

УДК 535.59

## НАЧАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ПОГРУЖЕННОЙ СФЕРОЙ

Е. В. Пяткина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена нелинейная задача о движении твердой сферы вблизи свободной поверхности бесконечно глубокой жидкости. Для случая движения с постоянным ускорением из состояния покоя решение ищется в виде ряда по целым степеням времени. Найдены коэффициенты разложения до четвертой степени включительно для формы свободной поверхности и силы, действующей на сферу. Проведено сравнение решений задачи для линейных и нелинейных условий на свободной границе.

Ключевые слова: поверхностные волны, погруженная сфера, граничное интегральное уравнение.

**Введение.** Задача о движении тел под поверхностью тяжелой жидкости исследовалась многими авторами. Аппроксимация тела, движущегося под свободной поверхностью, особенностью потенциала скорости впервые была предложена Г. Ламбом [1] и в дальнейшем использовалась Т. Хэвелоком в задаче о движении сферы в глубокой жидкости [2]. В [3] движение сферы исследовалось методом распределения особенностей по ее поверхности. Все указанные решения получены в рамках линейной теории для случая установившегося движения. В [4] в нелинейной постановке рассматривалось импульсивное движение полностью погруженного цилиндра из состояния покоя при постоянных скорости и ускорении. В этой работе найдена начальная асимптотика по времени формы свободной поверхности и действующей на цилиндр силы. В [5] та же задача решена в дипольном приближении. Волны, возбуждаемые в двухслойной жидкости естественно всплывающим шаром, рассматривались в [6].

В данной работе для решения нелинейной нестационарной задачи используется метод сведения исходной задачи Коши — Пуассона к системе интегродифференциальных уравнений на свободной границе. Ранее этот метод широко использовался при исследовании корректности задач о движении жидкости со свободными границами [7]. С помощью этого метода в работе [8] получено и обосновано дипольное приближение задачи о движении кругового цилиндра под поверхностью жидкости. В [9, 10] доказана однозначная разрешимость в малом по времени нестационарной задачи о движении погруженной сферы и описан способ ее приближенного моделирования системой мультиполей, сосредоточенных в центре.

Основной целью данной работы является построение начальной асимптотики по времени формы свободной поверхности (с учетом нелинейности условий на ней) и действующей на сферу силы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается движение полностью погруженной сферы в бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью. Ускорение свободного падения  $g$  направлено вниз вдоль оси  $z$ , плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с невозмущенной свободной поверхностью. Сфера радиуса  $R$  дви-

жется прямолинейно с постоянным ускорением  $\mathbf{A}$ . Выберем в качестве масштаба ускорения величину  $|\mathbf{A}|$ , в качестве масштаба пространственных переменных расстояние  $H$  от невозмущенной свободной поверхности до центра сферы в начальный момент времени. Тогда масштабы скорости, потенциала, времени и давления соответственно равны  $\sqrt{|\mathbf{A}|H}$ ,  $H\sqrt{|\mathbf{A}|H}$ ,  $\sqrt{H/|\mathbf{A}|}$ ,  $\rho|\mathbf{A}|H$  ( $\rho$  — постоянная плотность жидкости). Введем безразмерный параметр — число Фруда  $\text{Fr} = \sqrt{|\mathbf{A}|/g}$ . Основные безразмерные параметры задачи:  $\varepsilon = R/H$ , координаты центра сферы  $\mathbf{x}_c = (a_1 t^2/2, a_2 t^2/2, a_3 t^2/2 - 1)$ , время  $t$ , скорость сферы  $\mathbf{v}_c = (a_1 t, a_2 t, a_3 t)$ , ускорение  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ . Уравнение свободной поверхности  $\Gamma(t)$  имеет вид  $z = h(x, t)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ . Здесь пространственные переменные  $x_1$ ,  $x_2$  и  $z$  безразмерные.

Задача Коши — Пуассона для безразмерного потенциала поля скоростей  $\Phi(x_1, x_2, z, t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 \quad (-\infty < z < h(x, t), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| > \varepsilon), \\ h_t + \Phi_{x_1} h_{x_1} + \Phi_{x_2} h_{x_2} &= \Phi_z, \quad \Phi_t + |\nabla\Phi|^2/2 + \text{Fr}^{-2}h = 0 \quad \text{на } \Gamma(t), \\ \mathbf{n} \cdot (\nabla\Phi(x, z, t) - \mathbf{v}_c(t)) &= 0 \quad \text{на сфере } S_\varepsilon, \quad |\nabla\Phi| \rightarrow 0, \quad h(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| + |z| \rightarrow \infty, \\ h(x, 0) = h_0(x), \quad \Phi(x, z, 0) &= \Phi_0(x, z), \quad \Delta\Phi_0 = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\nabla\Phi_0(x, z) - \mathbf{v}_c(0)) = 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x} = (x, z)$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к сфере  $S_\varepsilon$ .

**2. Сведение на границу.** В исходной задаче область определения искомой функции неизвестна. Путем введения вспомогательных функций  $\varphi(x, t) = \Phi(x, h(x, t), t)$ ,  $\psi(x, t) = \Phi_z(x, h(x, t), t)$  задача Коши — Пуассона разбивается на задачу Коши на свободной поверхности и смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа в области, занятой жидкостью. Задача Коши формулируется с помощью условий на свободной границе [7]

$$h_t = -\nabla\varphi\nabla h + (1 + |\nabla h|^2)\psi, \quad \varphi_t = -|\nabla\varphi|^2/2 - \text{Fr}^{-2}h + (1 + |\nabla h|^2)\psi^2/2 \quad (2.1)$$

и начальных условий

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad \varphi(x, 0) = \Phi_0(x, h_0(x)).$$

Систему (2.1) замыкает интегральное уравнение, которое получается с использованием формулы Грина:

$$4\pi\Phi(\mathbf{x}) = \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{y}) dS - \int_S \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS.$$

Здесь  $\mathbf{y} = (y, h(y))$ ;  $y = (y_1, y_2)$ ;  $S = \Gamma(t) \cup S_\varepsilon$ ;  $\mathbf{n}$  — нормаль к границе  $S$ ;  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — функция Грина внешней задачи Неймана для сферы [11]:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + N(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\varepsilon}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^* - (\mathbf{y} - \mathbf{x}_c)|} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c| - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c, \mathbf{y} - \mathbf{x}_c)}{\varepsilon^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^* - (\mathbf{y} - \mathbf{x}_c)| - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c, \mathbf{y} - \mathbf{x}_c)} \end{aligned}$$

(звездочка означает инверсию  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)^* = \varepsilon^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^2$  точки  $\mathbf{x}$  относительно сферы  $S_\varepsilon$ ). Так как по построению  $\mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{S_\varepsilon} = 0$ , то один из интегралов по поверхности сферы исчезает, а второй является решением задачи о движении сферы в безграничном потоке жидкости:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{y}) dS = \frac{\varepsilon^3(\mathbf{v}_c, \mathbf{x} - \mathbf{x}_c)}{2|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^3}.$$

