 0, \qquad K'(0) = 2\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{2/(\gamma-1)} \tag{1.8}$$

$$\lim_{\sigma \to +\infty} e^{4\sigma} [K(\sigma) - 1] = -\frac{1}{\gamma + 1} \exp\left[2 \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} x\right)^{1/(\gamma-1)} - 1\right] \frac{dx}{x}\right] \tag{1.9}$$

$$\lim_{\sigma \to \sigma_1 +} (\sigma - \sigma_1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} K(\sigma) = -\frac{2}{\gamma}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^{1/\gamma} \tag{1.10}$$

где

$$\sigma_1 = -\int_1^W \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} w^2\right)^{1/(\gamma-1)} \frac{dw}{w} \qquad \left(W = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right) \tag{1.11}$$

и неравенствами

$$K'(\sigma) > 0, \qquad K''(\sigma) < 0 \qquad (\sigma_1 < \sigma < +\infty) \tag{1.12}$$

Преобразование уравнения Чаплыгина к характеристическим переменным

$$\lambda = L(\sigma) + \theta, \quad \mu = L(\sigma) - \theta, \quad \frac{dL}{d\sigma} = \sqrt{-K} \tag{1.13}$$

приводит к уравнению

$$\psi_{\lambda\mu} + N(\lambda+\mu)(\psi_\lambda + \psi_\mu) = 0 \qquad \left(N = -\frac{1}{4}\frac{d}{d\sigma}\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) будем называть также уравнением Чаплыгина. Введем величину $t = 2L(\sigma) = \lambda + \mu$.

Тогда

$$N(t) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log\sigma' \qquad \left(\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}\right) \tag{1.15}$$

При известной функции $\sigma(t)$, определяющей зависимость $t = t(\sigma)$, функция Чаплыгина восстанавливается на основании (1.13) в виде

$$K(\sigma) = -\frac{1}{4}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2. \tag{1.16}$$

§ 2. Инварианты Лапласа. Рассмотрим уравнение с искомой функцией $z = z(x, y)$

$$z_{xy} + Az_x + Bz_y + Cz = 0 \tag{2.1}$$

где A, B, C — заданные функции от x, y.

Два уравнения вида (2.1) будем называть *эквивалентными*, если одно из них преобразуется в другое посредством замены переменных вида

$$x_1 = \alpha(x), \; y_1 = \beta(y), \; z = \omega(x_1, y_1) z_1 \tag{2.2}$$

причем новая искомая функция есть $z_1 = z_1(x_1, y_1)$. При этом будем также говорить об уравнениях, *эквивалентных по функции*, если они переводятся друг в друга преобразованием (2.2) с $\alpha(x) \equiv x$, $\beta(y) \equiv y$.

Свойства эквивалентности удобно сформулировать в терминах инвариантов Лапласа. Инвариантами Лапласа уравнения (2.1) называются функции

$$h = A_x + AB - C, \qquad k = B_y + AB - C \tag{2.3}$$

Имеют место следующие предложения, изложение которых в несколько иной форме было дано Дарбу [17].

Лемма 1. Для того чтобы уравнение вида (2.1) с инвариантами h, k было эквивалентно по функции уравнению с инвариантами h_1, k_1, необходимо и достаточно выполнение равенств $h_1 = h$, $k_1 = k$.

Доказательство необходимости получается прямой подстановкой $z = \omega(x, y) z_1$ и вычислением инвариантов полученного уравнения для z_1. Для доказательства достаточности заметим, что если коэффициенты второго уравнения суть A_1, B_1, C_1, то из $h_1 = h$, $k_1 = k$ следует, что $(A_1 - A)_x = (B_1 - B)_y$ и поэтому существует функция $\omega = \omega(x, y)$ такая, что

$$A_1 = A + \frac{\omega_y}{\omega}, \qquad B_1 = B + \frac{\omega_x}{\omega}$$

Кроме того, из $h_1 = h$ следует, что

$$C_1 = C + A\frac{\omega_x}{\omega} + B\frac{\omega_y}{\omega} + \frac{\omega_{xy}}{\omega}.$$

Теперь прямая подстановка в (2.1) показывает, что замена $z = \omega z_1$ преобразует (2.1) в уравнение с коэффициентами A_1, B_1, C_1.

В качестве простого следствия этой леммы получаем, что те и только те уравнения (2.1) эквивалентны по функции уравнению $z_{xy}=0$, у которых $h \equiv k \equiv 0$.

Лемма 2. Для того чтобы уравнение (2.1) с инвариантами $h(x, y)$, $k(x, y)$ было эквивалентно уравнению того же вида с инвариантами $h_1(x, y)$, $k_1(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись две функции, $\alpha(x)$ и $\beta(y)$, такие, что

$$\frac{h(x, y)}{h_1[\alpha(x), \beta(y)]} = \frac{k(x, y)}{k_1[\alpha(x)\beta(y)]} = \alpha'(x)\beta'(y) \tag{2.4}$$

И здесь доказательство необходимости осуществляется прямой подстановкой, выполнение которой можно упростить в силу леммы 1, рассматривая только такие преобразования (2.2), в которых $\omega \equiv 1$. Пусть теперь равенства (2.4) выполнены для некоторых $\alpha(x)$, $\beta(y)$. Сделаем в уравнении с инвариантами h, k замену переменных по формулам (2.2) с этими α, β при $\omega = 1$. Тогда оно перейдет в уравнение с инвариантами h_2, k_2, для которых, вместе с h, k, будут выполнены равенства (2.4) при h_2, k_2 вместо h_1, k_1. Совместное рассмотрение полученного равенства и (2.4) показывает, что $h_2(x_1, y_1) = h_1(x_1, y_1)$, $k_2(x_1, y_1) = k_1(x_1, y_1)$. Отсюда в силу леммы 1 следует, что уравнение с инвариантами h_2, k_2 эквивалентно по функции уравнению с инвариантами h_1, k_1.

Помимо преобразований (2.2) существует другой тип преобразований уравнений (2.1), сохраняющих структуру уравнения. Чтобы получить эти преобразования, заметим, что уравнение (2.1) можно получить как следствие каждой из следующих двух систем уравнений путем исключения вспомогательной функции z^* или z^{**}

$$z_y + Az = z^*, \qquad z_x^* + Bz^* = hz \tag{2.5}$$

$$z_x + Bz = z^{**}, \qquad z_y^{**} + Az^{**} = kz \tag{2.6}$$

Наоборот, при $h \neq 0$ исключение z из системы (2.5) приводит к уравнению для z^*, имеющему также вид (2.1). Это новое уравнение будем называть x-преобразованием Лапласа уравнения (2.1). Обозначив его инварианты Лапласа h^*, k^* простым вычислением, найдем, что

$$h^* = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x\, \partial y}, \qquad k^* = h \tag{2.7}$$

Аналогично, при $k \neq 0$ исключение z из системы (2.6) приводит к уравнению для z^{**}, называемому y-преобразованием Лапласа уравнения (2.1). Это уравнение имеет инварианты

$$h^{**} = k, \qquad k^{**} = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y} \tag{2.8}$$

Теперь условимся вообще обозначать уравнения вида (2.1) с инвариантами h, k символом (h, k). Следовательно, x-преобразование Лапласа уравнения (h, k) дает уравнение (h^*, k^*), а y-преобразование — уравнение (h^{**}, k^{**}).

Лемма 3. y-преобразование Лапласа уравнения (h^*, k^*) эквивалентно по функции уравнению (h, k); аналогично, x-преобразование Лапласа уравнения (h^{**}, k^{**}) эквивалентно по функции уравнению (h, k). Это утверждение доказывается прямым вычислением инвариантов, показывающим, что $(h^*)^{**} = h$, $(k^*)^{**} = k$ и $(h^{**})^* = h$, $(k^{**})^* = k$, после чего остается применить критерий леммы 1.

Из этой леммы следует, что множество уравнений, выводимых из исходного преобразования Лапласа, «одномерно». Для наглядной иллюстрации этого свойства положим для исходного уравнения $h = h^0$, $k = h^{-1}$, так что его обозначение будет (h^0, h^{-1}). Определим h^n для любого n следующей рекуррентной формулой:

$$h^{n+1} + h^{n-1} = 2h^n - \frac{\partial^2 \log h^n}{\partial x\, \partial y} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.9}$$

В силу (2.7) эта формула дает при $n = 0$ инвариант $h^* = h^1$ уравнения (h^*, k^*), а при $n = -1$ инвариант $k^{**} = h^{-2}$ уравнения (h^{**}, k^{**}). Теперь легко установить, что вообще x-преобразование Лапласа переводит (h^n, h^{n-1}) в (h^{n+1}, h^n), а y-преобразование соответственно (h^{n+1}, h^n) в (h^n, h^{n-1}) при любом n. Так получается ряд Лапласа

$$\ldots; (h^{-2}, h^{-3}); (h^{-1}, h^{-2}); (h^0, h^{-1}); (h^1, h^0); (h^2, h^1); \ldots \tag{2.10}$$

Ряд Лапласа можно продолжать до тех пор, пока какой-нибудь из инвариантов h^n не обратится тождественно в нуль. Замечательным свойством этого ряда является то, что если при каком-нибудь n оказывается $h^n \equiv 0$, то для исходного уравнения может быть найдена формула общего решения с двумя произвольными функциями, содержащая квадратуры. Если же ряд (2.10) «обрывается» с двух концов, то можно построить формулу общего решения с двумя произвольными функциями, не содержащую квадратур [17]. В дальнейшем для нас будет важен случай, когда инварианты h^n находятся в постоянном отношении.

Лемма 4. Если в исходном уравнении инварианты h, k таковы, что отношения

$$\frac{k}{h} = p, \qquad \frac{1}{h}\frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = q \tag{2.11}$$

постоянны, то все инварианты ряда Лапласа (2.10) находятся в постоянном отношении.

Для доказательства перепишем (2.11) в виде

$$h^{-1} = ph^0, \qquad \frac{\partial^2 \log h^0}{\partial x\, \partial y} = qh^0$$

Из формулы (2.9) при $n = 0$ следует постоянство отношения

$$h^1 / h^0 = 2 - p - q$$

Теперь постоянство отношения h^n / h^0 доказывается на основании (2.9) методом полной индукции. Для отыскания этого отношения при любом n будем рассматривать (2.9) как уравнение в конечных разностях

$$h^{n+1} - 2h^n + h^{n-1} = -qh^0$$

с начальными условиями $h^{-1} = ph^0$, $h^0 = h^0$. Решение этой задачи (очевидно, единственное) есть

$$h^n / h^0 = 1 + (1 - p)\, n - {}^1/{}_2 qn(n+1) \tag{2.12}$$

В частном случае, когда инварианты исходного уравнения (h^0, h^{-1}) равны, т. е. когда $p = 1$, эта формула принимает вид

$$h^n / h^0 = 1 - {}^1/{}_2 q\, n\, (n+1) \tag{2.13}$$

§ 3. Вычисление группы для уравнения второго порядка. Перейдем к отысканию преобразований, сохраняющих уравнение (2.1) или, как принято говорить, преобразований, *допускаемых* уравнением (2.1). При этом термином «*группа, допускаемая уравнением* (2.1)» будем называть фактор-группу группы всех допускаемых преобразований по ее тривиальному нормальному делителю, состоящему из преобразований вида

$$\bar{x} = x, \qquad \bar{y} = y, \qquad \bar{z} = az + z_0(x, y)$$

где a — параметр, а $z_0(x, y)$ — любое фиксированное решение этого уравнения. Инфинитезимальный оператор группы запишем в виде

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \pi z \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.1}$$

Как выяснено в работе [12], функции ξ, η, π зависят, самое большее, от x, y, причем функция π определена с точностью до постоянного слагаемого. Используя обозначения работы [12], найдем, что для уравнения (2.1) единственная компонента K_{12} тензора K_{ij} и инвариант H таковы

$$K_{12} = 2J = 2(B_y - A_x), \qquad H = A_x + B_y + 2(AB - C) \tag{3.2}$$

Система определяющих уравнений, построенная в работе [12], сводится при этом к следующей

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\pi + B\xi + A\eta) = -J\eta, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\pi + B\xi + A\eta) = J\xi \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(J\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(J\eta) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(H\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(H\eta) = 0 \tag{3.5}$$

Уравнения (3.3) показывают, что $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(y)$. Уравнения (3.4) служат для определения $\pi(x, y)$ после того, как найдены ξ и η. Первое из уравнений (3.5) есть условие совместности уравнений (3.4). Второе уравнение (3.5) представляет собой дополнительное условие, наложенное на функции ξ, η.

Таким образом, объем группы уравнения (2.1) определяется общим решением системы (3.5). Так как из (3.2) следует, что $J = k - h$, $H = k + h$, то уравнения (3.5) можно переписать в терминах инвариантов Лапласа уравнения (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(k\eta) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(h\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(h\eta) = 0 \tag{3.6}$$

Ограничимся тем случаем, когда хотя бы один из инвариантов h, k отличен от нуля, так как в противном случае уравнение (2.1) будет эквивалентно уравнению $z_{xy} = 0$.

Пусть $h \neq 0$. В обозначении (2.11) из (3.6) получим уравнение

$$\xi \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3.7}$$

Это уравнение показывает, что либо p есть инвариант группы с оператором X, либо $p = \mathrm{const}$. Легко видеть, что если $p \neq \mathrm{const}$, то уравнение (2.1) допускает не более чем однопараметрическую группу. Действительно, если наряду с (3.7) будет

$$\xi_1 \frac{\partial p}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

то при $p \neq \mathrm{const}$ должно быть $\xi\eta_1 - \xi_1\eta = 0$ или $\xi_1 = c\,\xi$, $\eta_1 = c\eta$, где c — постоянная, так как она есть функция одновременно только одного x и только одного y. Но тогда из (3.4) также получим, что $\pi_1 = c\pi$ и, значит, оператор

$$X_1 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \pi_1 z \frac{\partial}{\partial z}$$

линейно зависим с оператором X.

Рассмотрим теперь случай $p = \mathrm{const}$. Из двух уравнений (3.6) здесь остается одно, а именно, второе. Перепишем его в следующем виде

$$\xi \frac{\partial \log h}{\partial x} + \eta \frac{\partial \log h}{\partial y} + \xi'(x) + \eta'(y) = 0 \tag{3.8}$$

Применив к этому уравнению операцию $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, получим

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} \log\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \log\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}\right) + \xi'(x) + \eta'(y) = 0$$

Вычитая отсюда уравнение (3.8), в обозначениях (2.11) имеем

$$\xi \frac{\partial q}{\partial x} + \eta \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \tag{3.9}$$

Это равенство снова приводит к выводу о том, что либо q есть инвариант группы, допускаемой уравнением (2.1), и тогда эта группа не более чем однопараметрическая, либо $q = \mathrm{const}$.

Следовательно, уравнение (2.1) может допускать более чем однопараметрическую группу только в том случае, если обе величины p и q постоянны. Покажем, что если q постоянно, то инвариант h должен иметь весьма специальный вид. Как указывает Ли [16], рассматриваемое ниже уравнение (3.10) было проинтегрировано еще Лиувиллем.

Лемма 5. Общее решение уравнения

$$\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = q \tag{3.10}$$

в случае постоянного q имеет вид

$$h = \frac{2}{q} \frac{\alpha'(x)\beta'(y)}{[\alpha(x) + \beta(y)]^2} \quad (q \neq 0), \qquad h = \alpha'(x)\beta'(y) \quad (q = 0) \tag{3.11}$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ — произвольные функции.

Для доказательства заметим, что случай $q = 0$ тривиален. Если $q \neq 0$, то формула (3.11) дает решение уравнения (3.10) при любых $\alpha(x)$ и $\beta(y)$, что проверяется непосредственной подстановкой выражения для h в (3.10). Обратно, пусть h есть какое-нибудь решение уравнения (3.10). Положим $h = \chi^{-2}$, после чего (3.10) можно переписать так

$$\chi\chi_{xy} - \chi_x\chi_y = -\frac{q}{2} \tag{3.12}$$

Взяв производную по x, получим следствие, равносильное уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{\chi_{xx}}{\chi}=0, \quad \text{или} \quad \chi_{xx}=r(x)\chi$$

Если χ_1 и χ_2 суть два линейно независимых решения этого обыкновенного дифференциального уравнения, то его общее решение будет

$$\chi=c_1(y)\chi_1(x)+c_2(y)\chi_2(x)$$

Вынося за скобку произведение $\chi_1(x)c_2(y)$, получим, что последней формуле можно придать вид $\chi=m(x)n(y)[\alpha(x)+\beta(y)]$. Подставив это выражение χ в (3.12), придем к равенству

$$(mn)^2=\frac{q}{2\alpha'\beta'}$$

и, следовательно, $h=\chi^{-2}$ имеет вид (3.11). Главный результат, относящийся к уравнению (2.1), можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (2.1) допускало более чем однопараметрическую группу, необходимо и достаточно, чтобы у этого уравнения величины

$$\frac{k}{h}=p, \qquad \frac{1}{h}\frac{\partial^2\log h}{\partial x\,\partial y}=q$$

были постоянны. Если это условие выполнено, то уравнение (2.1) эквивалентно либо уравнению Эйлера — Пуассона ($q\neq 0$)

$$z_{xy}-\frac{2/q}{x+y}z_x-\frac{2p/q}{x+y}z_y+\frac{4p/q^2}{(x+y)^2}z=0 \tag{3.13}$$

либо уравнению ($q=0$)

$$z_{xy}+xz_x+pyz_y+pxyz=0 \tag{3.14}$$

и допускает трехпараметрическую группу.