Тогда в формуле Грина остаются интегралы только по свободной поверхности, т. е.

$$4\pi\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma(t)} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{y}) dS - \int_{\Gamma(t)} \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS - 2\pi \frac{\varepsilon^3(\mathbf{v}_c, \mathbf{x} - \mathbf{x}_c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^3}.$$

Продифференцируем полученное равенство по  $z$  и устремим точку  $\mathbf{x}$  к свободной поверхности. С учетом скачка потенциала двойного слоя, равного величине  $-2\pi\Phi_z$ , получаем

$$\begin{aligned} 2\pi\psi(x, t) = & - \int_{R^2} \frac{h(x, t) - h(y, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} [(1 + |\nabla h|^2)\psi - \nabla h \nabla \varphi] dy_1 dy_2 + \\ & + \int_{R^2} \frac{(x - y) \nabla \varphi(y, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dy_1 dy_2 - \frac{2\pi\varepsilon^3 a_3 t}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^3} + 6\pi \frac{\varepsilon^3 (h(x, t) - a_3 t^2/2 + 1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^5} \mathbf{v}_c \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) + \\ & + \int_{R^2} N_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [(1 + |\nabla h|^2)\psi - \nabla h \nabla \varphi] dy_1 dy_2 - \int_{R^2} \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla N_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(y, t) dy_1 dy_2, \quad (2.2) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x} = (x, h(x, t))$ ;  $\boldsymbol{\nu} = (-h_{y_1}, -h_{y_2}, 1)$ . В правой части уравнения (2.2) первые два интеграла не зависят явно от  $\varepsilon$ . Они сохраняются в (2.2) и в том случае, когда радиус сферы равен нулю. При этом получается уравнение для задачи о свободных волнах. Внеинтегральные слагаемые соответствуют диполю, движущемуся в безграничной жидкости. Последние два интеграла отвечают за взаимодействие сферы и свободной поверхности и исчезают при  $\varepsilon = 0$ . Уравнения (2.1), (2.2) образуют замкнутую систему. Ее решение позволяет восстановить потенциал скорости жидкости всюду в области течения. Затем с помощью интеграла Коши — Лагранжа находится давление, которое жидкость оказывает на движущуюся сферу.

Функция  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  может быть представлена в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{\varepsilon}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)| |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)|^n |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|^n} \right\}^k + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \left\{ \frac{\varepsilon}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)| |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|} \right\}^{2n+1} (\varepsilon^2 - 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t), \mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)))^n + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \left( \frac{\varepsilon}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)| |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|} \right)^{n+1} \times \right. \\ & \left. \times \left( 1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t), \mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)| |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|} \right)^n \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)| |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|} \right)^{-2n} \right\}^k. \end{aligned}$$

Этот ряд сходится, если  $\varepsilon^2/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)| |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)| < 1$ , где точки  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  находятся на свободной поверхности. Данное условие означает, что сфера во время движения должна быть полностью погружена в жидкость. После преобразований получим

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c, \mathbf{y} - \mathbf{x}_c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c|^3} - \frac{\varepsilon^5}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c|^3} + \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2n-1}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^n |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c|^n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \frac{k!}{i_1! \dots i_n!} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_n^k (-2)^k \varepsilon^{4n-2k+1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c, \mathbf{y} - \mathbf{x}_c)^k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^{2n+1} |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c|^{2n+1}} +$$

$$+ \sum_{i=4}^{\infty} \sum_{k=1}^{[i/2]} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k!}{j_2! \dots j_i!} \sum_{m=0}^i \sum_{q=2}^{[i/2]} \binom{q-1}{2} j_q B_{k,i,m,j_2,\dots,j_i} \varepsilon^{2i-2m-1} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c, \mathbf{y} - \mathbf{x}_c)^m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^i |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c|^i}$$

( $i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n = n$ ,  $i_1 + i_2 + \dots + i_n = k$ ,  $2j_2 + \dots + ij_i = i$ ,  $j_2 + \dots + j_i = k$ ). Здесь  $B_{k,i,m,j_2,\dots,j_i}$  — числовые коэффициенты:

$$B_{k,i,m,j_2,\dots,j_i} = \sum_{m_2=\max(0, m - \sum_{q=2, q \neq 2}^i \binom{q-1}{2} j_q)}^{\min(m, 0)} \dots \sum_{m_{i-1}=\max(0, m - \sum_{q=2, q \neq i-1}^i \binom{q-1}{2} j_q)}^{\min(m, \binom{i-1}{2} j_i)} A_{2, m_2, j_2} \dots$$

$$\dots A_{i-1, m_{i-1}, j_{i-1}} A_{i, m - m_2 - \dots - m_{i-1}, j_i};$$

$$A_{p, l_p, j_p} = C_{j_p}^{k_1} C_{j_p - k_1}^{k_2} \dots C_{j_p - k_1 - \dots - k_{[(p-1)/2]}}^{k_{[(p-1)/2]}} a_{p,0}^{j_p - (k_1 + \dots + k_{[(p-1)/2]})} a_{p,1}^{k_1} \dots a_{p, [(p-1)/2]}^{k_{[(p-1)/2]}};$$

$$k_1 + 2k_2 + \dots + [(p-1)/2] k_{[(p-1)/2]} = l_p, \quad 0 \leq l_p \leq [(p-1)/2] j_p;$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{[(p-1)/2]} \leq j_p;$$

$$a_{p,j} = (-1)^j \sum_{\max(1,j)}^{p-j-1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} C_{n+p-j-2}^{p-j-n-1} C_n^j;$$

$i_1, \dots, i_n, j_2, \dots, j_i, k_1, \dots, k_{[(p-1)/2]}$  — целые неотрицательные числа;  $[\nu]$  — целая часть числа  $\nu$ .

Подставляя полученное представление функции  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  в виде ряда по степеням  $\varepsilon$  в формулу Грина для потенциала скорости, можно сделать следующий вывод. Точное выполнение условия непротекания на сфере соответствует предположению, что в центре сферы сосредоточено бесконечное число мультиполей, мощности которых зависят от параметра  $\varepsilon$ , мгновенной формы свободной поверхности и потенциала скорости жидкости на ней. Малость параметра  $\varepsilon$  означает, что в начальный момент времени сфера находится достаточно далеко от свободной поверхности. В работе ищется решение исходной задачи в двух приближенных постановках. Первое приближение получается, если в ядре  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  интегрального уравнения (2.2) отбросить слагаемые порядка  $\varepsilon^5$  и выше, второе — если отбросить слагаемые порядка  $\varepsilon^7$  и выше. Первое приближение назовем дипольным, второе — модифицированным дипольным приближением.