Для доказательства заметим, что необходимость постоянства величин p и q уже установлена выше. Пусть теперь p и q постоянны. Тогда в силу леммы *5* инварианты h, k имеют вид (случай $q\neq 0$)

$$h=\frac{2}{q}\,\frac{\alpha'(x)\beta'(y)}{[\alpha(x)+\beta(y)]^2}, \quad k=\frac{2p}{q}\,\frac{\alpha'(x)\beta'(y)}{[\alpha(x)+\beta(y)]^2} \tag{3.15}$$

Сравним это уравнение с некоторым уравнением, имеющим инварианты

$$h_1=\frac{2}{q}\,\frac{1}{(x+y)^2}, \qquad k_1=\frac{2p}{q}\,\frac{1}{(x+y)^2} \tag{3.16}$$

и применим лемму *2*. Очевидно, именно для тех функций $\alpha(x)$ и $\beta(y)$, которые входят в формулы (3.15), условие (2.4) леммы *2* выполнено. Поэтому уравнение (2.1) эквивалентно уравнению с инвариантами (3.16). Но уравнение (3.13) имеет инварианты (3.16). Значит, в силу леммы *1* уравнение (2.1) эквивалентно уравнению (3.13).

В случае $q=0$ инварианты h, k таковы

$$h=\alpha'(x)\beta'(y), \qquad k=p\,\alpha'(x)\beta'(y)$$

Следовательно, в силу леммы 2, уравнение (2.1) эквивалентно уравнению с инвариантами $h_1=1$, $k_1=p$, а это последнее эквивалентно по функции уравнению (3.14).

Так как эквивалентные уравнения допускают подобные группы, то для завершения доказательства теоремы 1 остается показать, что каждое из уравнений (3.13) и (3.14) допускает трехпараметрическую группу.

В случае $q\neq 0$ уравнение (3.8), которому только и должны еще удовлетворять ξ, η, принимает вид

$$x\xi'-2\xi+y\eta'-2\eta+y\xi'+x\eta'=0 \tag{3.17}$$

Применяя операцию $\partial^2/\partial x \partial y$, получим $\xi'' + \eta'' = 0$. Отсюда $\xi'' = -\eta'' = 2a_0 = \mathrm{const}$. Следовательно,

$$\xi = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \qquad \eta = -a_0 y^2 + b_1 y + b_2$$

Подстановка этих выражений в (3.17) приводит к необходимым равенствам $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_2$, при соблюдении которых это уравнение выполняется тождественно. Итак, общий вид координат ξ, η, удовлетворяющих (3.8) в случае инвариантов (3.16), есть

$$\xi = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \qquad \eta = -a_0 y^2 + a_1 y - a_2$$

Вычисляя π с помощью уравнений (3.4), находим

$$\pi = a_0 \frac{2}{q} (px - y)$$

Таким образом, уравнение (3.13) допускает трехпараметрическую группу преобразований, порожденную следующими операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{q}(px - y) z \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.18}$$

В случае $q = 0$ уравнение (3.8) принимает вид $\xi' + \eta' = 0$ и имеет общее решение $\xi = a_0 x + a_1$, $\eta = -a_0 y + b_1$. Вычисление π с помощью (3.4) дает $\pi = -a_1 y - b_1 px$. Следовательно, уравнение (3.14) также допускает трехпараметрическую группу с операторами

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - yz \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y} - pxz \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.19}$$

Следствие. Два уравнения вида (2.1), допускающие трехпараметрическую группу, эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые значения параметров p и q.

Действительно, если два рассматриваемых уравнения имеют одинаковые p и q, то по теореме 1 каждое из них эквивалентно либо уравнению (3.13), либо уравнению (3.14). Обратно, если взять два эквивалентных уравнения, то равенство значений p следует из формул (2.4) леммы 2. Равенство значений параметров q также очевидно, так как согласно (2.4) имеем

$$\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\alpha' \beta' h_1} \frac{\partial^2 \log(\alpha' \beta' h_1)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \log h_1}{\partial \alpha \partial \beta}$$

§ 4. **Отыскание допустимых функций Чаплыгина.** Мы найдем здесь все те функции Чаплыгина $K(\sigma)$, для которых уравнение (1.7) допускает трехпараметрическую группу. Всякую такую функцию Чаплыгина будем называть *допустимой* функцией Чаплыгина, а соответствующее уравнение — *допустимым* уравнением. Так как уравнения (1.7) и (1.14) допускают подобные группы, то для решения поставленной задачи достаточно рассмотреть уравнение (1.14) и применить результаты § 3.

Инварианты Лапласа уравнения (1.14) таковы:

$$h = k = N' + N^2$$

где $N = N(t) = N(\lambda + \mu)$, а штрихом обозначена производная по t.

Отметим сначала случай $h = 0$. Тогда либо $N = 0$, либо $N = (t + t_0)^{-1}$, где t_0 — постоянная. Случай $N = 0$ соответствует, очевидно, функции $K(\sigma) = \mathrm{const}$. Во втором случае уравнение (1.15) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \log \sigma'(t) = -\frac{2}{t + t_0}; \quad \text{или} \quad \sigma - \sigma_0 = -\frac{c_1}{t + t_0}$$

и, следовательно, по (1.16),

$$K(\sigma) = -\left(\frac{c}{\sigma - \sigma_0}\right)^4 \qquad (c,\ \sigma_0 = \mathrm{const}) \tag{4.1}$$

В силу леммы *1*, этим исчерпываются все случаи, когда уравнение Чаплыгина оказывается эквивалентным уравнению колебаний струны (или уравнению Лапласа).

Если $h \neq 0$, то из равенства $h = k$ и теоремы 1 следует, что уравнение (1.14) будет допустимым тогда и только тогда, когда величина

$$\frac{1}{h}\frac{\partial^2 \log h}{\partial\lambda\partial\mu} - \frac{1}{h}\frac{d^2 \log h}{dt^2} = q \tag{4.2}$$

будет постоянной. Это условие есть дифференциальное уравнение относительно $h = h(t)$. По любому его решению функция $N(t)$ находится как решение уравнения Риккати

$$N' + N^2 = h \tag{4.3}$$

Введем теперь новую независимую переменную s и вспомогательную функцию $\zeta = \zeta(s)$ посредством уравнений

$$\frac{ds}{dt} = h \tag{4.4}$$

$$N = h\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \tag{4.5}$$

Рассматривая инвариант h как функцию от s, получим, что уравнение (4.2) преобразуется в уравнение

$$\frac{d^2h}{ds^2} = q \tag{4.6}$$

а уравнение (4.3) — в следующее линейное уравнение для ζ

$$\frac{d}{ds}\left(h\frac{d\zeta}{ds}\right) - \zeta = 0 \tag{4.7}$$

Обращаясь теперь к формулам (1.15), (1.16), легко установим, что с помощью любого решения $\zeta = \zeta(s)$ уравнения (4.7) мы получим, в силу (4.5), следующее параметрическое представление допустимых функций Чаплыгина

$$K(\sigma) = -\frac{1}{4}\zeta^4(s), \qquad \sigma = \int \frac{ds}{h\zeta^2} \tag{4.8}$$

В этих формулах произвольная постоянная, появляющаяся при вычислении σ' из (1.15), считается равной единице, что не уменьшает общности представления, так как этого всегда можно добиться за счет умножения на постоянный множитель решения ζ уравнения (4.7).

Для вычисления квадратуры, входящей во вторую из этих формул, возьмем какое-нибудь решение $\zeta_0 = \zeta_0(s)$ уравнения (4.7), линейно независимое с $\zeta(s)$. Тогда вронскиан $W[\zeta_0, \zeta] = \zeta_0'\zeta - \zeta_0\zeta'$ этих двух решений будет равен $W[\zeta_0, \zeta] = c/h$, где c — постоянная. Поэтому

$$\frac{d}{ds}\frac{\zeta_0}{\zeta} = \frac{W[\zeta_0, \zeta]}{\zeta^2} = \frac{c}{h\zeta^2}$$

Следовательно, для σ можно взять значение

$$\sigma = \frac{1}{c}\frac{\zeta_0(s)}{\zeta(s)} \tag{4.9}$$

так как появляющаяся при взятии квадратуры аддитивная постоянная всегда может быть произвольно изменена за счет выбора решения ζ_0 при закрепленном ζ.