**3. Вывод вспомогательных соотношений.** Выведем соотношения, которые верны для всех рассматриваемых приближений. В начальный момент времени жидкость покоится, поэтому начальные условия имеют вид  $h(x, 0) = 0$ ,  $\varphi(x, 0) = 0$ . Решение системы (2.1), (2.2) ищется в виде рядов по степеням  $t$ :

$$(h, \varphi, \psi) = (0, 0, \psi_0) + t(h_1, \varphi_1, \psi_1) + t^2(h_2, \varphi_2, \psi_2)/2 + t^3(h_3, \varphi_3, \psi_3)/3! + \dots$$

Из уравнений (2.1) получаем рекуррентные формулы, связывающие коэффициенты разложений неизвестных функций:

$$h_1 = \psi_0, \quad h_2 = \psi_1, \quad \varphi_1 = \psi_0^2/2, \quad \varphi_2 = -\text{Fr}^{-2} \psi_0 + \psi_0 \psi_1,$$

при  $i \geq 2$

$$h_{i+2} = - \sum_{k=1}^{i-1} \nabla \varphi_k \nabla h_{i-k} + \psi_i + \sum_{k=2}^i \psi_{i-k} \sum_{n=1}^{k-1} \nabla h_n \nabla h_{k-n},$$

$$\varphi_{i+1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i-1} \nabla \varphi_k \nabla \varphi_{i-k} - \text{Fr}^{-2} h_i + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^i \psi_k \psi_{i-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^i \sum_{n=1}^{k-1} \nabla h_n \nabla h_{k-n} \sum_{m=1}^{i-k} \psi_m \psi_{i-k-m}.$$

Ясно, что коэффициенты разложения по степеням  $t$  формы свободной поверхности и потенциала скорости жидкости на ней выражаются через коэффициенты разложения функции  $\psi$ . Уравнения для  $\psi_i$  выводятся из разложения уравнения (2.2) по степеням  $t$ .

Введем следующие обозначения для интегральных операторов:

$$A_0 \psi = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{h(x, t) - h(y, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} (1 + |\nabla h(y, t)|^2) \psi(y, t) dy_1 dy_2,$$

$$B_0 \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{(x - y) + (h(x, t) - h(y, t)) \nabla h(y, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \nabla \varphi(y, t) dy_1 dy_2,$$

$$A_\varepsilon \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} N_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (1 + |\nabla h(y, t)|^2) \psi(y, t) dy_1 dy_2,$$

$$B_\varepsilon \varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} N_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla h(y, t) \nabla \varphi(y, t) dy_1 dy_2 - \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla N_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(y, t) dy_1 dy_2.$$

Внеинтегральные слагаемые уравнения (2.2) обозначим через

$$w_{dip} = -\frac{\varepsilon^3 a_3 t}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^3} + 3 \frac{\varepsilon^3 (h(x, t) - a_3 t^2 / 2 + 1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|^5} \mathbf{v}_c \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c).$$

Перепишем уравнение для нормальной производной в новых обозначениях:

$$\psi = A_0 \psi + B_0 \varphi + w_{dip} + A_\varepsilon \psi + B_\varepsilon \varphi. \quad (3.1)$$

Заметим, что функция  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  имеет третий порядок малости по  $\varepsilon$ , поэтому операторы  $A_\varepsilon$ ,  $B_\varepsilon$  являются величинами того же порядка. С учетом разложения  $h$  по степеням  $t$  интегральные операторы могут быть представлены в виде рядов

$$A_0 = t A_0^{(1)} + \frac{t^2}{2} A_0^{(2)} + \frac{t^3}{6} A_0^{(3)} + \frac{t^4}{24} A_0^{(4)} + \dots, \quad B_0 = B_0^{(0)} + \frac{t^2}{2} B_0^{(2)} + \frac{t^4}{24} B_0^{(4)} + \frac{t^5}{120} B_0^{(5)} + \dots,$$

$$A_\varepsilon = A_\varepsilon^{(0)} + \frac{t^2}{2} A_\varepsilon^{(2)} + \frac{t^4}{24} A_\varepsilon^{(4)} + \frac{t^5}{120} A_\varepsilon^{(5)} + \dots, \quad B_\varepsilon = B_\varepsilon^{(0)} + \frac{t^2}{2} B_\varepsilon^{(2)} + \frac{t^3}{6} B_\varepsilon^{(3)} + \dots$$

Отсутствие слагаемых порядка  $t$  и  $t^3$  в приведенных формулах объясняется тем, что координаты центра сферы квадратично зависят от времени. Разложение функции  $w_{dip}$  содержит только нечетные степени  $t$ , а операторы с индексом  $\varepsilon$  определяются ядром  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и различны в разных приближениях.

Функции  $\psi_i$  удовлетворяют интегральным уравнениям, которые получаются из уравнения (3.1) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $t$ :

$$(I - A_\varepsilon^{(0)}) \psi_i = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Правые части  $f_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, & f_1 &= w_{dip}^{(1)} + A_0^{(1)}\psi_0, & f_2 &= A_0^{(2)}\psi_0 + A_\varepsilon^{(2)}\psi_0 + 2A_0^{(1)}\psi_1, \\ f_3 &= w_{dip}^{(3)} + B_0^{(0)}\varphi_3 + B_\varepsilon^{(0)}\varphi_3 + 3A_0^{(1)}\psi_2 + A_0^{(3)}\psi_0 + 3A_0^{(2)}\psi_1 + 3A_\varepsilon^{(2)}\psi_1, \\ f_4 &= B_0^{(0)}\varphi_4 + B_\varepsilon^{(0)}\varphi_4 + 4A_0^{(1)}\psi_3 + 6A_0^{(2)}\psi_2 + 4A_0^{(3)}\psi_1 + 6A_\varepsilon^{(2)}\psi_2 + A_\varepsilon^{(3)}\psi_1 + A_\varepsilon^{(4)}\psi_0, \\ f_5 &= w_{dip}^{(5)} + B_0^{(0)}\varphi_5 + 10B_0^{(2)}\varphi_3 + B_\varepsilon^{(0)}\varphi_5 + 10B_\varepsilon^{(2)}\varphi_3 + 5A_0^{(1)}\psi_4 + 10A_0^{(2)}\psi_3 + 10A_0^{(3)}\psi_2 + 5A_0^{(4)}\psi_1 + \\ &+ 10A_\varepsilon^{(2)}\psi_3 + 5A_\varepsilon^{(4)}\psi_1 + A_0^{(5)}\psi_0 + A_\varepsilon^{(5)}\psi_0, \dots \end{aligned}$$

**4. Дипольное приближение.** Будем искать решение системы (2.1), (2.2) с точностью до  $\varepsilon^5$ . Это приближение называется дипольным, поскольку в данном случае сфера моделируется диполем, движущимся со скоростью  $\mathbf{v}_c$  в безграничной жидкости. В дипольном приближении

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t), \mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)|^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|^3}.$$

В этом случае оператор  $A_\varepsilon^{(0)}\psi_i$  имеет вид

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^{(0)}\psi_i &= \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon^3}{(x^2 + 1)^{3/2}} \int_{R^2} \frac{\psi_i(y)}{(y^2 + 1)^{3/2}} dy_1 dy_2 - \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^3 x_1}{(x^2 + 1)^{5/2}} \int_{R^2} \frac{y_1 \psi_i(y)}{(y^2 + 1)^{3/2}} dy_1 dy_2 - \\ &- \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^3 x_2}{(x^2 + 1)^{5/2}} \int_{R^2} \frac{y_2 \psi_i(y)}{(y^2 + 1)^{3/2}} dy_1 dy_2 - \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^3}{(x^2 + 1)^{5/2}} \int_{R^2} \frac{\psi_i(y)}{(y^2 + 1)^{3/2}} dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В работе [12] установлена сходимость ряда Неймана для оператора  $A_\varepsilon^{(0)}$  при малых  $\varepsilon$ . Следовательно, если правая часть интегрального уравнения (3.2), в котором оператор  $A_\varepsilon^{(0)}\psi_i$  определен по формуле (4.1), равна нулю, то единственное решение этого уравнения также нулевое. Так как  $\psi_0 = 0$ , то оператор  $A_0^{(1)} = 0$  и правая часть уравнения для  $\psi_2$  также равна нулю. Тогда  $\psi_2 = 0$ , следовательно,  $A_0^{(3)} = 0$ , поэтому  $\psi_4 = 0$ .

Правая часть уравнения (3.2) для  $\psi_1$  одинакова в любом приближении по  $\varepsilon$ :

$$f_1 = -\frac{\varepsilon^3 a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3\varepsilon^3 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}{(x^2 + 1)^{5/2}}.$$

Отбросив слагаемые порядка  $\varepsilon^6$  в решении интегрального уравнения для  $\psi_1$ , получим

$$\psi_1(x) = -\frac{\varepsilon^3 a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3\varepsilon^3 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}{(x^2 + 1)^{5/2}}.$$

Решение  $\psi_1$ , как и правая часть уравнения (3.2), имеет третий порядок малости по  $\varepsilon$ . Таким образом, значение оператора  $A_\varepsilon^{(0)}\psi_1$  имеет порядок  $\varepsilon^6$ , и в итоге решение уравнения (3.2) в пределах принятой точности оказывается равным его правой части. В дипольном приближении это справедливо для всех  $\psi_i$ .

Правая часть уравнения (3.2) для  $\psi_3$  определяется формулой

$$f_3 = w_{dip}^{(3)} + B_0^{(0)}\varphi_3,$$

так как  $A_0^{(1)} = A_0^{(3)} = 0$ , а остальные слагаемые в  $f_3$  отбрасываются, поскольку имеют шестой порядок малости по  $\varepsilon$ . Таким образом,

$$f_3 = -\frac{9\varepsilon^3}{(x^2 + 1)^{5/2}} - 18\varepsilon^3 a_3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} + \\ + 45\varepsilon^3 \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)^2}{(x^2 + 1)^{7/2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{(x - y) \cdot \nabla \varphi_3(y)}{|x - y|^3} dy_1 dy_2.$$

Интеграл в последней формуле появляется из-за оператора  $B_0^{(0)} \varphi_3$ . В этом приближении нелинейные слагаемые в условиях на свободной поверхности не вносят вклада в решение. Поэтому

$$\varphi_3(x) = \text{Fr}^{-2} \frac{\varepsilon^3 a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} - \text{Fr}^{-2} \frac{3\varepsilon^3 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}{(x^2 + 1)^{5/2}}.$$

Для вычисления  $B_0^{(0)} \varphi_3$  воспользуемся преобразованием Фурье для интегрального оператора Рисса

$$Ru(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{(x - y)u(y)}{|x - y|^3} dy_1 dy_2, \quad u = (u_1, u_2),$$

для которого справедлива формула  $\widehat{Ru}(\xi) = i \text{sign } \xi \hat{u}(\xi)$ , где  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ;  $\hat{u}(\xi) = (\hat{u}_1(\xi), \hat{u}_2(\xi))$ ; вектор  $\text{sign } \xi = 0$  при  $\xi = 0$  и  $\text{sign } \xi = \xi/|\xi|$  в противном случае. Положим  $u_1 = \varphi_{3y_1}$ ,  $u_2 = \varphi_{3y_2}$ . Преобразование Фурье функции  $B_0^{(0)} \varphi_3$  имеет вид

$$\widehat{B_0^{(0)} \varphi_3}(\xi) = \text{Fr}^{-2} \varepsilon^3 e^{-|\xi|} (i a_3 |\xi|^2 - a_1 |\xi| \xi_1 - a_2 |\xi| \xi_2).$$

Взяв обратное преобразование Фурье, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{(x - y) \cdot \nabla \varphi_3(y)}{|x - y|^3} dy_1 dy_2 = 3\text{Fr}^{-2} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 3a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} - 15\text{Fr}^{-2} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{7/2}}.$$

Тогда

$$\psi_3(x) = 3\text{Fr}^{-2} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 3a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} - 15\text{Fr}^{-2} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{7/2}} - \\ - \frac{9\varepsilon^3}{(x^2 + 1)^{5/2}} - 18\varepsilon^3 a_3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} + 45\varepsilon^3 \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)^2}{(x^2 + 1)^{7/2}}.$$

В результате получается форма свободной поверхности в дипольном приближении

$$h(x, t) = t^2 \frac{3}{2} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 (2 - x^2)}{(x^2 + 1)^{5/2}} - t^4 \frac{3}{8} \varepsilon^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^{5/2}} - \\ - t^4 \frac{3}{4} \varepsilon^3 a_3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} + t^4 \frac{15}{8} \varepsilon^3 \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)^2}{(x^2 + 1)^{7/2}} + \\ + \text{Fr}^{-2} t^4 \frac{1}{8} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 3a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} - \text{Fr}^{-2} t^4 \frac{5}{8} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{7/2}} + O(t^6).$$

На рис. 1 показана поверхность жидкости при горизонтальном движении сферы вдоль оси  $x_1$ . Сфера радиуса  $\varepsilon = 0,5$  движется с ускорением  $|\mathbf{A}| = g/4$ . В начальный момент