Заметим, что при фиксированном значении q мы получаем некоторое множество допустимых функций $K(\sigma)$, произвол в определении которых зависит от произвольных постоянных, появляющихся при решении уравнений (4.6), (4.7) и взятии квадратуры (4.8). Для того чтобы дать точное описание этого произвола, мы используем некоторые групповые свойства системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих $K(\sigma)$ при заданном q, а именно, системы

$$h'' = q, \qquad (h\zeta')' = \zeta, \qquad h\zeta^2\sigma' = 1, \qquad 4K = -\zeta^4 \tag{4.10}$$

где штрихами обозначены производные по s.

Путем непосредственной проверки нетрудно убедиться в том, что система (4.10) допускает 5-параметрическую группу, порожденную операторами

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \qquad Y_2 = s\frac{\partial}{\partial s} - \sigma\frac{\partial}{\partial \sigma} + 2h\frac{\partial}{\partial h}, \qquad Y_3 = \frac{\partial}{\partial \sigma}$$
$$Y_4 = 2\sigma\frac{\partial}{\partial \sigma} - \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta} - 4K\frac{\partial}{\partial K}, \qquad Y_5 = \sigma^2\frac{\partial}{\partial \sigma} - \sigma\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta} - 4\sigma K\frac{\partial}{\partial K} \tag{4.11}$$

Этим операторам соответствуют следующие однопараметрические группы преобразований с параметрами $a_i\,(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ (не написанные величины инвариантны относительно соответствующего оператора)

$$(Y_1) \qquad \bar{s} = s + a_1$$
$$(Y_2) \qquad \bar{s} = a_2 s, \qquad \bar{\sigma} = \frac{1}{a_2}\sigma, \qquad \bar{h} = a_2{}^2 h$$
$$(Y_3) \qquad \bar{\sigma} = \sigma + a_3 \tag{4.12}$$
$$(Y_4) \qquad \bar{\sigma} = a_4{}^2\sigma, \qquad \bar{\zeta} = \frac{1}{a_4}\zeta, \qquad \bar{K} = \frac{1}{a_4{}^4}K$$
$$(Y_5) \qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - a_5\sigma}, \qquad \bar{\zeta} = (1 - a_5\sigma)\zeta, \qquad \bar{K} = (1 - a_5\sigma)^4 K$$

Группу преобразований, порожденную преобразованиями (4.12), мы обозначим через D. Система (4.10) допускает группу D и всякое решение этой системы любым преобразованием из D переводится снова в решение этой же системы. Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 2. Если $K_0(\sigma)$ есть допустимая функция Чаплыгина, соответствующая некоторому значению q, то при любых значениях постоянных M, a, b, c, d (вообще говоря комплексных) таких, что, $M \neq 0$ и, $ad - bc \neq 0$, функция

$$K(\sigma) = \frac{M}{(c\sigma + d)^4} K_0\left(\frac{a\sigma + b}{c\sigma + d}\right) \tag{4.13}$$

также является допустимой функцией Чаплыгина, соответствующей тому же значению q.

Для доказательства достаточно заметить, что каковы бы ни были постоянные M', a', b', c', d' такие, что $M' \neq 0$ и $a'd' - b'c' \neq 0$, можно путем суперпозиции преобразований (4.12) получить преобразование

$$\bar{\sigma} = \frac{a'\sigma + b'}{c'\sigma + d'}, \qquad \bar{K} = M'(c'\sigma + d')^4 K$$

В силу груииового свойства, если $K(\sigma)$ — допустимая функция, то $\bar{K}(\bar{\sigma})$ также есть допустимая функция. Вычисляя $\bar{K}(\bar{\sigma})$, последовательно находим

$$\sigma = \frac{d'\bar{\sigma} - b'}{-c'\bar{\sigma} + a'}, \qquad c'\sigma + d' = \frac{a'd' - b'c'}{-c'\bar{\sigma} + a'}$$
$$\bar{K}(\bar{\sigma}) = \frac{M'(a'd' - b'c')^4}{(-c'\bar{\sigma} + a')^4} K\left(\frac{d'\bar{\sigma} - b'}{-c'\bar{\sigma} + a'}\right)$$

Так как последняя формула лишь обозначениями отличается от (4.13), то теорема доказана.

Формула (4.13) определяет наиболее общее преобразование *функций* $K(\sigma)$, индуцированное преобразованиями группы D. Значит, по отношению к D все семейство функций $K(\sigma)$ распадается на классы *эквивалентных функций*, если считать эквивалентными две функции, связанные преобразованием (4.13). Теперь задача будет заключаться в том, чтобы найти эти классы через их простейших представителей.

Для этого заметим, что под действием D наряду с функциями $K(\sigma)$ преобразуются также и функции $h(s)$, являющиеся решениями уравнения (4.6). Так как переменные s и h при преобразованиях D подвергаются преобразованиям (Y_1) и (Y_2) из (4.12), то формула наиболее общего преобразования, которое претерпевает функция $h(s)$ под действием группы D, как легко видеть, может быть написана так:

$$h(s) = \frac{1}{l^2} h_0(ls + m) \tag{4.14}$$

где l, m — произвольные постоянные, $l \neq 0$.

Функции $K(\sigma)$, получаемые как решения системы (4.10) при фиксированной функции $h(s)$, входят в один и тот же класс. Действительно, при данной $h(s)$ изменение $K(\sigma)$ возможно, как это следует из формул (4.8), (4.9), только за счет произвола в выборе двух линейно независимых решений $\xi_0(s)$ и $\xi(s)$ одного и того же уравнения (4.7). Но этот произвол вполне исчерпывается преобразованием (4.13).

Если теперь ввести классы эквивалентных функций $h(s)$, относя в один класс две функции, связанные преобразованием (4.14), то каждому классу эквивалентных $h(s)$ будет соответствовать один и тот же класс эквивалентных $K(\sigma)$. Это следует из того, что если по $h_0(s)$ найдена $K_0(\sigma)$, а по $h(s)$, получаемой из (4.14), найдена $K(\sigma)$, то под действием надлежащего преобразования из D можно перевести $h(s)$ в $h_0(s)$, причем $K(\sigma)$ перейдет в $K_1(\sigma)$. В силу предыдущего замечания $K_1(\sigma)$ эквивалентна $K_0(\sigma)$, а значит, и $K(\sigma)$ эквивалентна $K_0(\sigma)$. Обратно, функции $h(s)$, определяемые по данной функции $K(\sigma)$, входят в один класс, как это показывают, например, уравнения

$$h = -\frac{1}{\zeta^2}\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \qquad s = -\int \frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\sigma}{\zeta}$$

вытекающие из (4.7) и (4.8).

Следовательно, между классами эквивалентных функций $K(\sigma)$ и $h(s)$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Это означает, что мы найдем все классы допустимых $K(\sigma)$, если поступим так: сначала найдем классы функций $h(s)$, а затем для каждого представителя $h_0(s)$ построим какую-нибудь одну функцию $K_0(\sigma)$.

Уравнение (4.6), определяющее $h(s)$, имеет общее решение

$$h(s) = {}^1/_2 qs^2 + C_1 s + C_2 \tag{4.15}$$

с произвольными постоянными C_1 и C_2. Теперь видно, что при $q \neq 0$ все решения $h(s)$ распадаются на два класса по характеру корней функции (4.15): класс I решений, имеющих двукратный корень, и класс II решений, имеющих простые корни. Всякие два решения из одного и того же класса связаны преобразованием (4.14), а решения из разных классов не могут быть переведены одно в другое этим преобразованием. В случае $q = 0$ мы отнесем к классу I решения (4.15) при $C_1 = 0$, а к классу II — решения (4.15) при $C_1 \neq 0$ (можно условно считать, что при $q = 0$ один или оба корня лежат в ∞; тогда классы I и II и здесь будут различаться по кратности корня $s = \infty$). Соответствующие классы функций $K(\sigma)$ будем обозначать символами (I, q) и (II, q).

Теперь остается для каждого из простейших представителей $h_0(s)$ найденных классов взять какие-нибудь два линейно независимые решения $\zeta_0(s)$ и $\zeta(s)$ соответствующего уравнения (4.7) и определить представители этих классов $K_0(\sigma)$ из параметрического представления (4.8), (4.9), которое можно, в силу теоремы 2, записать в более простой форме

$$K = \zeta^4(s), \qquad \sigma = \frac{\zeta_0(s)}{\zeta(s)} \tag{4.16}$$

Перейдем к вычислениям.

Класс (I, 0). Здесь можно взять $h_0(s) = 1$, а тогда решениями уравнения (4.7) будут, например, $\zeta_0 = e^s$, $\zeta = e^{-s}$. По (4.16), после исключения s, получим

$$K_0(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \qquad (4.17)$$

Класс (II, 0). Здесь удобно взять $h_0(s) = -2s$ и уравнение (4.7) будет

$$2(s\zeta')' + \zeta = 0$$

Заменой переменных $x = \sqrt{2s}$, $\zeta(s) = y(x)$ это уравнение приводится к уравнению Бесселя с нулевым индексом

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Взяв в качестве двух линейно независимых решений этого уравнения функцию Бесселя $y = J_0(x)$ и бесселеву функцию второго рода $y_0 = Y_0(x)$, получим

$$K_0(\sigma) = J_0^4(\sqrt{2s}), \qquad \sigma = \frac{Y_0(\sqrt{2s})}{J_0(\sqrt{2s})} \qquad (4.18)$$

В общем случае при $q \neq 0$ удобно ввести вместо q новый параметр ν, положив

$$\frac{2}{q} = \nu(\nu + 1) \qquad (4.19)$$

Класс (I, q) *при* $q \neq 0$. Здесь можно взять $h_0(s) = \frac{1}{2} qs^2$. С учетом обозначения (4.9) уравнение (4.7) будет

$$(s^2\zeta')' - \nu(\nu + 1)\zeta = 0$$

т. е. уравнением Эйлера с показателями ν и $-\nu - 1$. Два линейно независимых решения в случае $\nu \neq -1/2$ будут

$$\zeta_0 = s^{-\nu-1}, \qquad \zeta = s^\nu$$

и после исключения s из формул (4.16) получаем

$$K_0(\sigma) = \sigma^{-\frac{4\nu}{2\nu+1}} \qquad (4.20)$$

Случай $\nu = -1/2$ соответствует $q = -8$. Поэтому следует выделить *класс* (I, —8). Здесь два решения уравнения (4.7) можно взять в виде

$$\zeta_0 = -2\frac{\log s}{\sqrt{s}}, \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

Отсюда $K_0 = s^{-2}$ и $\sigma = -2\log s$, или $s = e^{-\sigma/2}$. Следовательно, представителем этого класса будет

$$K_0(\sigma) = e^\sigma \qquad (4.21)$$

Класс (II, q) *при* $q \neq 0$. Будем считать, что корни $h_0(s)$ находятся в точках ± 1, так что $h_0(s) = (1/2)q(s^2 - 1)$. Тогда уравнение (4.7) становится уравнением для функций Лежандра

$$[(1 - s^2)\zeta']' + \nu(\nu + 1)\zeta = 0 \qquad (4.22)$$

В качестве линейно независимых решений можно взять функцию Лежандра степени ν первого рода $\zeta = P_\nu(s)$ и функцию Лежандра степени ν второго рода $\zeta_0 = Q_\nu(s)$. Получаем

$$K_0(\sigma) = P_\nu^4(s), \qquad \sigma = \frac{Q_\nu(s)}{P_\nu(s)} \qquad (4.23)$$

Окончательный результат этих вычислений и им предшествовавших рассуждений может быть сформулирован в следующей форме:

Теорема 3. Всякая допустимая функция Чаплыгина либо совпадает с одной из функций (4.17),(4.18), (4.20), (4.21), (4.23), либо получается из одной из этих функций с помощью группового преобразования (4.13).

Заметим, что в построенную здесь классификацию укладывается также и случай $h = 0$, если при этом условно считать $q = \infty$, причем в классе (II, ∞) взять в качестве представителя $K_0(\sigma) = 1$. Это следует из того, что преобразование (4.13) переводит $K_0(\sigma) = 1$ в функцию (4.1).

§ 5. Канонические формы допустимого уравнения Чаплыгина. Для уравнения Чаплыгина всегда $p = 1$. Значит, в силу следствия из теоремы *1*, для эквивалентности двух допустимых уравнений Чаплыгина необходимо и достаточно, чтобы эти уравнения имели одинаковые значения параметра q. Уравнение Чаплыгина с инвариантом h эквивалентно по функции уравнению

$$\psi_{\lambda\mu}{}^{\circ} - h\psi^{\circ} = 0 \tag{5.1}$$

так как последнее также имеет инварианты, равные h. Прямым вычислением устанавливается, что подстановка, переводящая (1.14) в (5.1), такова

$$\psi = \frac{1}{\zeta}\psi^{\circ} \tag{5.2}$$

где функция ζ определена уравнением (4.5).

Покажем, каким образом уравнение (5.1) приводится к канонической форме, если оно является допустимым. Повторение рассуждения, использованного при доказательстве теоремы *1*, применительно к (5.1) дает следующие результаты.

Если $q = 0$, то существуют функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\mu)$, такие что

$$h = \alpha'(\lambda)\beta'(\mu) \tag{5.3}$$

Тогда замена переменных

$$\alpha = \alpha(\lambda), \qquad \beta = \beta(\mu), \qquad \psi^{\circ}(\lambda, \mu) = \Psi(\alpha, \beta) \tag{5.4}$$

приводит уравнение (5.1) к виду

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi \tag{5.5}$$

Если $q \neq 0$, то существуют функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\mu)$, такие что

$$h = \frac{2}{q}\frac{\alpha'(\lambda)\beta'(\mu)}{[\alpha(\lambda) + \beta(\mu)]^2} \tag{5.6}$$

и та же замена переменных (5.4) приводит (5.1) к уравнению

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{\nu(\nu+1)}{(\alpha+\beta)^2}\Psi \tag{5.7}$$

где вместо параметра q введен параметр ν согласно (4.19).

Таким образом, всякое допустимое уравнение Чаплыгина эквивалентно либо уравнению (5.5), либо уравнению (5.7).

Выясним, какой вид будут иметь функции $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\mu)$. Для этого следует вычислить инвариант h как функцию от $t = \lambda + \mu$, что требует интегрирования уравнения (4.4). При этом достаточно ограничиться представителями классов эквивалентных функций $h(s)$.

Класс (I, 0). Здесь $h = 1$; из (4.4) имеем $s = t$, так что $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$.

Класс (II, 0). Здесь $h = -2s$; из (4.4) находим $2s = -e^{-2t}$, так что $h = e^{-2t} = e^{-2\lambda}e^{-2\mu}$ и, следовательно, $\alpha = {}^1/_2 e^{-2\lambda}$, $\beta = {}^1/_2 e^{-2\mu}$.

Класс (I, q) при $q \neq 0$. Здесь $h = {}^1/_2 qs^2$; из (4.4) получаем $s = -\nu(\nu+1)/t$, так что $h = \nu(\nu+1)/t^2$. Поэтому $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$.

Класс (I, —8) при этом ничем не выделяется из остальных классов (I, q).

Класс (II, q) при $q \neq 0$. Здесь $h = {}^1/_2 q(s^2 - 1)$; интегрируя (4.4), получаем $s = -\operatorname{cth} {}^1/_2 qt$ и $h = q/2\operatorname{sh}^2({}^1/_2 qt)$. Так как

$$\operatorname{sh}^2\frac{qt}{2} = \frac{1}{4}e^{-q\lambda}e^{q\mu}(e^{q\lambda} - e^{-q\mu})^2$$

то здесь $\alpha = e^{q\lambda}$, $\beta = -e^{-q\mu}$.

Укажем еще то групповое преобразование, которое переводит любое решение допустимого уравнения Чаплыгина снова в решение этого же уравнения. Это достаточно сделать для каждой из канонических форм (5.5) и (5.7), так как замена переменных, приводящая допустимое уравнение к одной из них, известна. Используя результаты § 3, получаем, что трехпараметрическое преобразование семейства решений в себя для уравнения (5.5) таково

$$\overline{\Psi}(\alpha,\ \beta) = \Psi\left(a\alpha + b,\ \frac{1}{a}\beta + c\right) \qquad (a \neq 0) \tag{5.8}$$

Для уравнения (5.7) аналогичное преобразование имеет вид

$$\overline{\Psi}(\alpha,\ \beta) = \Psi\left(\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},\ \frac{a\beta + b}{c\beta + d}\right) \qquad (ad - bc \neq 0) \tag{5.9}$$

В формулах (5.8) и (5.9) a, b, c, d — произвольные постоянные.