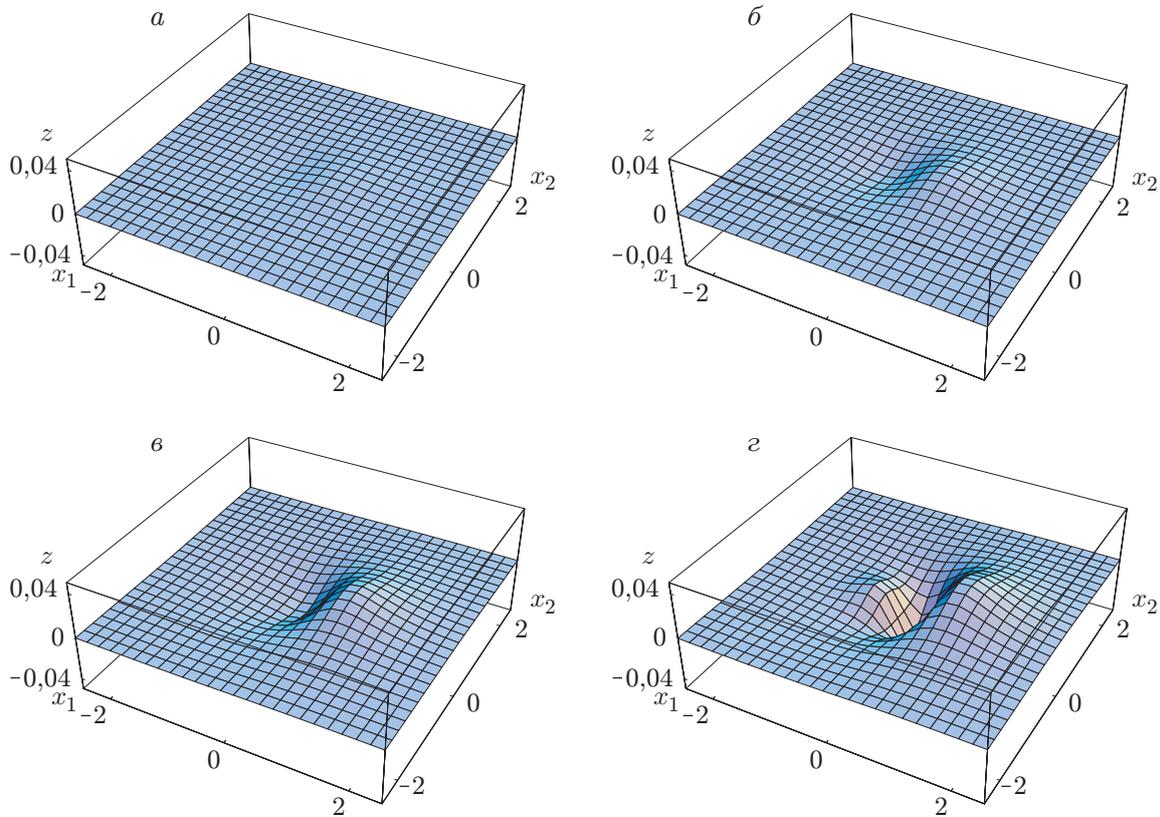


Рис. 1. Свободная поверхность при горизонтальном движении сферы в различные моменты безразмерного времени:

$a$  —  $t = 0,25$ ;  $б$  —  $t = 0,5$ ;  $в$  —  $t = 0,75$ ;  $г$  —  $t = 1,0$

времени свободная поверхность — плоскость  $z = 0$ . Движение сферы рассматривается до момента  $t = 1$ , за единицу безразмерного времени сфера проходит расстояние, равное половине своего начального погружения  $H$ . При рассматриваемом медленном ускорении сферы за данный промежуток времени успевают сформироваться два первых гребня волнового следа.

**5. Модифицированное дипольное приближение.** Для получения системы уравнений модифицированного дипольного приближения в (2.2) подставим

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^3 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t), \mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)|^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|^3} - \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^5}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)|^3 |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|^3} + \frac{\varepsilon^5 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t), \mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t))^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)|^5 |\mathbf{y} - \mathbf{x}_c(t)|^5}.$$

В этом случае в решении пренебрегаем слагаемыми седьмого и выше порядка малости по  $\varepsilon$ . В таком приближении оператор  $A_\varepsilon^{(0)} \psi_i$  имеет вид

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^{(0)} \psi_i = & \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon^3}{(x^2 + 1)^{3/2}} \int_{R^2} \frac{\psi_i(y)}{(y^2 + 1)^{3/2}} dy_1 dy_2 - \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon^3}{(x^2 + 1)^{5/2}} \int_{R^2} \frac{(1 + x \cdot y) \psi_i(y)}{(y^2 + 1)^{3/2}} dy_1 dy_2 - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon^5}{(x^2 + 1)^{5/2}} \int_{R^2} \frac{(1 + x \cdot y) \psi_i}{(y^2 + 1)^{5/2}} dy_1 dy_2 + \frac{5}{2\pi} \frac{\varepsilon^5}{(x^2 + 1)^{7/2}} \int_{R^2} \frac{(1 + x \cdot y)^2 \psi_i}{(y^2 + 1)^{5/2}} dy_1 dy_2 - \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon^5}{(x^2 + 1)^{5/2}} \int_{R^2} \frac{\psi_i(y)}{(y^2 + 1)^{3/2}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Как и в случае дипольного приближения, если правая часть уравнения (3.2) равна нулю, то его единственное решение нулевое. Поэтому  $\psi_0 = \psi_2 = \psi_4 = 0$ , и аналогично предыдущему приближению  $A_0^{(1)} = A_0^{(3)} = 0$ . Функция

$$\psi_1(x) = -\frac{\varepsilon^3 a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3\varepsilon^3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}{(x^2 + 1)^{5/2}} - \frac{3}{16} \varepsilon^6 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 2a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} + \frac{1}{8} \varepsilon^6 \frac{a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

является решением уравнения (3.2) для  $\psi_1$  в модифицированном дипольном приближении. В этом решении отброшены слагаемые восьмого и выше порядка малости по  $\varepsilon$ . Слагаемые шестого порядка по  $\varepsilon$  в  $\psi_1(x)$  появляются из-за оператора  $A_\varepsilon^{(0)} \psi_i$ . Таким образом, в этом приближении сфера моделируется диполем, мощность которого является суммой двух слагаемых. Первое слагаемое — мощность классического диполя, второе — мощность индуцированного диполя, который характеризует взаимодействие сферы и свободной поверхности. Так как начальные условия задачи нулевые, то решение имеет порядок  $\varepsilon^3$ . Мощность индуцированного диполя, являясь функционалом мгновенной формы свободной поверхности и потенциала скорости жидкости на ней, оказывается величиной порядка  $\varepsilon^6$ .