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о том, как устроен ряд Лапласа для каждого из допустимых уравнений Чаплыгина. В силу свойств эквивалентности достаточно изучить этот ряд для канонической формы такого уравнения. В случае канонической формы (5.5) все члены ряда Лапласа (2.10) совпадают с исходным уравнением. Для уравнения (5.7) применение метода Лапласа приводит к новым уравнениям, отличающимся от исходного значениями параметра ν. Уравнение (2.13) показывает, что для того чтобы ряд Лапласа обрывался при некотором n, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{2}{q} = n\,(n + 1) \tag{5.10}$$

Сопоставляя это равенство с определением ν (4.19), находим, что оно выполнено при $\nu = n$. Кроме того, так как $n\,(n + 1) = (-n - 1)\,(-n)$, то в этом случае ряд Лапласа обрывается с двух концов.

Следовательно, если параметр ν является целым числом ($\nu \neq 0$ и $\nu \neq -1$), то для допустимого уравнения Чаплыгина может быть написана формула общего решения с двумя произвольными функциями, не содержащая квадратур. Для канонического уравнения (5.7) эта формула, как известно [17], имеет вид

$$\Psi(\alpha,\ \beta) = (\alpha + \beta)^{n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial\alpha^n\,\partial\beta^n} \frac{F(\alpha) + G(\beta)}{\alpha + \beta} \tag{5.11}$$

с произвольными функциями $F(\alpha)$ и $G(\beta)$.

Если ν не равно целому числу, то ряд Лапласа будет бесконечным. Но так как допустимое уравнение Чаплыгина эквивалентно уравнению (5.7), то его функция Римана выражается через гипергеометрическую функцию [17]. Поэтому и в общем случае для допустимого уравнения Чаплыгина можно написать формулу общего решения с двумя произвольными функциями. Они войдут, однако, под знаком некоторых квадратур.

Что касается газодинамической задачи, то отметим здесь, что апроксимации С. А. Христиановича [5] и Г. А. Домбровского [8] используют значение $\nu = 1$, что приводит к допустимым апроксимирующим уравнениям соответственно классов (I, 1) и (II, 1).

§ 6. Уравнения типа Трикоми. Исследуем допустимые функции Чаплыгина, которые можно использовать для апроксимации вблизи точки перехода через скорость звука $\sigma = 0$. Необходимым условием надежности такой апроксимации является выполнение равенств типа (1.8).

Будем говорить, что допустимое уравнение Чаплыгина (1.7) есть уравнение типа Трикоми (коротко: типа T), если $K(\sigma)$ является аналитической функцией от σ в окрестности точки $\sigma = 0$ и если $K(0) = 0$, а $K'(0) \neq 0$. При этом соответствующую функцию $K(\sigma)$ также будем называть функцией типа T. Задача состоит в том, чтобы найти все уравнения типа T.

Само уравнение Трикоми

$$\sigma\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0 \tag{6.1}$$

есть уравнение типа T, так как $K(\sigma) = \sigma$ является одной из допустимых функций. Она получается из (4.20) при значении

$$\nu = -\frac{1}{6} \tag{6.2}$$

то есть является представителем класса $(\mathrm{I}, -{}^{72}/_5)$.

Теорема 4. Всякое уравнение типа T эквивалентно уравнению Трикоми.

Доказательство этой теоремы получится в результате разыскания соответствующих $K(\sigma)$ в различных классах. Обратимся к формулам параметрического представления допустимых функций Чаплыгина (4.16). Вообще точку, в которой $K = 0$ и σ конечна, будем называть переходной точкой. Пусть в переходной точке $s = s_0$. Тогда из формул (4.16) следует, что $\zeta(s_0) = 0$ и $\zeta_0(s_0) = 0$. Это показывает, что переходная точка должна быть особой точкой уравнения (4.7).

Заметим теперь, что если для некоторой $h_0(s)$ какая-либо особая точка уравнения (4.7) является переходной, то после преобразования (4.14) преобразованная точка будет переходной для нового уравнения с преобразованной функцией $h(s)$. Поэтому при отыскании переходных точек достаточно ограничиться рассмотрением стандартных уравнений (4.7), соответствующих простейшим представителям классов эквивалентных функций $h(s)$.

В случае $q = 0$ переходными точками могли бы быть только $s = 0$ и $s = \infty$. Однако ни при $h = 1$, ни при $h = -2s$ они таковыми не являются. Случай $h = 1$ тривиален. Если $h = -2s$, то этот вывод следует из рассмотрения поведения $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Значит, в классах (I, 0) и (II, 0) уравнений типа T нет.

В случае класса (I, q) переходной точкой может быть только $s = \infty$, так как вид двух линейно независимых решений $\zeta_0 = s^{-\nu-1}$, $\zeta = s^{\nu}$ уравнения (4.7) показывает, что требование, чтобы точка $s = 0$ была переходной, приводит к противоречивым неравенствам $\nu > 0$ и $-\nu - 1 > 0$. Точка $s = \infty$ будет переходной для функции (4.20), если $-4\nu/(2\nu + 1) = 1$, т. е. $\nu = -1/6$. Это приводит к уравнению Трикоми (6.1).

Наконец, рассмотрим классы (II, q) при $q \neq 0$. Здесь $h = \frac{1}{2}\, q\,(s^2 - 1)$, и переходными точками могут быть только особые точки $s = \pm 1$ и $s = \infty$. Однако уравнение (4.22) имеет в каждой из особых точек $s = \pm 1$ оба показателя равными нулю. Поэтому одно из решений в какой-нибудь из этих точек будет регулярным, а другое будет обладать логарифмической особенностью. Отсюда следует, что точки $s = \pm 1$ переходными не являются. Значит, и в этом классе у каждой допустимой функции может быть не более одной переходной точки, соответствующей значению $s = \infty$. В точке $s = \infty$ уравнение (4.22) имеет показатели $-\nu$ и $\nu + 1$. Если эта точка — переходная, то показатели должны быть различны, так как иначе (при $\nu = -1/2$) одно из решений имело бы при $s = \infty$ логарифмическую особенность. Следовательно, существуют два линейно независимых решения, которые при $|s| > 1$ представимы в виде

$$\zeta = s^{\nu} f_1(s^{-1}), \qquad \zeta_0 = s^{-\nu-1} f_2(s^{-1}) \tag{6.3}$$

где $f_1(s^{-1})$ и $f_2(s^{-1})$ — степенные ряды от s^{-1}, сходящиеся в круге $|s^{-1}| < 1$, причем $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Отсюда по формулам (4.16) получаем

$$K(\sigma) = \sigma^{-\frac{4\nu}{2\nu+1}} g(\sigma), \qquad g(0) = 1$$

Значит, для того чтобы $K(\sigma)$ была типа T, необходимо выполнение равенства

$$-\frac{4\nu}{2\nu+1}=1$$

приводящего снова к значению $\nu=-{}^1/_6$.

Этим теорема 4 доказана, так как мы нашли, что допустимые функции $K(\sigma)$ типа T могут содержаться только в классах (I, $-{}^{72}/_5$) и (II, $-{}^{72}/_5$), после чего остается применить следствие теоремы 1.

Мы покажем теперь, что в классе (II, $-{}^{72}/_5$) действительно содержится функция $K(\sigma)$ типа T. Для этого выполним явное построение степенных рядов в формулах (6.3) и заодно докажем аналитичность получающейся функции $K(\sigma)$.

С этой целью перейдем в уравнении (4.22) к новой независимой переменной τ по формулам

$$s^2=\tau, \qquad \zeta(s)=\delta(\tau) \tag{6.4}$$

Тогда уравнение (4.22) примет вид

$$\tau(\tau-1)\delta''+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tau\right)\delta'-\frac{1}{4}\nu(\nu+1)\delta=0 \tag{6.5}$$

В точке $\tau=\infty$ это гипергеометрическое уравнение имеет показатели $-{}^1/_2\nu$ и ${}^1/_2(\nu+1)$ и, значит, два его линейно независимых решения можно записать через гипергеометрические ряды следующими формулами

$$\begin{aligned}\delta&=\tau^{\frac{\nu}{2}}F\left(-\frac{\nu}{2},\ -\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2};\ -\nu+\frac{1}{2};\ \frac{1}{\tau}\right)\\ \delta_0&=\tau^{-\frac{\nu+1}{2}}F\left(\frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu}{2}+1;\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{\tau}\right)\end{aligned} \tag{6.6}$$

Возвращаясь к переменной s и беря только интересующее нас здесь значение $\nu=-{}^1/_6$, получим два линейно независимых решения уравнения (4.22), имеющие требуемый вид (6.3)

$$\zeta=s^{-1/6}F\left(\frac{1}{12},\ \frac{7}{12};\ \frac{2}{3};\ s^{-2}\right),\qquad \zeta_0=s^{-5/6}F\left(\frac{5}{12},\ \frac{11}{12};\ \frac{4}{3};\ s^{-2}\right) \tag{6.7}$$

Представление соответствующей допустимой функции Чаплыгина по формулам (4.16) будет

$$K=s^{-\frac{2}{3}}\left[F\left(\frac{1}{12},\ \frac{7}{12};\ \frac{2}{3};\ s^{-2}\right)\right]^4,\qquad \sigma=s^{-\frac{2}{3}}\frac{F\left(\frac{5}{12},\ \frac{11}{12};\ \frac{4}{3};\ s^{-2}\right)}{F\left(\frac{1}{12},\ \frac{7}{12};\ \frac{2}{3};\ s^{-2}\right)} \tag{6.8}$$

Вторая из этих формул может быть записана в виде

$$\sigma^3=s^{-2}f(s^{-2})$$

где $f(s^{-2})$ аналитична в окрестности точки $s^{-2}=0$, причем $f(0)=1$. Отсюда следует, что $\frac{1}{s^2}$ есть аналитическая функция от σ^3. Значит, аналитической функцией от σ будет также отношение

$$\frac{K}{\sigma}=\frac{\left[F\left(\frac{1}{12},\ \frac{7}{12};\ \frac{2}{3};\ s^{-2}\right)\right]^5}{F\left(\frac{5}{12},\ \frac{11}{12};\ \frac{4}{3};\ s^{-2}\right)}$$

а с ним и определяемая представлением (6.8) допустимая функция $K(\sigma)$. Следовательно, последняя будет типа T.

В заключение отметим, что если $K_0(\sigma)$ есть какая-нибудь допустимая функция типа T, то в силу группового свойства (4.13) при любых значениях постоянных M, c, d ($M \neq 0$, $d \neq 0$) функция

$$K(\sigma) = \frac{M}{(c\sigma + d)^4} K_0\left(\frac{\sigma}{c\sigma + d}\right) \tag{6.9}$$

также будет допустимой функцией типа T. Оказывается, этим исчерпываются все функции типа T, так что имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. Всякая допустимая функция Чаплыгина типа T может быть получена либо из функции $K_0(\sigma) = \sigma$, либо из функции $K_0(\sigma)$, определяемой уравнениями (6.8), с помощью группового преобразования (6.9).

Для доказательства вспомним, что функции $K(\sigma)$ типа T, эквивалентные одной из таких функций $K_0(\sigma)$, входят в семейство (4.13). Требование $K(0) = 0$ приводит к уравнению $K_0(b/d) = 0$, означающему, что точка $\sigma = b/d$ должна быть переходной. Это возможно только при $b = 0$, так как иначе у функции $K_0(\sigma)$ были бы две переходные точки, а в процессе доказательства теоремы 4 было показано, что никакая из допустимых функций $K(\sigma)$ не может иметь более одной переходной точки. Если $b = 0$, то равенство $K(\sigma) = 0$ выполнено в силу $K_0(0) = 0$. Кроме того, тогда

$$K'(0) = Mad^{-5}K_0'(0) \tag{7.0}$$

и поэтому будет $K'(0) \neq 0$, если $K_0'(0) \neq 0$. Очевидно, что при $b = 0$ в формуле (4.13) можно считать $a = 1$. Этим доказано, что каждый подкласс эквивалентных функций типа T описывается формулой (6.9). Так как найденные выше функции типа T, а именно, $K = \sigma$ и функция (6.8) являются представителями классов эквивалентных функций ($\mathrm{I}, -{}^{72}/_5$) и ($\mathrm{II}, -{}^{72}/_5$) и ни в каких прочих классах функций типа T нет, то теорема доказана.

§ 7. Уравнения типа Лапласа. Здесь мы найдем все те из допустимых функций Чаплыгина, которые годятся для аппроксимации газодинамической функции $K(\sigma)$ в предельном случае малых скоростей, т. е. при $\sigma \to +\infty$. Надежность такой аппроксимации оценивается равенством (1.9), показывающим, что при $\sigma \to +\infty$ уравнение Чаплыгина переходит асимптотически в уравнение Лапласа.

Будем говорить, что допустимое уравнение (1.7) есть уравнение типа Лапласа (коротко: типа L), если $K(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$ удовлетворяет условию вида (1.9). Соответствующую функцию $K(\sigma)$ также будем называть функцией типа L. Ясно, что само уравнение Лапласа есть уравнение типа L.

Теорема 6. Функции Чаплыгина типа L могут быть только функциями из классов (II, q), причем при любом q в классе (II, q) содержится функция типа L. Если $K_0(\sigma)$ — одна из таких функций, то общий вид функций типа L того же класса дается формулой

$$K(\sigma) = K_0(a\sigma + b) \tag{7.1}$$

где a, b — произвольные постоянные, $a > 0$.

Для доказательства назовем критической точкой такую точку s_∞, в которой $\sigma = \infty$ и $K \neq 0$, $K \neq \infty$. Из представления (4.16) следует, что в критической точке должно быть $\zeta \neq 0$, $\zeta \neq \infty$ и $\zeta_0 = \infty$. Поэтому критической точкой может быть только особая точка уравнения (4.7).

Легко видеть, что в классах (I, q) критических точек нет. Для класса (I, 0) это следует из того, что в единственно возможной критической точке $s_\infty = \infty$ ни одно из решений уравнения (4.7) не имеет конечного значения, отличного от нуля. В классах (I, q) при $q \neq 0$ критическими точками могут быть $s_\infty = 0$ и $s_\infty = \infty$. Однако и в этом случае нет решений, имеющих в точке s_∞ конечное ненулевое значение.

Покажем теперь, что в любом классе (II, q) есть функция типа L. Это следует из того, что в данном случае уравнение (4.7) имеет регулярную особую точку, в которой оба его показателя равны нулю. Одно из решений в этой точке конечно и может быть взято в качестве функции ζ в представлении (4.16), а другое обязательно имеет логарифмическую особенность и может быть взято в качестве функции ζ_0.

В классе (II, 0) функцией типа L является функция (4.18), а в классах (II, q) при $q \neq 0$ — функция (4.23), причем в первом случае критическая точка есть $s_\infty = 0$, а во втором — точка $s_\infty = 1$.

Наконец, пусть $K_0(\sigma)$ — одна из функций типа L, построенная по формулам (4.16) с помощью линейно независимых решений $\zeta(s)$ и $\zeta_0(s)$ уравнения (4.7). Общий вид допустимых функций того класса, представителем которого является $K_0(\sigma)$, дается формулой (4.13). Для завершения доказательства теоремы нам остается доказать, что если при этом снова получается функция типа L, то можно считать $c = 0$.

Допустим, что $c \neq 0$. Тогда точке $\sigma_* = a/c$ будет соответствовать такая точка s_*, в которой должны быть выполнены равенства

$$\zeta(s_*) = \infty, \qquad \frac{\zeta_0(s_*)}{\zeta(s_*)} \neq \infty \tag{7.2}$$

Эти формулы показывают, что s_* есть особая точка для уравнения (4.7). Покажем, что $s_* \neq \infty$. Для класса (II, 0) это очевидно, так как при $s \to +\infty$ оба решения, $J_0(\sqrt{2s})$ и $Y_0(\sqrt{2s})$, стремятся к нулю.

Рассмотрим какой-нибудь класс (II, q) при $q \neq 0$. Показатели двух линейно независимых решений уравнения (4.7) в точке $s = \infty$ равны $-\nu$ и $\nu + 1$. Для того чтобы при $s_* = \infty$ было возможно (7.2), параметр ν должен находиться вне промежутка $[-1, 0]$, так как при $-1 < \nu < 0$ оба решения в точке $s = \infty$ обращаются в нуль, а значения $\nu = -1$ и $\nu = 0$ не соответствуют никакому конечному значению q. Далее, не нарушая общности рассуждения, можно считать $\nu > 0$, так как в противном случае мы заменили бы ν на $-\nu - 1$, что сохранило бы значение q.