Основные трудности при решении уравнения для третьего коэффициента разложения функции  $\psi$  возникают из-за наличия в правой части  $f_3$  слагаемых  $B_0^{(0)} \varphi_3$  и  $A_0^{(2)} \psi_1$ . Модифицированное дипольное приближение учитывает нелинейные слагаемые условий на свободной поверхности (величины без множителя  $\text{Fr}^{-2}$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) = & \text{Fr}^{-2} \frac{\varepsilon^3 a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} - 3\text{Fr}^{-2} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} + \text{Fr}^{-2} \frac{3}{16} \varepsilon^6 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 2a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} - \\ & - \text{Fr}^{-2} \frac{1}{8} \varepsilon^6 \frac{a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \left( -\frac{\varepsilon^3 a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} + 3\varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Преобразование Фурье интеграла

$$B_0^{(0)} \varphi_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{(x - y) \cdot \nabla \varphi_3(y)}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} dy_1 dy_2,$$

как и в дипольном приближении, вычисляется с помощью преобразования Фурье оператора Рисса и имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{B_0^{(0)} \varphi_3} = & \text{Fr}^{-2} \varepsilon^3 e^{-|\xi|} (i a_3 |\xi|^2 - a_1 |\xi| \xi_1 - a_2 |\xi| \xi_2) + \\ & + \text{Fr}^{-2} \varepsilon^6 e^{-|\xi|} (i a_1 |\xi| \xi_1 + i a_2 |\xi| \xi_2 - a_3 |\xi| + a_3 |\xi|^2) / 16 + i (\xi_1 / |\xi|) \widehat{\psi_{1x_1}^2}(\xi) + i (\xi_2 / |\xi|) \widehat{\psi_{1x_2}^2}(\xi). \end{aligned}$$

Преобразование Фурье слагаемого, которое появляется из-за нелинейности динамического условия на свободной границе жидкости, имеет вид

$$\begin{aligned} i \frac{\xi_1}{|\xi|} \widehat{\psi_{1x_1}^2}(\xi) + i \frac{\xi_2}{|\xi|} \widehat{\psi_{1x_2}^2}(\xi) = & \varepsilon^6 \left( \frac{1}{8} a_3^2 |\xi|^3 K_2(|\xi|) - \frac{1}{8} i a_3 (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2) |\xi|^3 K_2(|\xi|) - \right. \\ & - \frac{1}{8} a_3^2 |\xi|^4 K_3(|\xi|) + \frac{3}{64 \cdot 2} |\xi|^4 K_3(|\xi|) - \frac{3}{64 \cdot 2} a_3^2 |\xi|^4 K_3(|\xi|) + \frac{3}{64 \cdot 2} a_3^2 |\xi|^5 K_4(|\xi|) - \\ & \left. - \frac{3}{64 \cdot 2} (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)^2 |\xi|^3 K_2(|\xi|) - \frac{6}{64 \cdot 2} a_1 a_2 |\xi|^3 \xi_1 \xi_2 K_2(|\xi|) + \frac{3}{64} i a_3 (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2) |\xi|^4 K_3(|\xi|) \right). \end{aligned}$$

Здесь  $K_i(z)$  — цилиндрические функции Макдональда. Результат действия оператора

$$A_0^{(2)} \psi_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{h_2(x) - h_2(y)}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{3/2}} \psi_1(y) dy_1 dy_2$$

также находится с использованием преобразования Фурье:

$$\widehat{A_0^{(2)}\psi_1} = -\frac{1}{2\pi} |\xi| \int_{R^2} \hat{\psi}_1(\xi - \eta) \hat{\psi}_1(\eta) d\eta_1 d\eta_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} |\xi - \eta| \hat{\psi}_1(\xi - \eta) \hat{\psi}_1(\eta) d\eta_1 d\eta_2.$$

С учетом того, что свертка преобразований Фурье двух функций дает преобразование Фурье произведения этих функций, получаем

$$\widehat{A_0^{(2)}\psi_1} = -|\xi| \widehat{\psi_1^2}(\xi) + \hat{g}(\xi),$$

где

$$g(x) = 3\varepsilon^6 a_3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 3a_3}{(x^2 + 1)^4} - 33\varepsilon^6 a_3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^5} - 9\varepsilon^6 \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)^2}{(x^2 + 1)^5} + 45\varepsilon^6 \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)^2}{(x^2 + 1)^6}.$$

Из вычислений следует

$$|\xi| \widehat{\psi_1^2}(\xi) = -i(\xi_1/|\xi|) \widehat{\psi_{1x_1}^2}(\xi) - i(\xi_2/|\xi|) \widehat{\psi_{1x_2}^2}(\xi).$$

Для нахождения обратного преобразования Фурье функций  $\widehat{B_0^{(0)}\varphi_3}$  и  $\widehat{A_0^{(2)}\psi_1}$  используется интегральная формула (см. формулу 6.576.3 в [13, с. 707])

$$F((\nu - \lambda + \mu + 1)/2, (\nu - \lambda - \mu + 1)/2; \nu + 1; -a^2) = \frac{2^{\lambda+1} a^{-\nu} \Gamma(1 + \nu)}{\Gamma((\nu - \lambda + \mu + 1)/2) \Gamma((\nu - \lambda - \mu + 1)/2)} \int_0^\infty x^{-\lambda} K_\mu(x) J_\nu(ax) dx,$$

где  $\nu - \lambda + 1 > |\mu|$ ;  $\Gamma(z)$  — гамма-функция;  $J_\nu(z)$  — функция Бесселя. Из-за наличия функций Макдональда в выражениях для  $\widehat{B_0^{(0)}\varphi_3}$  и  $\widehat{A_0^{(2)}\psi_1}$  правая часть уравнения для  $\psi_3$  и, следовательно, само решение выражаются через гипергеометрические функции.

Таким образом, получаем зависимость свободной поверхности от времени в модифицированном дипольном приближении с точностью до  $t^6$

$$\begin{aligned} h(x, t) = & t^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 (2 - x^2)}{(x^2 + 1)^{5/2}} - \frac{3}{32} \varepsilon^6 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 2a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} + \frac{1}{16} \varepsilon^6 \frac{a_3}{(x^2 + 1)^{3/2}} \right) - \\ & - t^4 \frac{3}{8} \varepsilon^3 \frac{1}{(x^2 + 1)^{5/2}} - t^4 \frac{3}{4} \varepsilon^3 a_3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} + t^4 \frac{15}{8} \varepsilon^3 \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)^2}{(x^2 + 1)^{7/2}} + \\ & + \text{Fr}^{-2} t^4 \frac{1}{8} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + 3a_3}{(x^2 + 1)^{5/2}} - \text{Fr}^{-2} t^4 \frac{5}{8} \varepsilon^3 \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{(x^2 + 1)^{7/2}} + \frac{t^4}{24} \varepsilon^6 \frac{18a_3^2 - 7\text{Fr}^{-2} a_3}{16(x^2 + 1)^{3/2}} + \\ & + \frac{t^4}{24} \varepsilon^6 \frac{9(1 - a_3^2)}{16(x^2 + 1)^{5/2}} + \frac{t^4}{8} \varepsilon^6 \text{Fr}^{-2} \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3}{8(x^2 + 1)^{5/2}} - \frac{t^4}{24} \varepsilon^6 \frac{45(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)^2}{16(x^2 + 1)^{7/2}} - \\ & - \frac{t^4}{24} \varepsilon^6 \frac{45a_3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}{16(x^2 + 1)^{7/2}} + \frac{t^4}{24} \text{Fr}^{-2} \varepsilon^6 \frac{15(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)}{16(x^2 + 1)^{7/2}} + \\ & + \frac{t^4}{24} \varepsilon^6 \pi \left\{ -a_3^2 \frac{15}{8} F\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}; 1; -x^2\right) + \frac{105}{128} (19a_3^2 - 3) F\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}; 1; -x^2\right) - \right. \end{aligned}$$

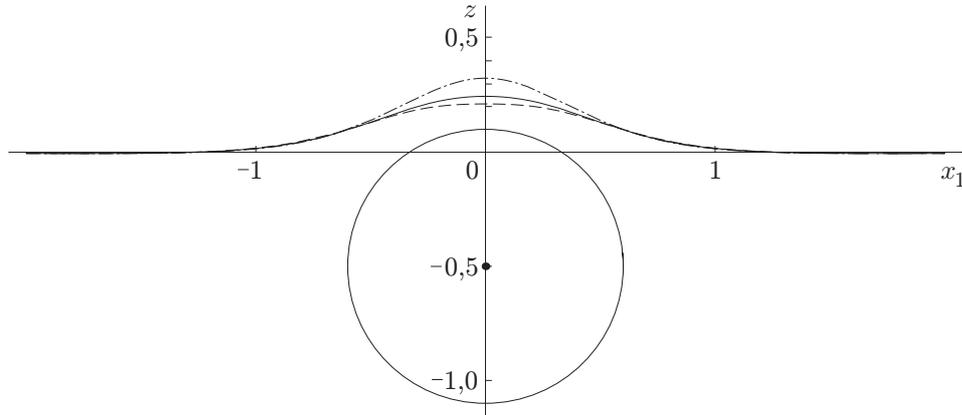


Рис. 2. Свободная поверхность при вертикальном подъеме сферы: сплошная кривая — нелинейное модифицированное дипольное приближение, штриховая — линейное модифицированное дипольное приближение, штрихпунктирная — дипольное приближение

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{64} a_3^2 \frac{945}{2} F\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}; 1; -x^2\right) + \frac{315}{16} a_3(a_1 x_1 + a_2 x_2) F\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}; 1; -x^2\right) + \\
 & + \frac{14175}{128} a_3(a_1 x_1 + a_2 x_2) x^2 F\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}; 3; -x^2\right) - \frac{3}{64} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 \frac{14175}{16} F\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}; 1; -x^2\right) - \\
 & - \frac{1}{128} (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 x^2 \frac{1091475}{16} F\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}; 3; -x^2\right) - \\
 & - \frac{1}{64} \frac{(a_1 x_1 + a_2 x_2)^2}{8} x^4 \frac{42567525}{256} F\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}; 5; -x^2\right) - \\
 & - \frac{3}{64} a_3(a_1 x_1 + a_2 x_2) \frac{2835}{2} F\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}; 1; -x^2\right) - \\
 & - \frac{3}{64} a_3(a_1 x_1 + a_2 x_2) x^2 \frac{155925}{16} F\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}; 3; -x^2\right) + \frac{3}{128} (1 - a_3^2) \frac{315}{2} F\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}; 1; -x^2\right) + \\
 & + \frac{3}{128} (1 - a_3^2) x^2 \frac{14175}{16} F\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}; 3; -x^2\right) \} + O(t^6).
 \end{aligned}$$

Выражения для функции  $h(x, t)$ , полученные в дипольном и модифицированном дипольном приближениях, позволяют сравнить влияние индуцированного диполя и нелинейности граничных условий на форму свободной поверхности жидкости.

На рис. 2 приведены формы свободной поверхности для обоих приближений в момент времени, когда сфера прошла расстояние, равное половине начальной глубины погружения. Во втором приближении даны решения задачи с линейными и нелинейными условиями на свободной поверхности. Радиус сферы  $\varepsilon = 0,6$ , ускорение  $|\mathbf{A}| = g$ . При вертикальном движении сферы различие решений для данного  $\varepsilon$  оказывается наибольшим, причем при всплывании оно больше, чем при погружении. При горизонтальном движении сферы различие решений минимальное.

**6. Сила, действующая на сферу.** Вычислим силу, действующую на сферу, в дипольном приближении. Давление в жидкости находится с помощью интеграла Коши — Лагранжа:

$$p(x, z, t) = -\Phi_t(x, z, t) - |\nabla\Phi(x, z, t)|^2/2 - \text{Fr}^{-2}z.$$

Сила, действующая на сферу со стороны жидкости, определяется по формуле

$$\mathbf{R} = - \int_{S_\varepsilon} p \mathbf{n} dS,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль сферы. Потенциал скорости жидкости, давление в жидкости и силу  $\mathbf{R}$ , как и решение системы (2.1), (2.2), будем искать в виде рядов по  $t$ :

$$(\Phi, p, \mathbf{R}) = (\Phi_0, p_0, \mathbf{R}_0) + t(\Phi_1, p_1, \mathbf{R}_1) + (t^2/2)(\Phi_2, p_2, \mathbf{R}_2) + (t^3/3!)(\Phi_3, p_3, \mathbf{R}_3) + \dots,$$

где

$$\mathbf{R}_i = - \int_{S_\varepsilon} p_i \mathbf{n} dS.$$

С использованием интеграла Коши — Лагранжа получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} p_0(x, z) &= -\Phi_1(x, z) - \text{Fr}^{-2}z, & p_1(x, z) &= -\Phi_2(x, z), & p_2(x, z) &= -\Phi_3(x, z) - |\nabla\Phi_1(x, z)|^2, \\ p_3(x, z) &= -\Phi_4(x, z) - 3\nabla\Phi_1(x, z) \cdot \nabla\Phi_2(x, z), \\ p_4(x, z) &= -\Phi_5(x, z) - \nabla\Phi_1(x, z) \cdot \nabla\Phi_3(x, z) - |\nabla\Phi_2(x, z)|^2, \\ p_5(x, z) &= -\Phi_6(x, z) - 10\nabla\Phi_2(x, z) \cdot \nabla\Phi_3(x, z) - 5\nabla\Phi_1(x, z) \cdot \nabla\Phi_4(x, z), \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

Используя выражения для  $h$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  (см. п. 4), получим  $\Phi_0 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0$ . Тогда из формул (6.1) следует  $p_1 = p_3 = p_5 = 0$ . Отсюда  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_5 = 0$ . Коэффициенты  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_2$  и  $\mathbf{R}_4$  разложения силы находим интегрированием. Для удобства интегрирования по поверхности тела перейдем к сферическим координатам с началом в центре движущейся сферы:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon \cos \alpha \cos \beta + a_1 t^2/2, & x_2 &= \varepsilon \cos \alpha \sin \beta + a_2 t^2/2, & z &= \varepsilon \sin \alpha - 1 + a_3 t^2/2, \\ & & & & & -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2, & 0 \leq \beta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Имеем

$$\mathbf{R}_0 = - \int_{S_\varepsilon} p_0 \mathbf{n} dS = - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{p}_0(\varepsilon, \alpha, \beta, t) (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha) \varepsilon^2 \cos \alpha d\alpha d\beta.$$