Аналитическое продолжение решений $\zeta(s)$ и $\zeta_0(s)$ в область $|s| > 1$ имеет вид

$$\zeta = As^\nu f_1(s^{-1}) + Bs^{-\nu-1} f_2(s^{-1}), \qquad \zeta_0 = A_0 s^\nu f_1(s^{-1}) + B_0 s^{-\nu-1} f_2(s^{-1}) \tag{7.3}$$

где A, B, A_0, B_0 — некоторые постоянные, такие что $AB_0 - A_0 B \neq 0$, а $f_1(s^{-1})$ и $f_2(s^{-1})$ — степенные ряды по целым степеням s^{-1}, причем $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Так как $\nu > 0$, то для выполнения условия $\zeta \to \infty$ при $s \to \infty$ необходимо, чтобы $A \neq 0$. Отсюда для σ получаем следующее выражение

$$\sigma = \frac{\zeta_0}{\zeta} = \frac{A_0 + B_0 s^{-2\nu-1} f_3(s^{-1})}{A + Bs^{-2\nu-1} f_3(s^{-1})} \tag{7.4}$$

где $f_3(s^{-1})$ есть функция с теми же свойствами, что и $f_2(s^{-1})$. В силу (7.2) имеем $A_0 = A\sigma_*$. Поэтому из формулы (7.4) вытекает, что при $s \to \infty$

$$(\sigma - \sigma_*)\, s^{2\nu+1} \to \frac{AB_0 - A_0 B}{A^2} \neq 0$$

Следовательно, вблизи $\sigma = \sigma_*$

$$s \sim (\sigma - \sigma_*)^{-\frac{1}{2\nu+1}}$$

Формула (7.3) для ζ и представление (4.16) вблизи $\sigma = \sigma_*$ дают

$$K_0(\sigma) \sim (\sigma - \sigma_*)^{-\frac{4\nu}{2\nu+1}}$$

Значит, при $\sigma \to \infty$ в силу (4.13) имеем

$$K(\sigma) = \frac{M}{(c\sigma + d)^4} K_0 \left(\sigma_* + \frac{bc - ad}{c(c\sigma + d)} \right) \sim (c\sigma + d)^{\frac{4\nu}{2\nu+1} - 4}$$

так что $K(\sigma)$ может быть функцией типа L, только если показатель в последнем выражении равен нулю. Однако это возможно лишь при $\nu = -1$, а это не может соответствовать конечному значению q. Этим доказательство того, что в формулах (7.2) обязательно $s_* \neq \infty$, закончено.

В классе (II, 0) есть всего две особые точки, $s = 0$ и $s = \infty$, причем первая из них уже использована при построении функции типа L (4.18). Поэтому здесь допущение $c \neq 0$ приводит к противоречию.

В классе (II, q) при $q \neq 0$ имеются три особые точки, $s = \pm 1$ и $s = \infty$. Допущение, что $c \neq 0$, исключает точку $s_* = \infty$. Предположим, что в качестве $K_0(\sigma)$ взята функция, для которой критической точкой является точка $s_\infty = 1$. Очевидно, что эта функция определена с точностью до преобразования (7.1). Если в результате преобразования (4.13) с этой $K_0(\sigma)$ получается снова функция типа L, то при $c \neq 0$ критической точкой для новой функции $K(\sigma)$ может быть только точка $s_\infty = -1$. Но уравнение, с помощью решений которого строится $K(\sigma)$, не меняется при замене s на $-s$. Поэтому совокупность функций типа L с критической точкой $s_\infty = -1$ совпадает с совокупностью таких функций для $s_\infty = 1$. Таким образом, критическую точку $s_\infty = -1$ можно не принимать во внимание.

Мы получаем, что преобразования, переводящие функцию $K_0(\sigma)$ типа L снова в функцию типа L, можно считать сохраняющими критическую точку, соответствующую $K_0(\sigma)$. Это, очевидно, будут те и только те преобразования, в которых $c = 0$. Но если $c = 0$, то все такие преобразования можно записать формулой (7.1) и теорема доказана.

Покажем, что существует такая допустимая функция $K(\sigma)$, которая является одновременно функцией типа T и типа L.

Из теорем 5 и 6 следует, что искомая функция может содержаться только в классе (II, $-{}^{72}/_5$). Переходной точкой является точка $s_0 = \infty$, а в качестве критической точки можно взять $s_\infty = 1$.

Отправляясь от функции $K_0(\sigma)$ типа T согласно (6.8), можно подобрать преобразование (6.9) так, чтобы получилась функция типа L. Для этого достаточно заменить решение ζ согласно (6.7) такой линейной комбинацией ζ_1 решений ζ и ζ_0, чтобы аналитическое продолжение ζ_1 было регулярно в точке $s = 1$. Вместо переменной s можно, конечно, воспользоваться переменной τ согласно (6.4). Но мы имеем единственное, с точностью до постоянного множителя, решение уравнения (6.5), регулярное в точке $\tau = 1$, а именно (при $\nu = -{}^1/_6$),

$$\delta_1 = F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}; 1; 1 - \tau\right)$$

Продолжив этот гипергеометрический ряд в область $|\tau| > 1$, получим формулу

$$\delta_1 = c_1 \delta + d_1 \delta_0$$

где δ и δ_0 определены в (6.6), а коэффициенты c_1 и d_1 имеют значения

$$c_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}, \qquad d_1 = \frac{\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)} \tag{7.5}$$

Таким образом, получаем функцию $K_*(\sigma)$, одновременно типа T и типа L, определяемую уравнениями

$$\begin{gathered} K_* = \left[F\left(\tfrac{1}{12}, \tfrac{5}{12}; 1; 1 - s^2\right)\right]^4 \\ \sigma = \frac{F\left(\frac{5}{12}, \frac{11}{12}; \frac{4}{3}; s^{-2}\right)}{s^{2/3} F\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; \frac{2}{3}; s^{-2}\right) - QF\left(\frac{5}{12}, \frac{11}{12}; \frac{4}{3}; s^{-2}\right)} \end{gathered} \tag{7.6}$$

где

$$Q = -\frac{d_1}{c_1} = \frac{3\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)} \tag{7.7}$$

При этом, как нетрудно проверить, функция $K_*(\sigma)$ получается из «стандартной» функции типа T (6.8), которую обозначим через $K_0(\sigma)$, посредством группового преобразования

$$K_*(\sigma) = \frac{c_1^4}{(1+Q\sigma)^4} K_0\left(\frac{\sigma}{1+Q\sigma}\right) \tag{7.8}$$

Функция $K_*(\sigma)$ дает хорошую аппроксимацию газодинамической функции Чаплыгина во всей дозвуковой, а также в околозвуковой области. Эта функция была найдена из других соображений и использована в приложениях Жерменом и Лиже [15].

В заключение заметим, что аналогично можно найти все допустимые уравнения, удовлетворяющие условию (1.10). Это условие требует наличия у функции $K(\sigma)$ «предельной» точки, т. е. такой точки s_1, в которой $\sigma = \sigma_1$, $K = \infty$. В предельной точке должно быть $\zeta = \infty$ и $\zeta_0 = \infty$, а отношение ζ_0/ζ конечно и отлично от нуля. Поэтому предельная точка также обязана быть особой точкой уравнения (4.7), а именно, $s_1 = \infty$. Легко видеть, что соответствующие функции $K(\sigma)$ содержатся в классах (I, q_1), (II, q_1), где

$$\frac{2}{q_1} = \nu_1(\nu_1+1), \qquad \nu_1 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \tag{7.9}$$

При этом допустимых функций типа T, удовлетворяющих условию (1.10), нет. Это означает, что невозможно получить аппроксимацию газодинамического уравнения Чаплыгина, хорошую во всей сверхзвуковой и околозвуковой областях одновременно.

Поступила
9 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Диссертация, 1902. ГИТТЛ, 1949.
2. Христианович С. А. Обтекание тел газом с большими дозвуковыми скоростями. Тр. ЦАГИ, 1940, № 481.
3. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
4. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. X, вып. 4.
5. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвуковых течений газа. ПММ, 1947, т. XI, вып. 2.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики, 1950.
7. Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа. ДАН, 1950, т. 70.
8. Домбровский Г. А. О приближенном интегрировании уравнений сверхзвукового течения газа. Сб. «Теоретическая гидромеханика», 1953, № 11, вып. 3.
9. Валландер С. В. Об интегрировании гиперболической системы двух уравнений при двух независимых переменных. ДАН, 1952, т. 83, № 5.
10. Юрьев И. М. К теории плоских движений газа. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 1.
11. Гриб А. А. и Рябинин А. Г. К вопросу о приближенном интегрировании уравнения плоского установившегося движения газа. ДАН, 1955, т. 100, № 3.
12. Овсянников Л. В. Об отыскании группы линейного дифференциального уравнений второго порядка. ДАН, 1960, т. 132, № 1.
13. Bers L. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. London, 1958.
14. Tomotika S., Ko Tamada. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7; 1951, vol. 8—9.
15. Germain P., Liger M. Une nouvelle approximation pour l'étude des écoulements subsoniques et transsoniques. Compt. Rend., 1952, № 234.
16. Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse lineares partieller Differentialgleichungen. Arch. for Math., Bd., VI, H. 3, 1881.
17. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces, vol. 3, Paris, 1889.