Заметим, что давление  $p_0$  на поверхности сферы зависит от времени, так как сфера при движении смещается из начального положения. Значит, вектор  $\mathbf{R}_0$  также зависит от времени и его можно разложить в ряд по степеням  $t$ , причем это будет ряд по четным степеням, так как координаты центра сферы квадратично зависят от времени:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_{00} + t^2 \mathbf{R}_{02} + t^4 \mathbf{R}_{04} + \dots$$

Аналогично получаем

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{22} + t^2 \mathbf{R}_{24} + \dots, \quad \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_{44} + t^2 \mathbf{R}_{46} + \dots$$

Разложение по степеням  $t$  силы, действующей на сферу, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_{00} + (\mathbf{R}_{02} + \mathbf{R}_{22}/2)t^2 + (\mathbf{R}_{04} + \mathbf{R}_{24}/2 + \mathbf{R}_{44}/24)t^4 + \\ &+ (\mathbf{R}_6/6! + \mathbf{R}_{06} + \mathbf{R}_{26}/2 + \mathbf{R}_{46}/24)t^6 + (\mathbf{R}_7/7!)t^7 + \dots \end{aligned}$$

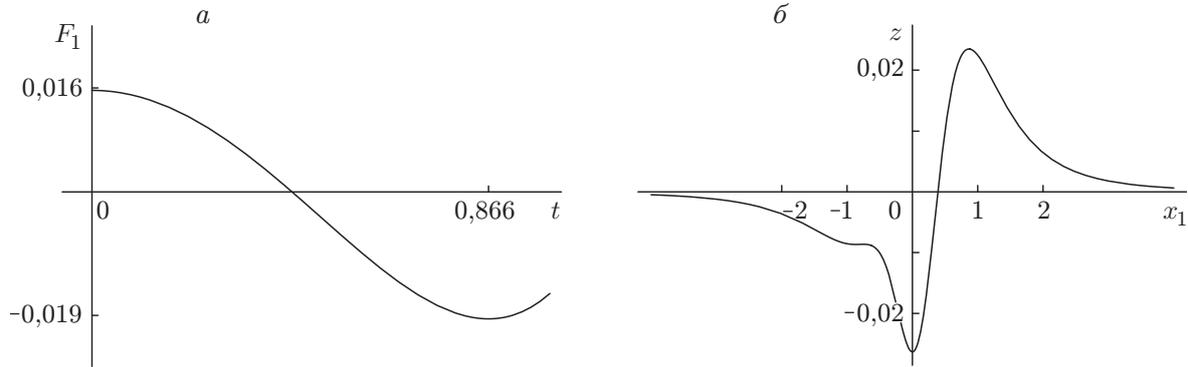


Рис. 3. Зависимость силы, направленной против ускорения сферы, от времени (а) и сечение ( $x_2 = 0$ ) поверхности жидкости в момент времени  $t = 0,8661$  (б) при  $A = 0,25g$

Интегрирование по сфере дает

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_A - 2\pi\varepsilon^3\mathbf{a}/3 + \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{F}_A$  — сила Архимеда;  $2\pi\varepsilon^3\mathbf{a}/3$  — сила, действующая на сферу, которая движется с ускорением  $\mathbf{a}$  в безграничной жидкости. Слагаемое  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , определяющее волновую нагрузку, имеет порядок  $\varepsilon^6$ :

$$F_1 = \pi a_1 \varepsilon^6 / 12 - t^2 \pi a_1 \varepsilon^6 (\text{Fr}^{-2} - 3a_3) / 8 + t^4 \pi a_1 \varepsilon^6 (2\text{Fr}^{-4} - 15\text{Fr}^{-2} a_3 + 75a_3^2) / 96 + \dots,$$

$$F_2 = \pi a_2 \varepsilon^6 / 12 - t^2 \pi a_2 \varepsilon^6 (\text{Fr}^{-2} - 3a_3) / 8 + t^4 \pi a_2 \varepsilon^6 (2\text{Fr}^{-4} - 15\text{Fr}^{-2} a_3 + 75a_3^2) / 96 + \dots,$$

$$F_3 = \pi a_3 \varepsilon^6 / 6 + t^2 \pi \varepsilon^6 (-1 + 5a_3^2) / 8 + t^4 \pi \varepsilon^6 (15\text{Fr}^{-2} + 2(-6 + \text{Fr}^{-4})a_3 - 33\text{Fr}^{-2} a_3^2 + 48a_3^3) / 48 + \dots$$

В случае горизонтального движения при медленном ускорении сферы сила, направленная против движения, немонотонно зависит от времени. При этом момент времени, когда сила достигает экстремума (рис. 3,а), соответствует моменту, когда на свободной поверхности формируется второй горб (см. рис. 1,з). Сечение свободной поверхности вертикальной плоскостью симметрии показано на рис. 3,б. При быстром горизонтальном движении волновая нагрузка монотонно увеличивается во времени.

Таким образом, найдена начальная асимптотика изменения формы свободной поверхности для равноускоренного движения сферы из состояния покоя в дипольном и модифицированном дипольном приближениях, а также выражение для силы, действующей на сферу, в дипольном приближении. Использованный метод сведения исходной задачи к системе граничных интегродифференциальных уравнений позволяет получить решение задачи с нелинейными условиями на свободной поверхности.

Автор выражает благодарность Н. И. Макаренко за постановку задачи, помощь в работе и обсуждение результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Lamb Н.** On some cases of wave motion on deep water // Ann. Matematica. 1913. V. 21. P. 237–250.
2. **Havelock Т. Н.** The wave pattern of a doublet in a stream // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1928. V. 121. P. 515–523.
3. **Wu G. X., Taylor E.** Radiation and diffraction by submerged sphere at a forward speed // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 417. P. 433–461.

4. **Tyvand P., Miloh T.** Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged cylinder // J. Fluid Mech. 1995. V. 286. P. 67–101.
5. **Tyvand P., Miloh T.** Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from rest // Ibid. P. 103–116.
6. **Миндлин И. М.** Интегродифференциальные уравнения в динамике тяжелой слоистой жидкости. М.: Наука. Физматлит, 1996.
7. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
8. **Макаренко Н. И.** О генерации нелинейных волн погруженным цилиндром // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1998. Вып. 113. С. 99–102.
9. **Пяткина Е. В.** Задача о генерации нелинейных волн погруженной сферой // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2001. Вып. 118. С. 130–134.
10. **Пяткина Е. В.** Дипольное приближение в задаче о генерации нелинейных волн погруженной сферой // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 148–153.
11. **Кошляков Н. С.** Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
12. **Пяткина Е. В.** Интегральное уравнение для нормальной скорости в задаче о генерации волн погруженной сферой // Материалы Междунар. конф. “Математические модели и методы их исследования”, Красноярск, 16–21 авг. 2001 г. Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН, 2001. Т. 2. С. 157–161.
13. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

*Поступила в редакцию 20/VIII 2002 г.*

---